M2 2024/2025 : Algèbre et Topologie

1 Objectifs

Le parcours vise d'une part à introduire des outils fondamentaux en algèbre et en topologie, et d'autre part à présenter des applications intéressantes de ces outils. Il commence par poser des fondations modernes en algèbre homologique et en topologie algébrique. Plusieurs sujets plus avancés sont proposés : les bases de Gröbner, les représentations des algèbres de dimension finie, ainsi que les associateurs.

2 S1 : cours fondamentaux

2.1 Topologie algébrique (Benjamin Enriquez et Pierre Guillot)

Dans ce cours, nous abordons les outils fondamentaux de la topologie algébrique : groupe fondamental et homologie, ainsi que les techniques simpliciales. Nous donnerons beaucoup d'applications classiques telles que la classification des surfaces compactes, l'étude des nœuds, ainsi que la description du groupe des tresses (qui revient au second semestre dans le cours sur les bases de Groebner ainsi que dans le cours sur les associateurs, PROPs et quantification).

L'homologie et son dual, la cohomologie, seront également abordées à travers l'isomorphisme de de Rham, d'un point du vue qui fait encore plus la part belle à l'algèbre homologique. Les liens avec l'autre cours du S1 sont très étroits.

- rappels sur le groupe fondamental et les homotopies, ainsi que les revêtements
- point de vue galoisien et Van Kampen
- applications aux nœuds et arrangements d'hyperplans
- complexes simpliciaux et leur homologie
- homologie singulière
- CW complexes
- cohomologie
- dualité de Poincaré
- classification des surfaces
- faisceaux, fibrés, connexions

- théorème de comparaison de de Rham

Références :

- Pierre Guillot, Leçons sur l'homologie et le groupe fondamental, Cours Spécialisés SMF.
- Munkres, Elements of algebraic topology
- Hatcher, Algebraic Topology (le chapitre sur l'homologie des variétés est très bien)
- Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups

2.2 Catégories abéliennes et algèbre homologique (Dragoş Frăţilă)

Ce cours forme une introduction à l'algèbre homologique, d'un point de vue algébrique, avec des techniques modernes. Nous revisitons des constructions fondamentales avec les outils catégoriques pour mieux comprendre leur propriétés universelles (produit, coproduit, noyau, conoyau, quotient, objet libre, produit tensoriel, limite, colimite). Pour avoir une large classe d'exemples, nous introduisons et étudions les catégories de modules et les foncteurs entre elles, ainsi que les faisceaux.

On parlera de la théorie de Morita et ensuite de foncteurs exacts, foncteurs dérivés et catégories dérivées. Comme exemple, nous prendrons les foncteurs Ext et Tor. Ensuite, nous introduirons les faisceaux et leur cohomologie. Nous mettrons en évidence l'équivalence entre la catégorie des systèmes locaux et les représentations du groupe fondamental. Nous pourrons ensuite voir la relation entre la cohomologie d'un espace et la cohomologie des groupes. Ce cours sera fortement lié au cours de Topologie algébrique car chacun fournira des méthodes ou des exemples à étudier pour l'autre. Il sera un outil indispensable pour le cours avancé sur la théorie d'Auslander–Reiten.

- modules sur les anneaux, modules projectifs, injectifs, simples, indécomposables, produit tensoriel
- catégories, foncteurs, adjonction, propriétés universelles, lemme de Yoneda
- catégories additives et abéliennes,
- foncteurs exact, représentables, théorème de Mitchell, théorie de Morita
- suites exactes, foncteurs exacts, complexes de chaines, résolutions projectives et injectives
- catégories dérivées, foncteurs dérivés (ex. Tor, Ext, $R\Gamma$)
- applications et exemples : homologie et cohomologie, coefficients universels, faisceaux et cohomologie singulière.

Références :

- Hilton, Stammbach. A course in homological algebra. Graduate texts in Mathematics

- Weibel. An introduction to homological algebra, Cambridge study in advanced mathematics
- Gelfand, Manin. Methods of homological algebra
- S. Maclane. Categories for the working mathematician
- Thorsten Holm And Peter Jørgensen, Triangulated Categories: Definitions, Properties And Examples

3 S2 : cours avancés

3.1 Représentations et carquois : théorie d'Auslander-Reiten (Léa Bittmann et Frédéric Chapoton)

Le cours étudie les représentations de carquois, qui forment une classe d'exemples riche et fondamentale dans l'étude générale des algèbres associatives de dimension finie. Il introduira les techniques standard d'Auslander-Reiten, qui donnent accès à la structure des catégories de représentations.

Description de la première partie :

- Modules sur un anneau (rappels). Modules injectifs et projectifs, Ext, Tor.
- Théorèmes de Jordan-Hölder, Krull-Schmidt.
- Modules semi-stables et filtration de Harder-Narasimhan.
- Progénérateurs, projectivisation, équivalence de Morita.
- Toute algèbre basique scindée est une algèbre de carquois avec relations.
- Type de représentation d'une algèbre (fini, domestique, sauvage).

Deuxième partie :

Introduction aux méthodes de la théorie d'Auslander-Reiten, fondamentale en théorie des représentations des algèbres non semi-simples. En détail : suites exactes presque-scindées, foncteur d'Auslander-Reiten, carquois d'Auslander-Reiten, algorithme du tricot.

Complément possible :

Introduction à la théorie des algèbres amassées. Mutation, aspects combinatoires, exemples. Construction de la catégorie amassée (cas Dynkin).

Références :

- M. Auslander, I. Reiten et S. Smalø (1997) Representation theory of Artin algebras. Cambridge Studies in Advanced Mathematics
- Assem, Skowronski, et Simson, "Elements of the Representation Theory of Associative Algebras", vol 1
- Lidia Angeleri Hugel, An Introduction to Auslander-Reiten Theory (https://webusers.imj-prg.fr/ bernhard.keller/ictp2006/lecturenotes/angeleri.pdf)

- D. Happel, Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras, Cambridge University Press, Cambridge, 1988
- S. Fomin, L. Williams, A. Zelevinsky, Introduction to cluster algebras. (https://arxiv.org/abs/1608.05735, https://arxiv.org/abs/1707.07190, https://arxiv.org/abs/2008.09189)

3.2 Associateurs, PROPs et quantification (Martin Bordemann et Pierre Clavier)

Le cours est formé de deux parties.

La première se proposera de donner une introduction progressive aux associateurs de Drinfel'd, en partant de la géométrie des espaces de configurations. Elle commencera par la théorie des catégories monoïdales, et se tournera ensuite vers la quantification des bigèbres de Lie (résultat obtenu par Etingof-Kazhdan en 1996) dans la version non-topologique donnée par Ševera en 2016.

- catégories monoïdales, surtout 'strictification', lazy algebraist's diagram lemma
- algèbres de Lie, surtout $\mathrm{gl}(n, \mathbb{K})$, élément de Casimir
- groupes de tresses, relations de tresse infinitésimales
- espaces de configuration: traitement élémentaire comme ouverts de $\mathbb{C}^N$, connexion de Knizhnik-Zamolodchikov
- équations différentielles ordinaires formelles et connexions (plates), transport parallèle (fibrés triviaux, ouvert étoilé)
- Définition de l'associateur de Drinfel'd : partie régulière du transport parallèle sur l'intervalle ouvert.
- Preuve complète de l'équation de l'hexagone.
- Preuve complète de l'équation du pentagone.
- Vers la quantification des bigèbres de Lie.

La seconde partie de cours est centrée autour de la notion de PROP, structure algébrique qui englobe la notion d'opérade, avec une application aux graphes.

- La catégorie des PROPs (définition catégorique, définition basique)
- Exemples de PROPs (le PROP des morphismes linéaires, éventuellement pour les espaces de Fréchet nucléaires, le PROP de graphes).
- L'algèbre de Hopf de Connes-Kreimer (algèbre de Hopf, arbres enracinés, coproduit, propriété universelle).
- PROPs libres (graphes indécomposables, PROP libre, graphes décorés par un PROP, endofoncteur dans la catégorie des PROPs).

Références :

- C. Kassel, "Quantum Groups", Springer GTM, 1995
- S. Mac Lane, "Categories for the working mathematician", Springer GTM 5, 1998
- P. Ševera, "Quantization of Lie bialgebras revisited", Selecta Math 22, 2016, pages 1563-1581.
- M. Bordemann, A. Rivezzi, Th. Weigel, "A gentle introduction to the Drinfel'd associator", preprint arXiv.2304.07012, Avril 2023.
- D.Manchon, "Hopf algebras, from basics to applications to renormalisation", arxiv:0408405,
- P.Clavier, L.Foissy, S.Paycha, "PROPs of graphs and generalised traces", arxiv:2005.02115,
- P.Hilgert, N.Poncin, "Lectures on Algebraic Operads", Univ. de Luxembourg, 2011 (chapter 8).

3.3 Bases de Gröbner et applications (Vladimir Dotsenko)

Ce cours est une introduction aux bases de Gröbner, avec des applications.

Il présentera notamment les bases de Gröbner commutatives et ses applications en théorie des graphes, ainsi que des aspects algorithmiques et des liens avec la géométrie algébrique.

La fin du cours parlera un peu du cas non-commutatif, avec des applications homologiques, notamment sur la construction de résolutions.

Programme :

- Premiers pas : monômes, ordres admissibles, monômes de tête et idéaux de tête, bases de Gröbner et leur utilisation pour résoudre les questions d'appartenance à un idéal et de description de l'anneau quotient.
- Bases de Gröbner réduites : existence et unicité. Le lemme de Dickson. Noetherianité des anneaux des polynômes.
- Le lemme du diamant et l'algorithme de Buchberger. Côté algorithmique : finitude et l'explosion double exponentielle occasionnelle. Optimisation : le lemme du triangle.
- Résolution des systèmes polynomiaux. Autour du Nullstellensatz. Le lemme du contour. Les idéaux d'élimination Le théorème d'extension. Les résultants et ses propriétés.
- Applications : coloration des graphes, géométrie en 2D, multiplicateurs de Lagrange, paramétrisation des courbes.
- Bases de Gröbner universelles. Classification des ordres admissibles (énoncé).
- Bases de Gröbner non-commutatives. Le graphe des mots normaux. Fonctions génératrices des mots normaux. Résolution de D. Anick pour le module trivial.

Références :

- Cox, Little, O'Shea : Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2015.
- Ufnarovski : Combinatorial and asymptotic methods in algebra, in Algebra VI. Encyclopedia Math. Sci. 57, Springer, 1995.
- Bremner, Dotsenko : Algebraic operads: an algorithmic companion. Chapman and Hall / CRC Press, 2016.

4 Master Class

La master class est prévue pour attirer des étudiants extérieurs en proposant 3 ou 4 cours de niveau M1 portant sur des directions en lien avec le parcours du M2. Chaque cours sera de 4 heures, avec des séances de discussion.

Pour des raisons d'organisation, la master class aura lieu pendant la semaine du 29/04/2024.

Les orateurs seront des extérieurs, ou peut-être un orateur local. P.-G. Plamondon a donné un accord de principe pour un cours sur le thème des algèbres amassées. On prévoit un autre cours sur la réécriture et deux autres plus topologiques, peut-être sur les noeuds ou les tresses ou les espaces de modules de courbes. Parmi les orateurs pressentis, on peut citer Stéphane Gaussent et Francis Brown.

5 Semaine spéciale

Ce sera une semaine de cours thématiques intensifs, par des orateurs locaux, au cours du M2. La date reste à préciser, probablement autour de février 2025.