PROPOSITION DE M2 POUR L'ANNÉE UNIVERSITAIRE 2021/2022

Un court résumé

L'objectif de ce programme est de couvrir les différents aspects que peut revêtir le mot géométrie afin d'offrir aux étudiant·e·s le suivant la culture mathématique nécessaire pour envisager la préparation d'une thèse sur des sujets connexes.

Nous souhaitons accompagner ce programme de cours par des groupes de lectures (*Riemann Surfaces* par Donaldson, *Discrete Subgroups of Lie Groups* par Raghunathan, etc.)

Les deux premiers cours listés ci-dessous (Géométrie différentielle et riemannienne ; Systèmes dynamiques : théorie ergodique et stabilité des difféomorphismes d'Anosov) sont proposés au trimestre 1. Les trois suivants (Théorie de Hodge ; Phénomènes de rigidité globale en topologie symplectique et de contact ; Introduction aux variétés hyperboliques) sont proposés au trimestre 2.

Géométrie différentielle et riemannienne

Martin Bordemann et Charles Frances

Prérequis. Connaissances en calcul différentiel, équations différentielles et topologie générale (très élémentaire : juste 'ouvert', 'fermé', 'connexe', 'compact', 'application continue'...).

Partie I : Géométrie différentielle élémentaire. On commence par la définition des variétés différentielles (toujours séparées et à base dénombrables) par des atlas et celle des applications de classe C^∞. Ensuite on passe à la définition des variétés fibrées et des fibrés, surtout celle du fibré tangent et leurs sections. En particulier on regardera des champs de vecteurs et le calcul vectoriel associé : dérivée de Lie, crochets de Lie, couples de champs de vecteurs liés. Ensuite on regardera les équations différentielles sur les variétés, donc les flots (locaux et globaux) des champs de vecteurs et le lien avec les crochets de Lie. Ensuite on traite des sous-fibrés intégrables du fibré tangent et les feuilletages réguliers qui sont associés d'après le théorème de Frobenius. Comme exemples on étudie les groupes de Lie, leurs actions sur les variétés (orbites et sous-groupes d'isotropie) et en particulier les espaces homogènes dont on regardera quelques exemples classiques : sphères, hyperboloides, espaces projectifs réels et complexes, domaines bornés homogènes.

Partie II : Géométrie (pseudo-)riemannienne. On introduit la notion de connexion (d'après Koszul–Nomizu) dans un fibré vectoriel, les notions de courbure et de torsion et le transport parallèle (d'abord linéaire) associés aux connexions. Ensuite on définit la notion de métrique (pseudo)-riemannienne. On introduit la connexion de Levi-Civita associée, ainsi que la courbure de Riemann, les courbures sectionnelles, le tenseur de Ricci, la courbure scalaire et le volume induit pour faire des intégrations. On dérive quelques propriétés algébriques de ces tenseurs. Puis on regarde les sous-variétés des variétés pseudo-riemanniennes, leur métrique induite (dans le cas nondégénéré) et les courbures extrinsèque et moyenne. On passe à un principe variationnel pour définir des sous-variétés minimales, surtout en dimension 1 les géodésiques, par ses équations (en général aux dérivées partielles). On étudie l'application exponentielle et les coordonnées normales, et on donne une interprétation géométrique de la courbure (et la torsion) via le transport parallèle. On s'intéressera aussi à des aspects globaux : par exemple le théorème de Hopf-Rinow, qui dans le cadre Riemannien établit l'équivalence entre la complétude métrique et la complétude géodésique.

Partie III : Géométrie riemannienne en courbure négative. On étudie d'abord les trois modèles de l'espace hyperbolique (d'abord en dimension 2) : le plan supérieur, le disque de Poincaré et une nappe de l'hyperboloïde à deux nappes dans l'espace $\mathbf{R}^3$ de Minkowski. on étudiera en dérails les géodésiques, la géométrie des triangles et le transport parallèle (ce dernier le long d'un triangle géodésique donne la précession de Thomas en relativité restreinte d'Einstein). Ensuite on présente le théorème de Cartan–Hadamard que toute variété riemannienne complète, connexe et simplement connexe de courbure sectionnelle négative est difféomorphe à $\mathbf{R}^n$ par l'application exponentielle. Cette dernière partie du cours sera l'occasion d'introduire la notion d'espaces CAT(0), et leur bord à l'infini. On illustrera ce volet via les espaces symmétriques de type non compact.

Des feuilles d'exercices seront distribuées aux étudiants toutes les deux semaines.

Références.

(1) Gallot, Sylvestre ; Hulin, Dominique ; Lafontaine, Jacques : *Riemannian Geometry.* 3me édition, Springer, 2004
(2) Lafontaine, Jacques : *Introduction aux variétés différentielles.* Presses Universitaires de Grenoble 1996
(3) Kobayashi, Shoshichi ; Nomizu, Katsumi : *Foundations of Differential Geometry.* Vol I 1963, Vol II 1969, Wiley
(4) Klingenberg, Wilhelm : *A course in differential geometry.* Springer, 1978

Systèmes dynamiques : théorie ergodique et stabilité des difféomorphismes d'Anosov

Daniel Panazzolo et Ana Rechtman

Ce cours est pensé comme une introduction aux systèmes dynamiques. Nous aborderons d'un côté des aspects probabilistes, c'est-à-dire la *théorie ergodique*, en particulier en démontrant le théorème Ergodique de Birkhoff ; de l'autre côté des aspects topologiques. L'objectif principal de ce cours est de montrer la stabilité des difféomorphismes d'Anosov linéaires des tores.

Un système dynamique (en temps discret) est une application $f\colon X \to X$ d'un espace dans lui-même. Nous pouvons considérer les composées $f^n\colon X \to X$ et étudier les orbites des points $\{f^n(x)|n \in \mathbf{N}\}$ et surtout leur comportement quand n tend vers l'infini. Cette situation est trop générale, il faut ajouter une structure sur X invariante par f. On peut considérer le cas où X est muni d'une mesure invariante par f, c'est l'objet de la théorie ergodique. On peut aussi considérer le cas où X est un espace topologique et f est continu, ce qui conduit à la théorie qualitative des systèmes dynamiques.

Pour les cours, nous prendrons comme exemples principaux les homomorphismes et automorphismes linéaires sur les tores $\mathbf{T}^k = \mathbf{R}^k/\mathbf{Z}^k$. Cette classe d'exemples est assez riche pour exhiber une dynamique complexe : infinité de points périodiques, existence d'orbites denses et ergodicité.

Plan du cours.

(1) **Les tores $\mathbf{T}^k$:** structure algébrique, topologie, applications continues, mesures de Haar et homéomorphismes linéaires.

(2) **Théorie ergodique :** système mesuré, théorème de recurrence de Poincaré, théorèmes ergodiques.
(3) **Ergodicité et melange (faible et fort).**
(4) **Dynamique topologique :** transitivité, orbites denses, mélange topologique, minimalité.
(5) **Mesures :** théorème de Riesz, topologie faible sur les mesures, unique ergodicité.
(6) **Anosov linéaires des tores.**

Théorie de Hodge

Emmanuel Opshtein et Pierre Py

Le but de ce cours est de donner une introduction à la théorie des variétés kählériennes, en particulier leur théorie de Hodge.

Après l'exposé des différentes caractérisations des variétés kählériennes, nous expliquerons la théorie de Hodge des variétés kählériennes compactes (identités kählériennes, laplaciens associés aux opérateurs d, ∂, $\overline{\partial}$ et leur proportionnalité) et notamment la décomposition de Hodge sur leurs groupes de cohomologie de de Rham. Nous présenterons de nombreux exemples. On introduira aussi la notion de variété projective et on mentionnera le théorème de plongement de Kodaira. Comme application, on présentera la construction par C. Voisin de variétés kählériennes compactes qui n'ont pas le type d'homotopie de variétés projectives. Ces exemples sont des variétés obtenues à partir de tores non-algébriques par éclatement de certaines sous-variétés.

Ce cours pourrait débuter une ou deux semaines après celui de C. Frances et M. Bordemann, afin que les notions de variétés (réelles) et de métriques riemanniennes aient déjà été introduites préalablement à notre cours.

Plan du cours.

(1) Variétés complexes, formes différentielles sur les variétés complexes, opérateurs ∂ et $\overline{\partial}$.
(2) Notion de métrique kählérienne, différentes caractérisations.
(3) Opérateur étoile de Hodge, laplaciens sur les variétés kählériennes, identités kählériennes.
(4) Décomposition de Hodge sur les groupes de cohomologie de de Rham. Exemples (tores, espaces projectifs, surfaces de Riemann, modification de la cohomologie et de la structure de Hodge par éclatement d'un point ou d'une sous-variété).
(5) Construction des exemples de Voisin de variétés kählériennes compactes qui n'ont pas le type d'homotopie de variétés projectives.

Bibliographie.

— C. Voisin, *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, Cours spécialisés **10**, Société Mathématique de France, Paris (2002).
— C. Voisin, *On the homotopy types of compact Kähler and complex projective manifolds*, Invent. Math. **157**, No. 2 (2004), 329–343.

Phénomènes de rigidité globale en topologie symplectique et de contact

Sheila Sandon

Les variétés symplectiques sont des variétés de dimension paire munies d'une 2-forme fermée non-dégénérée. Toutes les variétés symplectiques de la même dimension sont localement difféomorphes. Par contre, à partir des années 1980 plusieurs résultats profonds de rigidité globale ont été découverts : entre autres, le théorème de non-squeezing de Gromov, la conjecture d'Arnold sur les points fixes des difféomorphismes hamiltoniens, et l'existence de métriques bi-invariantes sur le groupe des difféomorphismes hamiltoniens.

Les variétés de contact sont des variétés de dimension impaire munies d'une distribution d'hyperplans maximalement non-intégrable. Malgré des liens étroits entre variétés symplectiques et variétés de contact, pour ces dernières l'interaction entre flexibilité et rigidité est plus mystérieuse : de façon générale chaque phénomène de rigidité globale en topologie symplectique laisse des traces aussi en topologie de contact, mais dans le cas de contact ces traces de rigidité interagissent aussi avec une certaine tendance à la flexibilité globale, en donnant lieu à une théorie avec encore beaucoup de questions ouvertes.

Le cours commencera par les notions de base de topologie symplectique et de contact. On introduira ensuite les fonctions génératrices, une théorie classique (développée à partir des années 1980 entre autres par Chaperon, Laudenbach, Sikorav, Viterbo, Chekanov etc) qui consiste à appliquer la théorie de Morse à des fonctions associées à des objets symplectiques ou de contact pour obtenir des résultats de rigidité globale. En utilisant les fonctions génératrices nous démontrerons notamment le théorème de non-squeezing de Gromov, la conjecture d'Arnold sur le tore, et l'existence de métriques bi-invariantes sur le groupe hamiltonien de l'espace euclidien. Nous verrons ensuite comme une partie de cette rigidité survit aussi en topologie de contact, tout en se mélangeant avec d'autres phénomènes spécifiques à la topologie de contact et sensibles aussi à la topologie des variétés sous-jacentes. Nous discuterons en particulier le théorème de non-squeezing de contact de Eliashberg–Kim et Polterovich et la notion d'ordonnabilité pour les variétés de contact.

Introduction aux variétés hyperboliques

François Guéritaud

Depuis le 19e siècle, la géométrie consiste non pas tant à étudier l'espace, qu'à appliquer un langage spatial, propre à allier intuition et rigueur, à toutes sortes de situations. La géométrie hyperbolique, présente aux origines de ce renversement comme une curiosité logico-mathématique, est devenue depuis un objet central où se rencontrent l'analyse complexe, la dynamique, la topologie, l'arithmétique et bien d'autres thèmes encore.

Avec le théorème de géométrisation de Thurston et Perelman, elle apparaît même comme « le » principe classificateur de la topologie des variétés réelles de dimension 3 : à certaines (intéressantes) familles d'exceptions près, toute 3-variété admet une unique métrique hyperbolique, dont les grandeurs numériques (volume, etc) sont donc promues invariants topologiques.

Ce cours se voudra une introduction à la topologie de basse dimension à travers le prisme de la géométrie hyperbolique. On portera une attention particulière aux exemples, tels que les complémentaires de nœuds, ainsi qu'aux liens avec la théorie géométrique des groupes.

Bibliographie.

— William P. Thurston, *Three-Dimensional Geometry and Topology, Volume 1*, Princeton Math. Series (PMS-35), édité par Silvio Levy

— R. D. Canary, A. Marden, D. B. A. Epstein, *Fundamentals of hyperbolic manifolds : selected expositions*, Cambridge Univ. Press, 2006

— Michael Kapovich, *Hyperbolic manifolds and discrete groups*, Springer 2001