Calcul différentiel

Baptiste Peaucelle

18 février 2018

1 Différentiation d'une fonction

Tous les espaces vectoriels E, F, *etc.* sont des $\mathbb{R}$-espaces de Banach (on pensera surtout aux espaces $\mathbb{R}^n$). On veillera, en dimension infinie, à considérer les espaces $\mathcal{L}^c(E,F)$ au lieu de $\mathcal{L}(E,F)$.

1.1 Différentiation ponctuelle

Définition : Soit U un ouvert de E, $f : U \to F$ est dite différentiable en $x_0 \in U$ s'il existe $L \in \mathcal{L}^c(E,F)$ et $r > 0$ tels que $B(x_0, r) \subseteq U$ et $\forall h \in B(x_0, r)$,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + \underset{\|h\| \to 0}{o}(\|h\|_E).$$

L est alors uniquement déterminée et on note $L = Df(x_0) = df_{x_0} = df(x_0)$.

Notation : Pour L linéaire on note aussi $L(x) = Lx = L \cdot x$.

Remarque : L'unicité de L est assurée par le fait que si $(L_1 - L_2)(h) = \underset{\|h\| \to 0}{o}(\|h\|_E)$, alors pour $e \in E$ et $t > 0$, $(L_1 - L_2)(e) = \dfrac{(L_1 - L_2)(te)}{t} = \dfrac{\underset{t \to 0}{o}(t)}{t} = \underset{t \to 0}{o}(1) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$. D'où $L_1 = L_2$.

Remarque : f différentiable en x_0 implique f continue en x_0. En effet on a

$$\|f(x_0) - f(x_0 + h)\|_F \leqslant \underbrace{|\!|\!| Df(x_0) |\!|\!| \|h\|_E + \underset{\|h\|_E \to 0}{o}(\|h\|_E)}_{\underset{\|h\|_E \to 0}{\longrightarrow} 0}.$$

Ceci serait *a priori* faux si $Df(x_0)$ n'était pas continue.

Exemples

- Si $L \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et U est un ouvert de E, alors $f = L_{|U}$ est différentiable en tout point et sa différentielle en tout point est égale à L :

$$f(x_0 + h) = Lx_0 + Lh = f(x_0) + Lh.$$

- Si E est un espace de Hilbert, alors on a $\|x+h\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, h\rangle + \|h\|^2$. Donc l'application $N^2 : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & \|x\|^2 \end{array} \right.$ est différentiable en tout $x \in E$ et $DN^2(x) \cdot h = 2\langle x, h\rangle$.

— Plus généralement si b est bilinéaire continue, alors $q : x \mapsto b(x,x)$ est différentiable de différentielle $Dq(x) \cdot h = b(x,h) + b(h,x)$.

— Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to F$ est dérivable en t_0, alors $\forall t \in \mathbb{R}$ tel que $t + t_0 \in I$, $f(t_0 + t) = f(t_0) + tf'(t_0) + \underset{t\to 0}{o}(t)$. f est donc différentiable en t_0 et sa différentielle est $Df(t_0) : t \mapsto tf'(t_0)$.

Définition (Gradient) : Si $E = H$ est un espace de Hilbert, on définit le gradient de $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$ par $\nabla f(a) \in H$ tel que $\forall h \in H, \langle \nabla f(a), h\rangle = Df(a) \cdot h$. ∇f existe et est unique par le théorème de représentation de Riesz. On note aussi $\nabla f = \operatorname{grad} f$.

Géométriquement ∇f pointe vers les grandes valeurs de f (localement).

Exemple : Avec $N^2(x) = \|x\|^2$ qui est différentiable en tout $x \in H$, on a $\nabla N^2(x) = 2x$.

Lien avec la dérivée directionnelle

Définition : Pour $e \in E \setminus \{0\}$, la dérivée directionnelle suivant e en $x_0 \in U \subset E$ de $f : U \to F$ est (si elle existe)

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{R}^*}} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t} \underset{\substack{\text{Si } f \text{ est}\\ \text{différentiable en } x_0}}{=} \lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{R}^*}} \frac{Df(x_0)\cdot te}{t} = Df(x_0)\cdot e.$$

Ainsi, si f est différentiable, elle admet des dérivées directionnelles selon toutes les directions. La réciproque n'est cependant pas vraie.

Contre-exemple : On considère la fonction $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } 0 < y < x^2 \\ 1 & \text{sinon} \end{array}\right. \end{array}\right.$. Les dérivées directionnelles de f existent et sont toutes nulles mais, pour $t \neq 0$, $f\left(t, \dfrac{t^2}{2}\right) = 0$ tandis que $f(0,0) = 1$. f n'est donc pas continue en $(0,0)$.

Expression dans une base en dimension finie

On considère ici $E \cong \mathbb{R}^n$ et $F \cong \mathbb{R}^m$ par un choix de bases $e = (e_1, \dots, e_n)$ et $e' = (e'_1, \dots, e'_m)$ et on écrit $f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1e_1 + \dots + x_ne_n)$.

On note $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ la dérivée directionnelle en p suivant le vecteur e_i. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(p) = Df(p)\cdot e_i$.

On a alors $\operatorname{Mat}_{e,e'}(Df(p)) = \left(\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)\right)_{\substack{i\in[\![1,m]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}} = \mathcal{J}_f(p)$, où $\mathcal{J}_f(p)$ est appelé la matrice Jacobienne de f en p (dans les bases e et e').

Remarque : Si l'on note $x_i : \left\{\begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R} \\ (t_1, \dots, t_n) & \mapsto & t_i \end{array}\right.$, x_i est la restriction d'une application linéaire, donc $Dx_i(p)\cdot(h_1, \dots, h_n) = h_i$. Alors

$$f(p+h) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)h_i + \underset{\|h\|_E\to 0}{o}(\|h\|_E) = f(p) + \mathcal{J}_f(p)\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} + \underset{\|h\|_E\to 0}{o}(\|h\|_E).$$

Donc $Df(p) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) Dx_i(p)$.

Exemple des fonctions $\mathbb{C}$-dérivables

On considère $E = \mathbb{C} = F$ et f, $\mathbb{C}$-dérivable en z_0. On a

$$f(z_0 + z) = f(z_0) + f'(z_0)z + \underset{|z|\to 0}{o}(|z|).$$

L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & f'(z_0)z \end{array} \right.$ est linéaire, f est donc différentiable en z_0 avec $Df(z_0) \cdot z = f'(z_0)z$.

Réciproquement, si f est différentiable en z_0, on a $Df(z_0) \cdot z = ax + by$ avec $a = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $b = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $z = x + iy$. D'où

$$Df(z_0) \cdot z = a\frac{z + \overline{z}}{2} + b\frac{z - \overline{z}}{2i} = \underbrace{\frac{a - ib}{2}}_{:= \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)} z + \underbrace{\frac{a + ib}{2}}_{:= \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)} \overline{z}.$$

$Df(z_0)$ est donc $\mathbb{C}$-linéaire si et seulement si $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$, si et seulement si $\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0$. On retrouve ainsi les équations de Cauchy-Riemann.

1.2 Formules de différentiabilité (et calculs)

Proposition (composition)
Si $f : \underset{\subset E}{U} \to \underset{\subset F}{V}$ est différentiable en x_0 et $g : V \to G$ est différentiable en $y_0 = f(x_0)$, alors $g \circ f$ est différentiable en x_0 et on a :

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0).$$

Démonstration : $f(x_0 + x) = f(x_0) + Df(x_0) \cdot x + \varepsilon(x)$, où $\varepsilon(x) = \underset{\|x\|\to 0}{o}(\|x\|)$, donc

$$\begin{aligned} g \circ f(x_0 + x) &= g(f(x_0) + Df(x_0) \cdot x + \varepsilon(x)) \\ &= g(f(x_0)) + Dg(f(x_0)) \cdot (Df(x_0) \cdot x + \varepsilon(x)) + o(\|Df(x_0) \cdot x + \varepsilon(x)\|) \end{aligned}$$

De plus si $\varphi(x) = O(\psi(x))$, alors $(h(x) = o(\varphi(x))) \Rightarrow (h(x) = o(\psi(x))$. Ici, comme $Df(x_0)$ est linéaire continue, on a $\|Df(x_0) \cdot x\| = \underset{\|x\|\to 0}{O}(\|x\|)$. Donc $o(\|Df(x_0) \cdot x + \varepsilon(x)\|) = \underset{\|x\|\to 0}{o}(\|x\|)$ et $Dg(f(x_0)) \cdot \varepsilon(x) = \underset{\|x\|\to 0}{o}(\|x\|)$. D'où le résultat. ■

Si on se place en dimension finie on a matriciellement $\mathcal{J}_{g\circ f}(p) = \mathcal{J}_g(f(p))\mathcal{J}_f(p)$.

Si on regarde les dérivées partielles on a $\dfrac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(p))\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(p)$.

Application (Équation des ondes 1D) : On cherche à résoudre

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0,$$

pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. En effectuant le changement de variables linéaire $\begin{cases} u = x - ct \\ v = x + ct \end{cases}$, la fonction $\widetilde{f} = f\left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{v-u}{2c}\right)$ vérifie l'équation

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c}\right)\frac{\partial \phi}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial \phi}{\partial u} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(\phi(u,v)) - \frac{1}{2c}\frac{\partial f}{\partial t}(\phi(u,v)).$$

Donc $\dfrac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial v \partial u}(u,v) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right) = 0.$

Conséquence : Si $\gamma : I \to U \subseteq E$ est dérivable en t_0 et $f : U \to F$ est différentiable en $\gamma(t_0)$, alors

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = Df(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) \in F.$$

f agit donc sur les vecteurs tangents par sa différentielle.

Application : On cherche à dérivée $\displaystyle\int_0^{g(t)} f(x,t)\mathrm{d}x$ par rapport à t (en supposant réunies les conditions pour dériver sous le signe intégral). Pour cela on pose $F : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & G \\ (t,t') & \mapsto & \displaystyle\int_0^{g(t)} f(x,t')\mathrm{d}x \end{cases}$ différentiable.

On prend $\gamma : t \mapsto (t,t)$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(F(t,t)) &= (F \circ \gamma)'(t_0) \\
&= DF(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) \\
&= DF(t_0,t_0) \cdot (1,1) \\
&= \frac{\partial F}{\partial x}(t_0,t_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(t_0,t_0) \\
&= g'(t_0)f(g(t_0),t_0) + \int_0^{g(t_0)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Proposition
Soit $M : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ une application n-linéaire continue, $f_i : U \to E_i$ différentiable en $x \in E_0$. Alors $M(f_1, \ldots, f_n) : U \to F$ est différentiable en x avec

$$D(M(f_1 \ldots, f_n))(x) \cdot h = \sum_{i=1}^{n} M\left(f_1(x), \ldots, f_{i-1}(x), Df_i(x) \cdot h, f_{i+1}(x), \ldots, f_n(x)\right).$$

Démonstration : Pour $n = 2$:

$$\begin{aligned}
M(f_1(x+h), f_2(x+h)) &= M(f_1(x) + Df_1(x) \cdot h + \varepsilon_1(h), f_2(x) + Df_2(x) \cdot h + \varepsilon_2(x)) \\
&= M(f_1(x), f_2(x)) + M(Df_1(x) \cdot h, f_2(x)) + M(f_1(x), Df_2(x) \cdot h) \\
&\quad + M(\varepsilon_1(x), f_2(x+h)) + M(f_1(x+h), \varepsilon_2(x)) \\
&\quad + M(Df_1(x) \cdot h, Df_2(x) \cdot h)
\end{aligned}$$

Il reste à montrer que les termes de reste sont bien négligeables devant $\|h\|$. On a

$$\|M(Df_1(x)\cdot h, Df_2(x)\cdot h)\| \leqslant \|\!|M|\!\|\|Df_1(x)\|\|Df_2(x)\|\|h\|^2 = o(\|h\|).$$

De plus

$$\|M(\varepsilon_1(x), f_2(x+h))\| \leqslant \|\!|M|\!\|\|\varepsilon_1(h)\|\|f_2(x+h)\|.$$

f_2 est continue en x, on a donc une constante $C>0$ telle que pour h assez petit $\|f_2(x+h)\| \leqslant C$. On a finalement $M(\varepsilon_1(x), f_2(x+h)) = \underset{\|h\|\to 0}{o}(\|h\|)$, ce qui finit de montrer le résultat. ■

Exemples
Les applications suivantes étant supposées différentiables,
- Soient $f,g : U \to \mathbb{R}^3$. $D(f\wedge g)(p)\cdot h = Df(p)\cdot h \wedge g(p) + f(p)\wedge Dg(p)\cdot h$.
- Sur un espace de Hilbert H, $D(\langle f,g\rangle)(x)\cdot h = \langle Df(x)\cdot h, g(x)\rangle + \langle f(x), Dg(x)\cdot h\rangle$.
- Soit $A : U \to \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $f : U\to\mathbb{R}^n$.
  $D(Af)(x)\cdot h = (DA(x)\cdot h)f(x) + A(x)Df(x)\cdot h$.

Application : Soit H un espace de Hilbert, $N : \left\{\begin{array}{ccc} H & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}\end{array}\right. = \sqrt{\cdot}\circ N^2$. Donc N est différentiable là où $N^2 \neq 0$, c'est-à-dire sur $H\setminus\{0\}$. Pour calculer la différentielle de N, deux méthodes :

1. Calculer la composée $DN = D(\sqrt{\cdot})\circ D(N^2)$.
2. On a déjà vu que $D(N^2)(x)\cdot h = 2\langle x,h\rangle$, mais $N^2 = N\times N$ donc

$$D(N^2) = N\times DN + DN\times N = 2N\times DN.$$

   Mais de plus $D(N^2)(x)\cdot h = 2\langle x,h\rangle = 2N(x)DN(x)\cdot h$.
   Donc $DN(x)\cdot h = \left\langle \frac{x}{\|x\|}, h\right\rangle$. Autrement dit, $\nabla N(x) = \frac{x}{\|x\|}$

Application : Si $\overrightarrow{\gamma} : I \to F$ tel que $\|\overrightarrow{\gamma}\| = \text{cste}$ est différentiable, on obtient $\overrightarrow{\gamma}\perp\overrightarrow{\gamma}'$ (en particulier l'accélération d'un mobile se déplaçant à vitesse de norme constante est orthogonale à la trajectoire).

Exemple (Wronskien) : Soit $A : I\to\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour $j\in[\![1,n]\!]$, $Y_j : I\to\mathbb{R}^n$ tels qu'on ait l'EDO

$$\forall j\in[\![1,n]\!], Y_j'(t) = A(t)\times Y_j(t).$$

On définit $w(t) = \det(Y_1(t),\dots,Y_n(t))$, on a

$$\begin{aligned} w'(t) &= \sum_{i=1}^n \det(Y_1(t),\dots,Y_{i-1}(t),Y_i'(t),Y_{i+1}(t),\dots,Y_n(t)) \\ &= \sum_{i=1}^n \det(Y_1(t),\dots,Y_{i-1}(t),A(t)Y_i(t),Y_{i+1}(t),\dots,Y_n(t)). \end{aligned}$$

On rappelle le lemme suivant :

Lemme
Si $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E un espace vectoriel de dimension n, alors

$$\sum_{i=1}^{n} \det(a_1, \dots, a_{i-1}, f(a_i), a_{i+1}, \dots, a_n) = \operatorname{Tr}(f) \det(a_1, \dots, a_n).$$

(L'ensemble des applications n-linéaires alternées est un espace vectoriel de dimension 1 porté par det et le membre de gauche correspond à une application n-linéaire alternée valant $\operatorname{Tr}(f)$ en $(e_1, \dots, e_n)$).

On déduit donc que w vérifie l'équation différentielle : $y' = \operatorname{Tr}(A)y$. Ainsi,

$$w(t) = w(0) \exp\left(\int_0^t \operatorname{Tr}(A(s))\mathrm{d}s\right).$$

Exemple (Le déterminant) : Notons $\delta : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ le déterminant de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ relativement à la base canonique et $\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & (\mathbb{R}^n)^n \\ A & \mapsto & (A_1, \dots, A_n) \end{array} \right.$ l'application qui a une matrice associe la liste de ses colonnes.

$\det = \delta \circ \phi$ se factorise donc en une application linéaire ϕ et une application n-linéaire δ. Ainsi la différentielle de det en une matrice $A = [A_1|\cdots|A_n]$ suivant le vecteur $H = [H_1|\dots|H_n]$ vaut

$$\begin{aligned} D\det(A) \cdot H &= D\delta(\phi(A)) \cdot (D\phi(A) \cdot H) \\ &= D\delta(\phi(A)) \cdot \phi(H) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \delta(A_1, \dots, A_{j-1}, H_j, A_{j+1}, \dots, A_n) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \det[A_1|\cdots|A_{j-1}|H_j|A_{j+1}|\cdots|A_n]. \end{aligned}$$

Développons $\det[A_1|\cdots|A_{j-1}|H_j|A_{j+1}|\cdots|A_n]$ suivant la j-ème colonne :

$$D\det(A) \cdot H = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} h_{i,j} \det\left((a_{k,l})_{\substack{k\neq i \\ l\neq j}}\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} h_{i,j} (\operatorname{Com}(A))_{i,j}.$$

On peut réécrire cette dernière égalité en $D\det(A) \cdot H = \operatorname{Tr}({}^t \operatorname{Com}(A)H) = \langle \operatorname{Com}(A), H\rangle$ pour le produit scalaire matriciel usuel. Autrement dit, pour ce produit scalaire, $\nabla \det(A) = \operatorname{Com}(A)$.

Exemple (L'inversion des isomorphismes) : Soit E un espace de Banach quelconque. Notons $\operatorname{Inv} : \mathrm{GL}^c(E) \to \mathrm{GL}^c(E)$, l'application qui, à un endomorphisme inversible u associe son inverse u^{-1}. On rappelle que $\mathrm{GL}^c(E)$ est un ouvert de l'espace de Banach $\mathcal{L}^c(E)$ muni de la norme subordonnée, nous sommes donc bien dans le bon cadre. Pour $u \in \mathrm{GL}^c(E)$ et $h \in \mathcal{L}^c(E)$ tel que $|||h||| < \frac{1}{|||u^{-1}|||}$, rappelons en effet que $u+h$ est inversible d'inverse la série convergente :

$$(u+h)^{-1} = (\mathrm{Id}_E + u^{-1} \circ h)^{-1} \circ u^{-1} = \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n (u^{-1} \circ h)^n \circ u^{-1}.$$

Ainsi, pour $h \in \mathcal{L}^c(E)$ assez petit,

$$\mathrm{Inv}(u+h) = \mathrm{Inv}(u) - u^{-1} \circ h \circ u^{-1} + \sum_{n \geqslant 2} (-1)^n (u^{-1} \circ h)^n \circ u^{-1},$$

avec $h \mapsto -u^{-1} \circ h \circ u^{-1}$ linéaire. Le terme de reste se majore par

$$\begin{aligned}
\left\|\left\| \sum_{n \geqslant 2} (-1)^n (u^{-1} \circ h)^n \circ u^{-1} \right\|\right\| &\leqslant \sum_{n \geqslant 2} \|\|(u^{-1} \circ h)^n \circ u^{-1}\|\| \\
&\leqslant \sum_{n \geqslant 2} \|\|u^{-1}\|\|^n \|\|h\|\|^n \|\|u^{-1}\|\| \\
&\leqslant \|\|u^{-1}\|\|^3 \|\|h\|\| \sum_{n \geqslant 0} \left(\|\|u^{-1}\|\| \|\|h\|\|\right)^n \\
&\leqslant \|\|h\|\|^2 \frac{\|\|u^{-1}\|\|^3}{1 - \|\|u^{-1}\|\| \|\|h\|\|}.
\end{aligned}$$

On reconnaît en ce reste un $\underset{\|\|h\|\| \to 0}{O}(\|\|h\|\|^2)$ donc un $\underset{\|\|h\|\| \to 0}{o}(\|\|h\|\|)$.

Finalement, Inv est différentiable en tout u avec $D\,\mathrm{Inv}(u) \cdot h = -u^{-1} \circ h \circ u^{-1}$.

Exemple (Une fonctionnelle quadratique) : Cet exemple s'adresse avant tout à ceux ayant déjà rencontré la notion d'espace de Sobolev. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ munit de son produit scalaire usuel. On considère l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, complété de $\mathcal{D}(\Omega) := \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ pour la norme H^1 dérivant du produit scalaire :

$$\forall f, g \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle f, g \rangle_{H^1} = \langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial g}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Rappelons que $H_0^1(\Omega)$ s'inclut naturellement dans $L^2(\Omega)$ (prolongeant continûment l'inclusion de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$) et que ses éléments admettent des dérivées partielles premières au sens des distributions, s'incluant elles-mêmes dans $L^2(\Omega)$.

Étant donné $V \in L^\infty(\Omega)$, on considère la fonction $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ suivante :

$$\forall f \in H_0^1(\Omega), \quad J(f) = \int_\Omega \frac{\|\nabla f(x)\|^2}{2} \mathrm{d}x + \int_\Omega V(x) f(x) \mathrm{d}x.$$

Nous cherchons à caractériser les points critiques de cette fonction. Voyons que J est une application de classe $\mathcal{C}^1$ du Hilbert $H_0^1(\Omega)$. Il suffit de constater que $J = q + L$ où q est quadratique continue et L est linéaire continue. En effet, considérons la forme bilinéaire symétrique définie sur $H_0^1(\Omega)$ par :

$$b : (u, v) \mapsto \int_\Omega \frac{\langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle}{2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial g}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

b est continue car $|b(u,v)| \leqslant \frac{1}{2} |\langle u, v \rangle_{H^1}|$, pour $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Considérons la forme linéaire :

$$L : u \mapsto \int_\Omega V(x) u(x) \mathrm{d}x = \langle V, u \rangle_{L^2}.$$

L est continue de norme $\|V\|_{L^2}$. Alors, en posant $q : u \mapsto b(u,u)$, on vérifie bien l'affirmation précédente. Ainsi J est même $\mathcal{C}^\infty$ et sa différentielle en $u \in H_0^1(\Omega)$ est $DJ(u) = Dq(u) + DL(u) = 2b(u,\cdot) + L$. Une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ est donc critique pour J si, et seulement si,

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad DJ(u)\cdot v = \int_\Omega \langle \nabla u(x), \nabla v(x)\rangle \,\mathrm{d}x + \int_\Omega V(x)v(x)\mathrm{d}x = 0.$$

En particulier, nous avons

$$\forall v \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle \nabla u, \nabla v\rangle_{\mathcal{D},\mathcal{D}'} + \langle V, v\rangle_{\mathcal{D},\mathcal{D}'} = \langle -\Delta u + V, v\rangle_{\mathcal{D},\mathcal{D}'} = 0.$$

Ainsi, un élément u de $H_0^1(\Omega)$ est un point critique de J si, et seulement si, u vérifie

$$\Delta u = V$$

au sens des distributions (on remonte les implications par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$).

1.3 Fonctions de classes $\mathcal{D}^1$ et $\mathcal{C}^1$

Si $f : U \to F$ est différentiable en tout point de U, alors pour $x \in U$ on a une application linéaire continue $Df(x) \in \mathcal{L}^c(E,F)$. On a donc une application $Df : U \to \mathcal{L}^c(E,F)$.

Rappel : Si F est un espace de Banach alors $(\mathcal{L}^c(E,F), \|\!|\cdot|\!\|)$ est un espace de Banach.

Définition :
- Si $f : U \to F$ est différentiable en tout point de U, alors f est dite de classe $\mathcal{D}^1(U,F)$. On écrit $f \in \mathcal{D}^1(U,F)$.
- Si de plus $Df : U \to \mathcal{L}^c(E,F)$ est continue, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1(U,F)$ et on écrit $f \in \mathcal{C}^1(U,F)$.

Proposition
Si $f \in \mathcal{D}^1(U,F)$, les extrema x de f vérifient $Df(x) = 0$ (on dit que ce sont des points critiques de f).

La réciproque est fausse, pour $f : x \mapsto x^3$, 0 est un point critique mais pas un extremum.

Démonstration : Soit x un extremum de f. Pour $e \in E$ et $\varepsilon > 0$ assez petit on considère $\gamma : \left\{\begin{array}{ccc}]-\varepsilon,\varepsilon[& \to & U \\ t & \mapsto & x+te \end{array}\right.$. Alors comme x est un extremum de f, 0 en est un de $f\circ\gamma$. Donc $(f\circ\gamma)'(0) = 0 = Df(x)\cdot e$. ■

Proposition
$\mathcal{D}^1$ et $\mathcal{C}^1$ sont des espaces vectoriels stables par composition. Ce sont aussi des anneaux pour $\times$ si $F = \mathbb{R}$.

Caractérisation des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ pour E de dimension finie

On considère $E \cong \mathbb{R}^n$ par le choix d'une base $\underline{e}$.

Proposition
On a $f \in \mathcal{C}^1(U,F)$ si et seulement si les applications $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ existent et sont continues sur U.

Pour montrer la réciproque de ce résultat, nous allons démontrer un critère de différentiabilité plus faible :

Proposition
Soit $f : U \to F$ admettant des dérivées partielles définies sur U et continues en un point $a \in U$. Alors f est différentiable en a.

Démonstration : $\boxed{\Rightarrow}$ On écrit simplement $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(p) = Df(p) \cdot e_i$. Ces applications sont donc continues par continuité de Df et de l'évaluation d'un morphisme borné en un vecteur e_i.

$\boxed{\Leftarrow}$ On considère la norme infinie sur E (par équivalence des normes en dimension finie cela ne change rien au calcul). Soit $L : U \to \mathcal{L}^c(E,F)$ telle que pour $p \in U$, $L(p)h = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)h_i$. Cette application est continue par hypothèse. On va montrer que f est différentiable en $a \in U$ de différentielle $L(a)$, il s'agit donc de montrer que

$$\frac{\|f(a+h) - f(a) - L(a)h\|}{\|h\|} \underset{\|h\|\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Pour cela, on décompose la variation $f(a+h) - f(a)$ suivant les différents axes et on estime ces variations via les dérivées partielles :

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) - L(a)h = &\left(f(a_1 + h_1, a_2, \ldots, a_n) - f(a) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 \right) \\ &+ \sum_{i=2}^{n-1} \Bigg(f(a_1+h_1, \ldots, a_{i-1}+h_{i-1}, a_i, \ldots, a_n) \\ &- f(a_1+h_1, \ldots, a_i+h_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i \Bigg) \\ &+ \left(f(a+h) - f(a_1+h_1, \ldots, a_{n-1}+h_{n-1}, a_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n \right) \end{aligned}$$

Si nous étions dans le cas plus fort où les dérivées partielles étaient continues, alors nous pourrions représenter la i-ème parenthèse par l'intégrale :

$$\int_0^{h_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1+h_1, \ldots, a_{i-1}+h_{i-1}, a_i+t, a_{i+1}, \ldots, a_n) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right) \mathrm{d}t.$$

Par inégalité de la norme d'une intégrale, en majorant grossièrement sous le signe intégral par un sup, nous aurions alors que la norme de ce terme est inférieure à :

$$\sup_{\|\eta\| \leqslant \|h\|} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+\eta) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right\| |h_i|.$$

Mais, en vérité, la représentation intégrale n'apporte rien ici : l'inégalité précédente découle directement du cas différentiable de l'inégalité des accroisements finis appliquée à la fonction d'une variable réelle :

$$t \mapsto f(a_1+h_1,\dots,a_{i-1}+h_{i-1},a_i+t,a_{i+1},\dots,a_n) - f(a_1+h_1,\dots,a_{i-1}+h_{i-1},a_i,\dots,a_n) - t\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

pour t parcourant $[0,h_{n-i}]$.

Nous avons donc, par inégalité triangulaire :

$$\frac{\|f(a+h)-f(a)-Lh\|}{\|h\|} \leqslant n \sup_{\substack{\|\eta\|\leqslant\|h\| \\ 1\leqslant i\leqslant n}} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+\eta) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right\|.$$

La continuité des dérivées partielles de f en a permet alors de conclure. ■

Proposition (Lemme de Hadamard)
Soit $f : B(x,r) \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$, alors il existe des fonctions continues (explicitées dans la preuve) $g_i : B(0,r) \to F$ telles que

$$\forall h \in B(0,r), \quad f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^n g_i(h)h_i.$$

Démonstration : Soit $\gamma : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & B(x,r) \\ t & \mapsto & x+th \end{array} \right.$ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$. Alors $f\circ\gamma$ est $\mathcal{C}^1$, de dérivée en t,

$$(f\circ\gamma)'(t) = Df(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) = Df(x+th)\cdot h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+th)h_i,$$

ainsi,

$$f(x+h) = f(x) + \int_0^1 (f\circ\gamma)'(t)\mathrm{d}t = f(x) + \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+th)\mathrm{d}t\right) h_i.$$

Posons ainsi $g_i(h) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+th)\mathrm{d}t$. g est continue par théorème de continuité sous le signe intégrale : en effet, pour $h \in B(0,r)$ fixé, l'application $\eta \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x+t\eta)$ est continue au point h pour tout $t\in[0,1]$, et la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x+th)$ est dominée sur $[0,1]$ par son maximum. ■

Ce lemme permet notamment de résoudre l'exercice suivant :

Exercice
Toute dérivation δ de fonction $\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ en a (*id est* toute application $\delta : \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ telle que $\forall f,g \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$, $\delta(fg) = f(a)\delta(g) + g(a)\delta(f)$) est de la forme

$$\delta = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{x=a},$$

où les λ_i sont des réels.

Le résultat de cet exercice est essentiel dans la théorie des variétés abstraites (qu'on ne traitera pas dans ce cours car totalement hors du programme de l'agrégation) : elle affirme que les vecteurs tangents en un point sont identifiables aux dérivations de fonction lisse en ce même point, ce qui permet de donner une définition intrinsèque aux espaces tangents d'une variété et de définir aisément la structure d'algèbre de Lie de ses champs de vecteurs.

Application : Les applications rationnelles en les coordonnées sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de définition. Par exemple det : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & \det(A) \end{array}\right.$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. De même l'inverse Inv : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^{-1} \end{array}\right.$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ car $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t\operatorname{Com}(A)$.

La connaissance *a priori* de la différentiabilité de Inv donne une méthode plus directe pour calculer sa différentielle : Pour $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on a $\operatorname{Inv}(A) \times \operatorname{Id}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}(A) = I_n$. On a donc pour $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$(D\operatorname{Inv}(a) \cdot H) \times \operatorname{Id}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}(A) + \operatorname{Inv}(A) \times D\operatorname{Id}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}(A) \cdot H = 0.$$

D'où $D\operatorname{Inv}(A) \cdot H = -A^{-1}HA^{-1}$.

Inégalité des accroissements finis (cas $\mathcal{C}^1$)

Théorème (Inégalité des accroissements finis)
Soit $f : U \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$.

1. *Si U est connexe par arcs et si $|||Df||| \leqslant M$, alors $\forall a, b \in U$ on a*

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant M d_l(a, b),$$

où $d_l(a, b) = \inf\left\{\int_0^1 \|\gamma'(s)\|\mathrm{d}s, \gamma : [0,1] \xrightarrow{\mathcal{C}^1} F, \gamma(0) = a, \gamma(1) = b\right\}$.

2. *Si U est convexe, alors $\forall a, b \in U$ on a*

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \sup_{x \in [a,b]} \{|||Df(x)|||\}\|b - a\|.$$

Démonstration : On prend $\gamma : [0,1] \xrightarrow{\mathcal{C}^1} F$ reliant a à b. Alors

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 (f \circ \gamma)'(s)\mathrm{d}s = \int_0^1 Df(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s)\mathrm{d}s.$$

Dans le deuxième cas on prend $\gamma(t) = a + t(b - a)$.
Par l'inégalité triangulaire on a

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \int_0^1 \underbrace{|||Df(\gamma(s))|||}_{\leqslant M} \|\gamma'(s)\|\mathrm{d}s$$

■

Remarque : Si U est un ouvert d'un espace vectoriel normé, alors sont équivalents

1. U est connexe par arcs ;
2. U est connexe par arcs $\mathcal{C}^\infty$;
3. U est connexe par lignes brisés.

Corollaire
Soit $f \in \mathcal{D}^1$, si U est connexe et $Df \equiv 0$, alors f est constante sur U.

Inégalité des accroissements finis, cas $\mathcal{D}^1$

Théorème
Soit $a < b$ deux réels, $f : [a,b] \to F$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivables sur $]a,b[$.
Si $\forall t \in]a,b[, \|f'(t)\| \leqslant g'(t)$, alors $\|f(b) - f(a)\| \leqslant g(b) - g(a)$.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. On va montrer que

$$\forall t \in [a,b], \|f(t) - f(a)\| \leqslant g(t) - g(a) + \varepsilon(t-a) + \varepsilon. \tag{1}$$

On raisonne par l'absurde : on pose $U = \{t \in [a,b]$ tel que (1) est faux$\}$ et on suppose que $U \neq \emptyset$.

U est un ouvert $[a,b]$ en tant que préimage de $]0,+\infty[$ par l'application $t \mapsto \|f(t) - f(a)\| - g(t) + g(a) - \varepsilon(t-a) - \varepsilon$ qui est continue par hypothèse. Soit $c = \inf U$.

1. $c > a$: par continuité en a de $t \mapsto \|f(t) - f(a)\| - g(t) + g(a)$, il existe $\delta > 0$ tel que pour $t \in [a, a+\delta[$,
$$\|f(t) - f(a)\| \leqslant g(t) - g(a) + \varepsilon \leqslant g(t) - g(a) + \varepsilon(t-a) + \varepsilon.$$
Donc $[a, a+\delta[\cap U = \emptyset$.
2. $c \notin U$: comme $c > a$, si $c \in U$ ouvert alors $\exists \eta > 0,]c-\eta, c+\eta[\subset U$ donc $c - \dfrac{\eta}{2} < c$, ce qui est absurde.
3. $c < b$: Sinon $U = \{b\}$ qui n'est pas ouvert dans $[a,b]$.

Donc $c \in]a,b[$. Par hypothèse, f et g sont dérivables, donc $\exists \eta > 0$ tel que pour $t \in]c, c+\eta[$,

$$\begin{cases} \dfrac{\|f(t) - f(c)\|}{t-c} - \dfrac{\varepsilon}{2} \leqslant \|f'(c)\| \\ |g'(c)| \leqslant \dfrac{g(t) - g(c)}{t-c} + \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Par hypothèse, on a $\|f'(c)\| \leqslant |g'(c)|$, donc $\|f(t) - f(c)\| \leqslant g(t) - g(c) + \varepsilon(t-c)$. Finalement

$$\begin{aligned} \forall t \in]c, c+\eta[, \|f(t) - f(a)\| &\leqslant \|f(t) - f(c)\| + \|f(c) - f(a)\| \\ &\leqslant \|f(c) - f(a)\| + g(t) - g(c) + \varepsilon(t-c) \\ &\leqslant g(c) - g(a) + \varepsilon(c-a) + \varepsilon + g(t) - g(c) + \varepsilon(t-c) \\ &\leqslant g(t) - g(a) + \varepsilon(t-a) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc pour tout $t \in]c, c+\eta[$, $t \notin U$, ce qui contredit la définition de c. Donc $U = \emptyset$ et (1) est vrai pour tout $t \in [a,b]$. En faisant tendre ε vers 0 on déduit le résultat. ∎

Remarque : Il suffit d'avoir f et g dérivables à droite.

Corollaire
Les inégalités sont vraies dans le cas $\mathcal{D}^1$

Démonstration : Pour la deuxième on applique le théorème à $\gamma : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & F \\ t & \mapsto & f(a+t(b-a)) \end{array} \right.$ avec $g(t) = \sup\limits_{x\in[a,b]} (\|\!|Df(x)|\!\|\|b-a\|t)$.

Pour la première il faut approcher $\inf \left\{ \int_0^1 \|\gamma'(s)\| \mathrm{d}s, \gamma : [0,1] \overset{\mathcal{C}^1}{\to} F, \gamma(0)=a, \gamma(1)=b \right\}$ par des lignes brisés. ■

Conséquences (Voir Cartan, *Calcul différentiel*)

— On a un critère de différentiabilité d'une fonction en $a \in U$ en dimension finie : si les $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ existent sur U et sont continues en a, alors f est différentiable en a.

— Théorème de convergence : Soit $f_n : U \to F$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

1. $\exists a \in U$ tel que $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ ait une limite ;
2. $Df_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{cvu}}{\longrightarrow}} g : U \to \mathcal{L}^c(E,F)$.

Alors il existe $f : U \to F$ de classe $\mathcal{D}^1$ telle que $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{cvu}}{\longrightarrow}} f$ et $Df = g$.
On en déduit que si K est un compact inclut dans un ouvert U d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors $(\mathcal{C}^1(K,F), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^1})$ est un espace de Banach où $\mathcal{C}^1(K,F) = \{f = \widetilde{f}_{|K}$ où $\widetilde{f} \in \mathcal{C}^1(U,F)$ et $K \subset U$ ouvert$\}$ et $\|f\|_{\mathcal{C}^1} = \|f\|_\infty + \sup\limits_{x\in K} \|\!|Df(x)|\!\|$.

2 Différentielles d'ordre supérieur

2.1 Définitions et théorème de Schwarz

Si f est de classe $\mathcal{D}^1(U,F)$, alors on a $Df : U \to \mathcal{L}^c(E,F)$. Si on suppose de plus Df différentiable en $a \in U$, on a $D(Df)(a) : U \to \mathcal{L}^c(E, \mathcal{L}^c(E,F))$.

Remarque : On a un isomorphisme isométrique

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}^c(E,\mathcal{L}^c(E,F)) & \cong & \mathrm{Bil}^c(E\times E, F) \\ L & \longmapsto & ((u,v) \mapsto (L(u))(v)) \\ (u \mapsto B(u,\cdot)) & \longleftarrow & B \end{array}.$$

Définition :

— $f : U \to F$ est 2 fois différentiable en a si $f \in \mathcal{D}^1$ sur un voisinage V de a et $Df : V \to \mathcal{L}^c(E,F)$ est aussi différentiable en a.
On note alors $D^2f(a) \in \mathrm{Bil}^c(E\times E,F)$ correspondant à $D(Df)(a)$ par l'isométrie précédente.

— De même pour f est n fois différentiable, noté $f \in \mathcal{D}^n$ (resp. de classe $\mathcal{C}^n$) en a si Df est $n-1$ différentiable en a (resp. $Df \in \mathcal{C}^{n-1}$).
On vérifie $\left(D^k\left(D^{n-k}f\right)(a)\cdot(h_1,\dots,h_k)\right)\cdot(h_{k+1},\dots,h_n) = D^nf(a)\cdot(h_1,\dots,h_n)$.

— On pose $\mathcal{C}^\infty = \bigcap\limits_{n\geqslant 0} \mathcal{C}^n = \bigcap\limits_{n\geqslant 0} \mathcal{D}^n$.

Exemples

— Soit $L \in \mathcal{L}^c(E,F)$ et $f = L_{|U}$. $Df = \left\{ \begin{array}{ccc} U & \to & \mathcal{L}^c(E,F) \\ x & \mapsto & L \end{array} \right.$ est constante, donc $D^2 f = 0$. En particulier f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

— Soit b une application bilinéaire continue de E dans F, $q(x) = b(x,x)$ et $f = q_{|U}$. On a $Df : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \to & \mathcal{L}^c(E,F) \\ x & \mapsto & b(x,\cdot) + b(\cdot,x) \end{array} \right.$. Donc $Df = L_{|U}$ avec $L : h \mapsto b(h,\cdot) + b(\cdot,h) \in \mathcal{L}^c(E,F)$. Donc $D(Df)(x) = L$ et

$$D^2 f(x) \cdot (h,k) = (D(Df)(x) \cdot h) \cdot k = (L(h))(k) = b(h,k) + b(k,h).$$

Expression en coordonnées si $E \cong \mathbb{R}^n$

Soit $p \in U$, g différentiable en p,

$$Dg(p) \cdot e_i = \frac{\partial g}{\partial x_i}(p) = \lim_{n \to +\infty} \frac{g(p + \frac{e_i}{n}) - g(p)}{1/n}.$$

Pour f deux fois différentiable en p on a

$$D(Df)(p) \cdot e_i = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{Df\left(p + \frac{e_i}{n}\right) - Df(p)}{1/n} \right).$$

Donc

$$\begin{aligned} (D\left(Df\right) \cdot e_i) \cdot e_j &= \left(\lim_{n \to +\infty} n \left(Df\left(p + \frac{e_i}{n}\right) - Df(p) \right) \right) \cdot e_j \\ &= \lim_{n \to +\infty} (T_n \cdot e_j) \end{aligned}$$

Ainsi $D((Df)(p) \cdot e_i) \cdot e_j = \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (x \mapsto Df(x) \cdot e_i)$, et donc $D^2 f(p) \cdot (e_i, e_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)$.

Plus généralement $D^k f(p) \cdot (e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(p)$.

Théorème (Schwarz)
Si f est 2 fois différentiable en a alors $D^2 f(a)$ est symétrique.

Corollaire
Si f est n fois différentiable en a alors $D^n f(a)$ est symétrique

Démonstration : Par récurrence sur $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} D^{n+1} f(a) \cdot (h_1, \dots, h_n) &= D((D^n f)(a) \cdot h_1) \cdot (h_2, \dots, h_{n+1}) \\ &= D^2((D^{n-1} f)(a) \cdot (h_1, h_2)) \cdot (h_3, \dots, h_{n+1}) \end{aligned}$$

Donc $D^{n+1} f(a)$ est invariant sous l'action de $\langle (1,2), \mathfrak{S}(\llbracket 2, n+1 \rrbracket) \rangle = \mathfrak{S}_{n+1}$ ■