DM distribué le vendredi 5 octobre à rendre pour le vendredi 12 octobre

S. Allais, L. Poyeton

On veillera à soigner la rédaction en apportant des preuves précises. On utilisera, sans démonstration, les résultats de l'exercice 2 du TD 2.

Exercice 1 - (biholomorphismes) :
Un biholomorphisme d'un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ vers un ouvert $V \subset \mathbb{C}$ est un holomorphisme bijectif $h : U \to V$ d'inverse holomorphe. On notera $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| < 1\}$ le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$.

1. On considère la fonction définie sur le disque unité ouvert complexe :
   $T_w : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ tel que $T_w(z) = \frac{w-z}{1-\bar{w}z}$, où $w \in \mathbb{D}$.
   (a) Montrer que T_w est un holomorphisme à valeurs dans $\mathbb{D}$
   (b) Montrer que $T_w \circ T_w$ est l'identité, en déduire que T_w est un biholomorphisme du disque (sous-entendu vers lui-même) échangeant 0 et w.
   (c) Montrer que le groupe des biholomorphismes du disque est transitif.
2. On considère à présent la fonction $h : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ telle que $h(z) = \frac{z-i}{z+i}$ pour $z \in \mathbb{H}$.
   (a) Montrer que h réalise un biholomorphisme de $\mathbb{H}$ vers $\mathbb{D}$.
   (b) En utilisant la dernière question de l'exercice 2 du TD 2, montrer que le groupe des biholomorphismes de $\mathbb{H}$ admet un sous-groupe isomorphe à $PSL_2(\mathbb{R})$.
   (c) En considérant la conjugaison $f \mapsto h \circ f \circ h^{-1}$, montrer que le groupe des biholomorphismes de $\mathbb{D}$ contient un sous-groupe isomorphe à $PSL_2(\mathbb{R})$. On déduira de la démonstration l'isomorphisme de groupe suivant :

$$PSL_2(\mathbb{R}) \simeq PSU_{1,1}(\mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \text{ de déterminant 1 avec } a, b \in \mathbb{C} \right\} \Big/ \mathbb{C}^* \mathrm{Id}$$

Exercice 2 - (Intégrales de Fresnel) :
Après avoir justifié leurs existences, calculer les intégrales suivantes au moyen de la formule de Cauchy :

$$\int_0^\infty \cos\left(t^2\right) \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \sin\left(t^2\right) \mathrm{d}t.$$

On veillera à justifier chaque étape du calcul.
Indication : On aura recourt à la formule de Gauss (qu'on ne demande pas de démontrer) : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.