Séries entières - Fonctions holomorphes - Logarithme Complexe

S. Allais, L. Poyeton

1 Séries entières

Exercice 1 - (Intégrité) :
Soient f et g deux fonctions analytiques dont le produit est nul. Montrer que l'une des deux fonctions est nulle.

Exercice 2 - (Un exemple d'utilisation en dénombrement) :
Notons C_n le nombre de partitions de $\{1 \cdots n\}$ (avec la convention $C_0 = 1$). Soit $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C_n}{n!} z^n$, appelée *série génératrice exponentielle* de $(C_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

1. Montrer que S est solution d'une équation différentielle. (On pensera d'abord à montrer que son rayon de convergence est non nul)
2. En déduire C_n.

Exercice 3 - (Fractions rationnelles) :
Soit f une fraction rationnelle.

1. Montrer que f est développable en série entière hors des pôles sur un rayon de convergence à définir.
2. Trouver alors le développement en série entière de f.

2 Fonctions holomorphes

Exercice 4 - (Exemples et contre-exemples) :
Les fonctions suivantes sont-elles holomorphes sur les ouverts de $\mathbf{C}$ où elles sont définies ?

1. $z \mapsto |z|$,
2. $z \mapsto \text{Ré}(z)$,
3. $z \mapsto \overline{f(\bar{z})}$ où f est holomorphe.

Exercice 5 - (Conformité des fonctions holomorphes) :

1. Soit $f : U \to \mathbf{C}$ une fonction différentiable sur un ouvert $U \subset \mathbf{C}$. Montrer que f est holomorphe sur U si, et seulement si, pour tout couple de courbes différentiables $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to U$ s'intersectant au temps $t = \frac{1}{2}$, l'angle orienté d'intersection des deux courbes vaut l'angle orienté de l'intersection des courbes $f \circ \gamma_1$ et $f \circ \gamma_2$ au temps $t = \frac{1}{2}$.
2. Soit $u \in \mathbf{R}$, en considérant la fonction cosinus complexe $\cos : z \mapsto \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, montrer que l'ellipse $\mathcal{E}_u : \left(\frac{x}{\cosh(u)}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sinh(u)}\right)^2 = 1$ intersecte orthogonalement la famille d'hyperboles $\mathcal{H}_v : \left(\frac{x}{\cos(v)}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sin(v)}\right)^2 = 1$.

3 Logarithme complexe

Exercice 6 - (Les malheurs du logarithme complexe) :
Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbf{C}^*$. Un *logarithme* sur Ω est une fonction continue $f : \Omega \in \mathbf{C}$ vérifiant $\exp \circ f(z) = z$ sur Ω.

1. Montrer qu'il n'existe pas de fonction logarithme sur le cercle unité.
2. Quel est le lien entre différents logarithmes sur un ouvert connexe donné ?
3. Montrer que tout logarithme f est holomorphe de dérivée $f'(z) = 1/z$.
   Réciproquement, montrer que tout fonction holomorphe sur un ouvert Ω connexe, de dérivée $1/z$ est un logarithme à constante additive près.
4. Montrer que l'on peut définir une fonction logarithme sur $\mathbf{C}$ privé d'une demi-droite partant de 0 quelconque.
5. On appelle alors *Détermination principale du logarithme*, la branche définie sur $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$ s'annulant au point 1 et on la note Log.
   — Que vaut alors $\mathrm{Log}(re^{i\theta})$?
   — Montrer que Log est DSE autour de 1 et que
   $$\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}$$
   — Déterminer $\Omega' = \mathrm{Log}(\Omega)$ et dessiner l'image par l'exponentielle du quadrillage en lignes verticales et horizontales de Ω'.
6. Soit f une fonction holomorphe sur un disque D qui ne s'annule pas. Montrer qu'elle admet un relèvement, i.e. qu'il existe g une fonction holomorphe sur D telle que $f = \exp(g)$
7. Montrer qu'il n'existe pas de fonction f holomorphe sur $\mathbf{C}$ qui vérifie $f \circ f = \exp$. (on pourra montrer que cette fonction admet un relèvement)