Résidus et applications à l'étude des fonctions de la variable complexe

S. Allais, L. Poyeton

Exercice 1 (La fonction Gamma)**.** On définit la fonction Γ par

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$$

1. Quel est *a priori* le domaine de définition $\mathcal{D}$ de Γ ? Est-elle holomorphe sur ce domaine ?
2. Montrer que $\forall z \in \mathcal{D}, \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
3. En déduire un prolongement analytique de Γ sur tout $\mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}_-$.
4. Donner le résidu de Γ en les entiers négatifs.

Exercice 2.

1. Calculer pour tout $\xi \in \mathbf{R}$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ix\xi}}{1+x^2} \mathrm{d}x.$$
2. Calculer
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+x+1} \mathrm{d}x.$$
3. Montrer que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\pi.$$
4. Montrer que pour $a > 0$,
$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+a^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2a} \log a.$$
5. Montrer que pour $0 < \alpha < 1$,
$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}.$$

Exercice 3.

1. Soient U un voisinage ouvert de 0 et $g : U \longrightarrow \mathbf{C}$ holomorphe non nulle en 0. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert V de 0 contenu dans U tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe $h_n : V \longrightarrow \mathbf{C}$ holomorphe vérifiant
$$\forall z \in V, \quad g(z) = (h_n(z))^n.$$
2. Montrer que toute fonction entière injective est de la forme $f(z) = az+b$ avec $a, b \in \mathbf{C}$ et $a \neq 0$.
Indication : Considérer $f(\frac{1}{z})$.

Exercice 4 (Théorème de Brouwer, version holomorphe)**.** Soit F une fonction holomorphe sur un ouvert $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ contenant $\overline{\Delta(0,1)}$, telle que $F(\overline{\Delta(0,1)}) \subseteq \overline{\Delta(0,1)}$. Montrer que F admet un point fixe.

Indication : on pourra appliquer le théorème de Rouché avec $f(z) = -2z$ et $g(z) = F(z) - z$.

Exercice 5. Pour $a \in \mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{N}^*$, montrer que, dans le disque unité, l'équation $az^n = e^z$ a n solutions si $|a| > e$ et aucune solution si $|a|e < 1$.

Exercice 6 (Prolongement méromorphe de la fonction ζ à $\mathbb{C}$)**.** On définit les nombres de Bernoulli B_n par l'identité :

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

valable sur un voisinage épointé de 0.

1. Montrer que pour tout $n \geq 3$ impair, on a $B_n = 0$.
2. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{B_n}{n!} z^n$?
3. Montrer que la série
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} \frac{1}{z + 2n - 1}$$
converge localement normalement uniformément sur $\mathbb{C} \setminus \{-1, -3, -5, \ldots\}$.
4. Montrer que pour tout z tel que $\Re\text{é}\,(z) > 2$, on peut écrire
$$\int_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} \mathrm{d}t = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} \frac{1}{z + 2n - 1}.$$
5. On rappelle que la fonction Γ est définie sur $\{z \in \mathbf{C} \,|\, \Re\text{é}\,(z) > 0\}$ par
$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$
et que la fonction ζ est définie sur $\{z \in \mathbf{C} \,|\, \Re\text{é}\,(z) > 1\}$ par
$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} t^{-z} \mathrm{d}t.$$
Montrer que pour $s > 1$, on a
$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} \mathrm{d}t.$$
6. Déduire de 4. et 5. que la fonction ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec un seul pôle simple en 1, et que l'on a $\zeta(0) = -1/2$ et $\zeta(-2k) = 0$ si $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 1$.