

Géométrie euclidienne

Exercice 1 (Bissectrices, Berger T. 2 sect. 8.7). Montrer que l'équation $2x = a$ d'inconnue x a exactement deux solutions dans le groupes des angles orientés de droites (resp. demi-droites). Utiliser ce fait pour définir les bissectrices d'un angle orienté de droites (resp. demi-droites).

Exercice 2 (Audin, pp. 83–84). Soient A, B et C trois points distincts sur un cercle de centre O dans un plan affine euclidien.

1. Montrer qu'on a l'égalité d'angles orientés de demi-droites $\widehat{(\vec{OA}, \vec{OB})} = 2\widehat{(\vec{CA}, \vec{CB})}$.
2. En déduire que l'angle orienté de droites $\widehat{((CA), (CB))}$ ne dépend pas de C .
3. On note \mathcal{D} la tangente au cercle en B , montrer que $\widehat{(\vec{OA}, \vec{OB})} = 2\widehat{((AB), \mathcal{D})}$. En quoi ce résultat est-il le cas limite de la question précédente ?

Exercice 3 (Audin, p. 85). Soient A, B et C trois points non alignés d'un plan affine euclidien.

1. Montrer qu'il existe un unique cercle \mathcal{C} passant par A, B et C et expliquer comment construire son centre O .
2. Montrer que $D \in \mathcal{C}$ si et seulement si $\widehat{((CA), (CB))} = \widehat{((DA), (DB))}$.
3. On identifie le plan à \mathbb{C} par le choix d'une base orthonormée. Traduire le critère de cocyclicité précédent en termes des affixes a, b, c et d des points A, B, C et D .

Exercice 4 (Angles et similitudes affines). Soient \mathcal{E} un espace affine euclidien de dimension au moins 2 et $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$. On dit que f préserve les angles orientés (resp. non-orientés) de demi-droites, si pour tout $A, B, C \in \mathcal{E}$ avec $B \neq A \neq C$ on a

$$\widehat{(f(A)f(B), f(A)f(C))} = \widehat{(AB, AC)}.$$

1. Montrer que $f \in \text{Sim}(\mathcal{E})$ si et seulement si f préserve les angles non-orientés de demi-droites.
2. Si $\dim(\mathcal{E}) = 2$, montrer que $f \in \text{Sim}^+(\mathcal{E})$ si et seulement si f préserve les angles orientés de demi-droites.

Exercice 5. Montrer que les hauteurs (resp. bissectrices, resp. médiatrices, resp. médianes) d'un triangle sont concourantes.

Exercice 6 (Constructions à la règle et au compas). Soit \mathcal{E} un plan affine euclidien.

1. Soient \mathcal{D} une droite de \mathcal{E} et $A \in \mathcal{E}$, construire à la règle et au compas la perpendiculaire à \mathcal{D} passant par A .
2. Même question avec la parallèle à \mathcal{D} passant par A .
3. Soient $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ et \mathcal{D}_3 trois droites parallèles de \mathcal{E} . Construire à la règle et au compas trois points A, B, C tels que $A \in \mathcal{D}_1, B \in \mathcal{D}_2, C \in \mathcal{D}_3$ et ABC est équilatéral.

Exercice 7 (Cercle et droite d'Euler, Eiden pp. 30 et 224). Soit ABC un vrai triangle du plan euclidien, on note :

- G le centre de gravité de ABC ,
- H l'orthocentre de ABC ,
- O le centre du cercle circonscrit à ABC ,

- A' , B' et C' les symétriques respectifs par rapport à O des points A , B et C ,
 - M_A , M_B et M_C les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$,
 - H_A , H_B et H_C les pieds des hauteurs issues de A , B et C respectivement,
 - H'_A , H'_B et H'_C les symétriques H par rapport à $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ respectivement.
 - P_A , P_B et P_C les milieux respectifs de $[AH]$, $[BH]$ et $[CH]$.
1. Soit h l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$, montrer que l'image de ABC par h est $M_A M_B M_C$. On note Γ le cercle circonscrit à $M_A M_B M_C$
 2. Montrer que $h(H) = O$. On note $\Omega := h(O)$. Montrer que Ω est le centre de Γ .
 3. Montrer que $\overrightarrow{\Omega H} = -\overrightarrow{\Omega O}$. En déduire que O, G, Ω et H sont alignés dans cet ordre.
 4. Soit h' l'homothétie de centre H et de rapport 2, montrer que $h'(\Omega) = O$ et $h'(\Gamma)$ est le cercle circonscrit à ABC .
Indication : quelle est la nature de $h' \circ h$?
 5. Montrer que G est le centre de gravité des triangles AHA' , BHB' et CHC' . En déduire que M_A , M_B et M_C sont les milieux respectifs des segments $[A'H]$, $[B'H]$ et $[C'H]$.
 6. Montrer que H'_A , H'_B et H'_C appartiennent au cercle circonscrit à ABC .
Indication : considérer le triangle $HA'H_A$.
 7. En déduire que H_A , H_B et $H_C \in \Gamma$.
 8. Montrer que P_A , P_B et $P_C \in \Gamma$.

Exercice 8. Soit \mathcal{D} une droite d'un plan affine euclidien, A et B deux points hors de \mathcal{D} et dans le même demi-plan. Construire $M \in \mathcal{D}$ tel que $d(M, A) + d(M, B)$ soit minimal.

Exercice 9 (Point de Fermat, Fresnel pp. 212–214). Soient ABC un triangle non dégénéré d'un plan affine euclidien et $f : M \mapsto d(M, A) + d(M, B) + d(M, C)$.

1. Montrer que f admet un unique minimum, en un point M situé dans l'enveloppe convexe des sommets.
2. Si $M \notin \{A, B, C\}$, montrer que les angles orientés $(\widehat{MA, MB})$, $(\widehat{MB, MC})$, $(\widehat{MC, MB})$ sont égaux. En déduire que leur mesure est congrue à $\pm \frac{2\pi}{3}$ après un choix d'orientation du plan.

Exercice 10 (Trajectoires de lumières, Berger 9.4). Soit P un polygone convexe de sommets a_1, \dots, a_n . Un polygone de lumière de P est un polygone de sommets $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tel que, pour $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,

- (i) $\alpha_i \in]a_i, a_{i+1}[$,
- (ii) $(a_i \alpha_{i+1})$ est la bissectrice extérieure de l'angle $\alpha_{i-1} \widehat{\alpha_i} \alpha_{i+1}$.

Soient les droites $D_i := (\alpha_i \alpha_{i+1})$, $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Supposons que P admette un tel polygone de lumière. En considérant les réflexions s_{D_i} , montrer que

1. si n est impair, P admet un unique polygone de lumière,
2. si n est pair, nous avons dans le groupe des angles orientés de droites

$$\sum_{i=1}^{n/2} (D_{2i-1}, D_{2i}) = 0.$$

Il existe des réciproques à ces propriétés (cf. Berger 9.4.2.1).

Nombres complexes

On identifie le plan euclidien à \mathbb{C} au moyen d'un repère euclidien.

Exercice 11 (Trigonométrie). Vérifier que vous savez redémontrer les formules de trigonométrie usuelles :

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b), \\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a), \\ &\dots\end{aligned}$$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(3x) = 4\cos(x)^3 - 3\cos(x)$.

Exercice 12 (Équations en complexes). Déterminer la nature géométrique des ensembles suivants :

- $\{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} = 4\}$,
- $\{z \in \mathbb{C} \mid z + \bar{z} = 1\}$,
- $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| = |z + i|\}$,
- $\{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z - i) = \frac{\pi}{4}\}$,
- $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \mid \Re\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = 0\}$,
- $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z\overline{(b-a)}) = \frac{|b|^2 - |a|^2}{2}\}$.

Exercice 13 (Angle moitié et angle au centre). Soient α et $\theta \in \mathbb{R}$, calculer l'argument de $\frac{e^{i\theta} - e^{i\alpha}}{e^{i\theta} - 1}$. En déduire le théorème de l'angle au centre.

Exercice 14 (Caractérisations des triangles équilatéraux). Soient A, B et C des points d'affixes a, b et c .

- Montrer que ABC est un triangle équilatéral centré en l'origine si, et seulement si, il existe un complexe $u \in \mathbb{C}$ tel que a, b et c soient les racines de $X^3 - u$.
- Montrer que le triangle ABC est équilatéral si, et seulement si, l'une des conditions équivalentes suivantes est remplie :
 - $a + bj + cj^2 = 0$ ou $a + bj^2 + cj = 0$, où $j := e^{\frac{2i\pi}{3}}$,
 - $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$,
 - $\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} = 0$.

Exercice 15. Soit \mathcal{H} l'hyperbole définie par $y = \frac{1}{x}$. Soient $A \in \mathcal{H}$ d'affixe $\omega \in \mathbb{C}$ et $B \in \mathcal{H}$ son symétrique par l'origine, d'affixe $-\omega \in \mathbb{C}$. Soit \mathcal{C} le cercle de centre A contenant B . Montrer que $\mathcal{C} \cap \mathcal{H} = \{B, M_1, M_2, M_3\}$ possède quatre points tels que $M_1M_2M_3$ est un triangle équilatéral. *Indication : On appliquera la question 1 de l'exercice 14 aux affixes des M_i translatés de $-\omega$.*

Exercice 16 (Théorème de Gauss-Lucas). Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, montrer que les racines de P' appartiennent à l'enveloppe convexe des racines de P .