Coniques et quadriques affines et euclidiennes

Lorsqu'il est question d'espace affine, on se placera sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2.

Coniques euclidiennes

Exercice 1 (Mécanique céleste)**.** On étudie les solutions de l'équation différentielle

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{GM}{\|\vec{r}\|^2}\vec{e}_r, \tag{1}$$

où $\vec{r} : I \to \mathbb{R}^3 \setminus 0$, avec $I \subset \mathbb{R}$ l'intervalle maximal contenant 0, $G, M > 0$ (constante de la gravitation universelle et masse de l'astre massif) et $\vec{e}_r := \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$. Dans le cas où la vitesse initiale est proportionnelle à $\vec{e}_r$, la solution explose en temps fini avec $\vec{r} \to 0$, on suppose donc que $\dot{\vec{r}}(0)$ n'est pas colinéaire à $\vec{r}(0)$.

1. Soit $\vec{L} := \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}} : I \to \mathbb{R}^3$ (moment cinétique de la particule). Montrer que $\vec{L}$ est un vecteur constant non nul. En déduire que $\vec{r}$ demeure dans un plan vectoriel fixe.

   Quitte à changer de base, on suppose donc $\vec{r} : I \to \mathbb{R}^2 \times \{0\} \setminus 0$ et on note $\vec{e}_\theta : I \to S^1$ la famille de vecteurs unitaires telle que $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est orthonormée directe et $\vec{e}_z := (0, 0, 1)$.
2. Montrer que $\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et que $\vec{L} = \|\vec{r}\|^2\dot{\theta}\vec{e}_z$.
3. On définit le *vecteur excentricité* comme le vecteur (*a priori* dépendant du temps)

$$\vec{e} := \frac{\dot{\vec{r}} \wedge \vec{L}}{GM} - \vec{e}_r.$$

   Montrer que $\vec{e}$ est constant, on l'identifie donc à un vecteur $\vec{e} \in \mathbb{R}^2$.
4. En considérant $\vec{r} \cdot \vec{e}$, montrer que la trajectoire suivie par $\vec{r}$ est celle de la paramétrisation focale d'une conique de foyer l'origine dont on donnera l'excentricité et la directrice. Quel est I ?

Exercice 2 (Équivalence à la définition bifocale [Berger 17.2.2])**.** Soit $\mathcal{C}$ une conique d'excentricité $e \notin \{0, 1\}$ de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$.

1. En utilisant le centre de $\mathcal{C}$, montrer que $\mathcal{C}$ admet un second (et un seul second) couple foyer-directrice $(F', \mathcal{D}')$ dont on précisera la construction. On vérifiera en particulier que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles.
2. En utilisant la distance d'un point aux directrices, montrer que tout $M \in \mathcal{C}$ satisfait $MF + MF' = 2a$ si $\mathcal{C}$ est une ellipse et $|MF - MF'| = 2a$ sinon (on reprend ici une notation traditionnelle : $a > 0$ est le demi-grand axe).
3. On suppose que $\mathcal{C}$ est une ellipse. Soit M un point vérifiant $MF + MF' = 2a$, on veut montrer que $M \in \mathcal{C}$. On se place dans le système de coordonnées normales (*i.e.* où $\mathcal{C} : x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ et $F = (c, 0)$).
   (a) Exprimer $MF^2 - (MF')^2$ en fonction des coordonnées (x, y) de M. En déduire l'expression de MF et MF' en fonction de x.
   (b) Exprimer $MF^2 + (MF')^2$ en fonction de (x, y), conclure.
4. Démontrer l'analogue pour $\mathcal{C}$ une hyperbole.

Exercice 3 (Lumière issue d'un foyer et applications)**.**

1. Soit $\mathcal{P}$ une parabole de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$.
   (a) Montrer que les tangentes à $\mathcal{P}$ coïncident avec les médiatrices des segments $[MF]$ pour $M \in \mathcal{D}$.
   (b) En déduire que les trajectoires de lumières de direction $\vec{\mathcal{D}}^{\perp}$ se reflètent, à l'intersection de $\mathcal{P}$, en trajectoires issues ou rencontrant vers F.
2. Soit $\mathcal{C}$ une ellipse de foyers F_- et F_+.
   (a) En différentiant les fonctions $M \mapsto MF_- + MF_+$, montrer qu'une trajectoire de lumière issue du point F_- se reflète sur $\mathcal{C}$ en une trajectoire rencontrant F_+.
   (b) En déduire que le lieu des points obtenu en prenant les symétries orthogonales de F_- par les tangentes de $\mathcal{C}$ est un cercle centré en F_+ dont on précisera le rayon.
   (c) Montrer inversement que le lieu des points équidistants d'un cercle de centre F' et d'un point F intérieur au cercle est une ellipse dont on précisera les éléments caractéristiques.
   (d) Montrer que le lieu des projections orthogonales des foyers de $\mathcal{C}$ sur ses tangentes est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
   (e) Quels sont les analogues des résultats précédents pour les hyperboles ?
3. Déduire des questions précédentes une construction des tangentes à une conique passant par un point M du plan, connaissant la position du foyer et de la directrice dans le cas de la parabole et connaissant la position des deux foyers dans le cas contraire.

Exercice 4 (Courbes orthoptiques)**.** Étant donnée une courbe lisse $\mathcal{C}$ du plan euclidien, la courbe orthoptique de $\mathcal{C}$ est le lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes à $\mathcal{C}$ perpendiculaires entre elles (autrement dit, le lieu des points d'où l'on « voit » la courbe sous un angle droit).

1. Montrer que la courbe orthoptique d'une parabole est sa directrice.
2. En exploitant les résultats de l'exercice , montrer que la courbe orthoptique d'une ellipse est un cercle dont on précisera les caractéristiques.

Exercice 5. Soit une conique propre $\mathcal{C}$ de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$.

1. Étant donné un triangle ABC et un point $I \in (BC)$, montrer que (AI) est une bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ si, et seulement si, $\frac{CA}{IA} = \frac{CB}{IB}$.
   Indication : on pourra appliquer la loi des sinus dans les triangles ACI et BCI.
2. Soit $I \in \mathcal{D}$ et $M \in \mathcal{C}$ de sorte que (IM) intersecte $\mathcal{C}$ en un second point N.
   (a) En passant par les distances à la directrice, montrer que $\frac{IM}{IN} = \frac{FM}{FN}$.
   (b) En déduire que (FI) est la bissectrice intérieure de $\widehat{MFN}$ si M et N sont sur des composantes connexes de $\mathcal{C}$ distinctes, extérieure sinon.
3. Soient $I \in \mathcal{D}$ et $T, T' \in \mathcal{C}$ les points de contact des deux tangentes à $\mathcal{C}$ issues de I. Montrer que (TT') passe par F et est perpendiculaire à (FI).
4. En déduire une construction de la directrice $\mathcal{D}$ connaissant la position de trois points de $\mathcal{C}$ et du foyer F.

Coordonnées barycentriques

Exercice 6 (Généralités)**.** Soit $\mathcal{C}$ une conique d'un plan affine. On fixe une base affine (A, B, C). Montrer qu'il existe des coordonnées homogènes $(a : b : c : d : e : f)$ (uniques si l'on identifie $\mathcal{C}$ à la forme quadratique dont elle est l'ensemble annulateur) déterminées par $\mathcal{C}$ telles que tout point de coordonnées barycentriques $(\alpha : \beta : \gamma)$

$$(\alpha : \beta : \gamma) \in \mathcal{C} \quad \Leftrightarrow \quad a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2d\alpha\beta + 2e\beta\gamma + 2f\gamma\alpha = 0$$

On appelle $(a : b : c : d : e : f)$ les coordonnées homogènes de la conique $\mathcal{C}$. À quelle condition sur les coordonnées homogènes, la conique $\mathcal{C}$ est-elle dégénérée ?

Exercice 7 (Tangentes et unicité de l'ellipse de Steiner)**.** Soit (A, B, C) une base affine du plan et $\mathcal{C}$ une conique de coordonnées homogènes $(a : b : c : d : e : f)$.

1. Soit $M(\alpha_0 : \beta_0 : \gamma_0)$ un point de $\mathcal{C}$. Montrer que la droite affine de coordonnées homogènes
$$(a\alpha_0 + d\beta_0 + f\gamma_0 : b\beta_0 + e\gamma_0 + d\alpha_0 : c\gamma_0 + f\alpha_0 + e\beta_0)$$
ou bien intersecte $\mathcal{C}$ en M uniquement, ou bien est incluse dans $\mathcal{C}$. Montrer qu'elle correspond à la tangente en $\mathcal{C}$ au sens de la géométrie différentielle lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On appelle cette droite la tangente à $\mathcal{C}$ au point M.
2. En déduire qu'il existe une unique conique tangente en les milieux des côtés du triangle ABC, celle-ci étant une ellipse lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Exercice 8 (Combien de points pour déterminer une conique)**.** Soit (A, B, C) une base affine du plan.

1. Montrer qu'une conique $\mathcal{C}$ du plan passe par A, B et C si, et seulement si, ses coordonnées homogènes ont la forme $(0 : 0 : 0 : d : e : f)$.
2. En déduire qu'une conique possédant trois points alignés distincts est une union de deux droites (éventuellement confondue, on parle alors de droite double) et que, autrement, celle-ci est propre.
3. Montrer qu'il existe une unique conique propre passant par un quintuplet de points dont aucun sous-triplet n'est aligné.
4. Montrer le théorème de Carnot : étant donnés trois couples de points (P, P'), (Q, Q') et (R, R') situés respectivement sur les droites (BC), (CA) et (AB) et distincts des sommets, il existe une unique conique contenant ces six points si, et seulement si,
$$\left(\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} \times \frac{\overline{P'C}}{\overline{P'B}}\right) \times \left(\frac{\overline{QA}}{\overline{QC}} \times \frac{\overline{Q'A}}{\overline{Q'C}}\right) \times \left(\frac{\overline{RB}}{\overline{RA}} \times \frac{\overline{R'B}}{\overline{R'A}}\right) = 1$$

Quadriques

Exercice 9 (Classification des quadriques euclidiennes)**.** Soit $\mathcal{Q}$ une quadrique d'un espace affine euclidien de dimension n, elle se définit dans un repère euclidien par l'équation

$$F(x) := (x|Ax) + (b|x) + c = 0,$$

où $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$ définissent la fonction polynomiale $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On dit qu'une quadrique est centrée en Ω si $b = 0$ lorsque l'on choisit un repère euclidien centré en Ω (pourquoi cela ne dépend-il pas du choix de la base vectorielle ?). La notion de quadrique centrée est affine (pourquoi ?).

1. Un repère euclidien étant fixé, montrer que la quadrique $\mathcal{Q}$ est centrée si, et seulement si, le gradient $\nabla F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ s'annule, le centre pouvant alors être pris en tout point d'annulation (le centre n'est pas unique en général).
2. Montrer qu'une quadrique $\mathcal{Q}$ est centrée si, et seulement si, elle admet un repère euclidien tel que son équation soit
$$\sum_{i=1}^{r} \frac{x_i^2}{a_i^2} - \sum_{i=1}^{s} \frac{x_{r+i}^2}{{a'_i}^2} = \delta,$$
où $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_r$, $0 < a'_1 \leqslant a'_2 \leqslant \cdots \leqslant a'_s$ et $\delta \in \{0, 1\}$. Montrer que (r, s) et δ sont des invariants affines, contrairement aux a_i et a'_i. En dimension $n = 3$, interpréter géométriquement les valeurs a_i et classifier les quadriques euclidiennes centrées.
3. Montrer que si la quadrique $\mathcal{Q}$ n'est pas centrée, il existe un repère euclidien tel que l'équation de $\mathcal{Q}$ soit
$$\sum_{i=1}^{r} \frac{x_i^2}{a_i^2} - \sum_{i=1}^{s} \frac{x_{r+i}^2}{{a'_i}^2} = x_n,$$
où $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_r$, $0 < a'_1 \leqslant a'_2 \leqslant \cdots \leqslant a'_s$ et $r + s < n$. En déduire que les quadriques non centrées de $\mathbb{R}^n$ sont homéomorphes à $\mathbb{R}^{n-1}$.
4. En déduire la classification des quadriques euclidiennes réelles. On précisera en particulier quelles quadriques sont ou non dégénérées.

Remarque. L'exercice précédent donne une méthode pour donner la forme normale et donc les éléments caractéristiques (r, s), δ et les a_i et a'_i associés à une quadrique euclidienne $\mathcal{Q}$ donnée par une équation quelconque $F(x) = 0$ (*i.e.* trouver un repère euclidien dans lequel $\mathcal{Q}$ s'écrit comme dans les questions 2. et 3.). À savoir, si la quadrique est centrée, trouver $\omega \in \mathbb{R}^n$ tel que $\nabla F(\omega) = 0$, faire le changement de coordonnées $X = x - \omega$, cela éliminera la partie linéaire de l'équation et il ne « restera » qu'à diagonaliser la forme quadratique en base orthonormée. Si la quadrique n'est pas centrée, prendre des coordonnées euclidiennes telles que $X_n := (b|x) + c$. La partie quadratique ne dépendra plus de X_n et il restera à diagonaliser celle-ci dans $\mathbb{R}^{n-1}$ en base orthonormée.

Exercice 10 (Détermination de quadriques)**.** Déterminer nature (et éléments caractéristiques pour au moins trois d'entre elles prises au hasard) des quadriques d'équations suivantes dans $\mathbb{R}^3$:

1. $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 4x + 4y - 1 = 0$,
2. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 1 = 0$,
3. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 3x - y + z + 1 = 0$,
4. $x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 4xy - 2x + 4y = 0$,
5. $x^2 - 4x - 3y - 2 = 0$,
6. $xy + yz = 1$,
7. $xy + yz + zx + 2y + 1 = 0$.

Exercice 11 (Interprétation géométrique de l'orthogonal suivant une forme quadratique)**.** Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique non dégénérée de forme bilinéaire associée $b : E \times E \to \mathbb{R}$. On rappelle que l'orthogonal $A^{\perp_q}$ d'une partie $A \subset E$ suivant la forme quadratique q est le sous-espace vectoriel
$$A^{\perp} := \{u \in E \mid b(u, a) = 0, \ \forall a \in A\}.$$
Soient les deux quadriques $\mathcal{Q}_{\pm} := q^{-1}\{\pm 1\}$ et $\mathcal{C} := q^{-1}\{0\}$ le cône isotrope de q.

1. Soit $D \subset E$ une droite vectorielle, D est isotrope si, et seulement si, $D \subset \mathcal{C}$. Autrement, montrer que D intersecte ou bien $\mathcal{Q}_-$ ou bien $\mathcal{Q}_+$ en deux points exactement.
2. Soit $u \in D \backslash 0$ de sorte que $u \in \mathcal{C}$ ou bien $u \in \mathcal{Q}_-$ ou bien $u \in \mathcal{Q}_+$. En notant $M \in \{\mathcal{Q}_\pm, \mathcal{C}\}$ celui des ensembles auquel appartient u, Montrer que $D^\perp = T_u M$ l'hyperplan tangent en M au point u.

Exercice 12 (Quadriques réglées)**.** Une surface de $\mathbb{R}^3$ est dite *réglée* si elle est union de droites affines. Déterminer les quadriques réglées.