Correction du DM 1

S. Allais, L. Poyeton

Exercice 1 - (biholomorphismes) :

1. (a) Les fonctions $z \mapsto w - z$ et $z \mapsto 1 - \bar{w}z$ étant holomorphes et la seconde ne s'annulant pas sur $\mathbb{D}$ car $|\bar{w}^{-1}| = |w|^{-1} > 1$, le quotient de ces deux fonctions est holomorphe sur $\mathbb{D}$.
Soit $z \in \mathbb{D}$, nous avons $|w| < 1$ et $|z| < 1$ donc $|z|^2 - 1 < |w|^2(|z|^2 - 1)$ et ainsi $|w|^2 + |z|^2 < 1 + |w|^2|z|^2$. On en déduit que
$$|T_w(z)|^2 = \frac{|w|^2 + |z|^2 - 2\text{Ré}(z\bar{w})}{1 + |w|^2|z|^2 - 2\text{Ré}(z\bar{w})} < 1,$$
soit $T_w(z) \in \mathbb{D}$.
(b) Pour tout $z \in \mathbb{D}$,
$$T_w \circ T_w(z) = \frac{w - \frac{w-z}{1-\bar{w}z}}{1 - \bar{w}\frac{w-z}{1-\bar{w}z}} = \frac{w - |w|^2 z - w + z}{1 - \bar{w}z - |w|^2 + \bar{w}z} = \frac{(1-|w|^2)z}{1-|w|^2} = z.$$
Ainsi, $T_w : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ est holomorphe et involutive (*i.e.* bijective d'inverse elle-même) donc biholomorphe. De plus, $T_w(w) = 0$ par calcul immédiat et, en composant par T_w, $w = T_w(0)$.
(c) Soient $w_1, w_2 \in \mathbb{D}$, il s'agit de montrer qu'il existe un biholomorphisme $h : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ tel que $h(w_1) = w_2$. Posons $h = T_{w_2} \circ T_{w_1}$, alors $h(w_1) = T_{w_2}(0) = w_2$, h convient donc.

2. (a) De la même façon qu'en première question, comme h est une fraction rationnelle dont l'unique pôle est $-i \notin \mathbb{H}$, h est holomorphe.
Voyons que h est à valeur dans $\mathbb{D}$: pour tout $z \in \mathbb{H}$, la distance de z à i est plus petite que celle de z à $-i$ comme $\mathbb{R}$ est la bissectrice du segment $[-i, i]$, d'où $|z - i| < |z + i|$ (un calcul direct le donne aussi bien), soit $|h(z)| < 1$.
Voyons que $h : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{D}$ est bijective d'inverse holomorphe : en résolvant $\frac{z-i}{z+i} = w$, on trouve une unique solution $z = g(w) := i\frac{w+1}{1-w}$, ce qui impose l'injectivité de h. $g : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ ainsi définie est holomorphe comme au-dessus. Pour tout $w \in \mathbb{D}$, $h \circ g(w) = w$, ainsi, h est surjective et, comme h est injective, elle est bijective d'inverse g. g étant holomorphe, h est un biholomorphisme.
(b) Nous allons montrer que $G := \{h_A|_{\mathbb{H}} \mid A \in SL_2(\mathbb{R})\}$ est un groupe isomorphe à $PSL_2(\mathbb{R})$. Soient $g, g' \in G$ de matrices associées $A, B \in SL_2(\mathbb{R})$, alors, vus comme applications de $\overline{\mathbb{C}}$, $g \circ g' = h_A \circ h_B = h_{AB}$. Comme $A, B \in SL_2(\mathbb{R})$, on a $AB \in SL_2(\mathbb{R})$ donc les trois homographies restreintes à $\mathbb{H}$ sont des biholomorphismes de $\mathbb{H}$ d'après la dernière question de l'exercice 2 du TD 2 (ce sont des bijections sur $\mathbb{H}$ qui sont des fractions rationnelles). Ainsi $g \circ g' \in G$ et il en est de même de g^{-1} car $h_{A^{-1}} = h_A^{-1}$. G est donc bien un groupe de biholomorphismes de $\mathbb{H}$.
Voyons qu'il est isomorphe à $PSL_2(\mathbb{R})$: nous avons un morphisme surjectif $SL_2(\mathbb{R}) \longrightarrow G, A \mapsto h_A|_{\mathbb{H}}$ (bien défini par la discussion précédente). Si $A \in SL_2(\mathbb{R})$ est dans le noyau, $h_A(z) = z$ pour tout $z \in \mathbb{H}$; comme $\mathbb{H}$ a plus de 2 éléments, l'identité $az + b = 0$, $\forall z \in \mathbb{H}$ implique $a = b = 0$, d'où l'on tire dans notre cas $A = \pm I_2$. Par factorisation des morphismes surjectifs, on en tire,
$$PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R})/\{\pm \text{Id}\} \simeq G.$$

(c) Notons $F : G \longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{D})$ la conjugaison $F(g) = h \circ g \circ h^{-1}$. Comme $h : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{D}$ et tout $g \in G$ est une bijection de $\mathbb{H}$, on vérifie directement que $F(g)$ est une bijection de $\mathbb{D}$, de plus, par compositions, $F(g) \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ est un holomorphisme du disque d'inverse $F(g^{-1})$ holomorphe. F réalise ainsi un isomorphisme de groupe entre G et son image $F(G)$ qui forme un groupe de biholomorphismes de $\mathbb{D}$.

Déduisons de ce groupe, l'isomorphisme demandé. Pour tout $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$, $F(h_M|_{\mathbb{H}}) = h_{AMB}|_{\mathbb{D}}$ où $A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ (de sorte que $h = h_A$ et $h^{-1} = h_B$). Or

$$AMB = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u & v \\ \bar{u} & \bar{v} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u + iv & u - iv \\ \bar{u} + i\bar{v} & \bar{u} - i\bar{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

où $u = a - ic$, $v = b - id$, $\alpha = \frac{u+iv}{\sqrt{2}}$ et $\beta = \frac{u-iv}{\sqrt{2}}$. Comme $\det A = \frac{i}{2}$ et $\det B = -2i$, $\det AMB = 1$. Ce calcul nous a permis de voir que tout $g \in F(G)$ provient d'un h_N de matrice $N \in SU_{1,1}(\mathbb{C})$. De la même façon que pour $\mathbb{H}$, comme $\mathbb{D}$ a plus de deux éléments, h_N ne dépend que de la classe de N modulo $\pm\mathrm{Id}$. Autrement dit, on a un morphisme injectif $j : PSU_{1,1}(\mathbb{C}) \hookrightarrow F(G) : j([N]) = h_N|_{\mathbb{D}}$.

En résumé, nous avons mis en évidence le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\simeq", "F"'] & F(G) \\
PSL_2(\mathbb{R}) \arrow[u, "\simeq", "f"'] \arrow[r, "g"'] & PSU_{1,1}(\mathbb{C}) \arrow[u, hook, "j"']
\end{tikzcd}$$

(c'est-à-dire que $F \circ f = j \circ g$) où les flèches verticales sont les morphismes injectifs induits par $[M] \mapsto h_M$, la flèche du haut correspond à F et celle du bas, à $g : [M] \mapsto [AMB]$. Par surjectivité de $F \circ f$, j est nécessairement surjective et est donc un isomorphisme, d'où le fait que $g = j^{-1} \circ F \circ f$ réalise l'isomorphisme demandé.

Exercice 2 - (Intégrales de Fresnel) :

On définit une fonction $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ par $f(z) = \exp(-z^2)$. La composée de deux fonctions holomorphes étant holomorphe, f est holomorphe.

Pour $R > 0$, on va intégrer f sur le bord du domaine

$$\left\{ re^{it} \text{ tels que } 0 \leq r \leq R \text{ et } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4} \right\}.$$

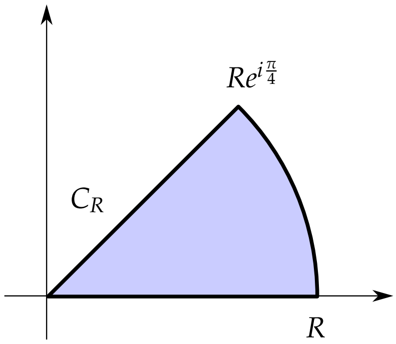
En notant C_R le bord de ce domaine, la formule de Cauchy nous donne

$$\int_{C_R} f(z)dz = 0.$$

En paramétrant C_R, on obtient

$$0 = \int_{C_R} f(z)dz = \int_0^R f(t)dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} iRe^{it}e^{-R^2\exp(2it)}dt - \int_0^R e^{i\frac{\pi}{4}}e^{-it^2}dt.$$

Pour simplifier les notations, on va noter $I_R = \int_0^R f(t)dt$, $J_R = \int_0^{\frac{\pi}{4}} iRe^{it}e^{-R^2\exp(2it)}dt$ et $K_R = \int_0^R e^{i\frac{\pi}{4}}e^{-it^2}dt$, de sorte que $K_R = I_R + J_R$.



Comme $t^2e^{-t^2} \to 0$ quand $t \to +\infty$, $f(t) = O_{t\to+\infty}(\frac{1}{t^2})$, et donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, et $I_R \to_{R\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(t)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Maintenant, on a $|J_R| \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} R|e^{-R^2(\cos(2t)+i\sin(t))}|dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} Re^{-R^2\cos(2t)}dt$ puisque pour $z \in \mathbb{C}$, on a $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$. On ne peut pas utiliser de convergence dominée directement, puisque $Re^{-R^2\cos(2t)}$ vaut R en $\frac{\pi}{2}$. Par concavité de la fonction $t \mapsto \cos(2t)$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, on a pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$,

$$1 - \frac{4}{\pi}t \leq \cos(2t) \leq 1,$$

et donc, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$,

$$e^{-R^2\cos(2t)} \leq e^{R^2(\frac{4}{\pi}t-1)},$$

de sorte que

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} Re^{-R^2\cos(2t)}dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} Re^{R^2(\frac{4}{\pi}t-1)}dt = \frac{\pi}{4R}(1 - e^{-R^2})$$

et donc $J_R \to 0$ quand $R \to +\infty$. Comme $K_R = I_R + J_R$, on en déduit que K_R converge quand $R \to +\infty$, vers $\lim\limits_{R\longrightarrow+\infty} I_R + \lim\limits_{R\longrightarrow+\infty} J_R = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Autrement dit, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{it^2}dt$ est bien définie, et sa valeur est $e^{-i\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1-i}{2}$. De plus, $\mathrm{Re}(\int_0^R e^{it^2}dt) = \int_0^R \cos(t^2)dt$ et $\mathrm{Im}(\int_0^R e^{it^2}dt) = \int_0^R \sin(t^2)dt$, et le fait que l'intégrale $\int_0^R e^{it^2}dt$ converge quand $R \to +\infty$ montre que sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent, respectivement vers la partie réelle et la partie imaginaire de la limite, de sorte que

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

et

$$\int_0^{+\infty} \sin(t^2)dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$