Stage de L3
Histoire des sciences
Réflexions sur la cause générale des vents de D'Alembert

Simon Allais
Responsable de stage : Frédéric Chambat
Laboratoire de géologie de l'ENS de Lyon

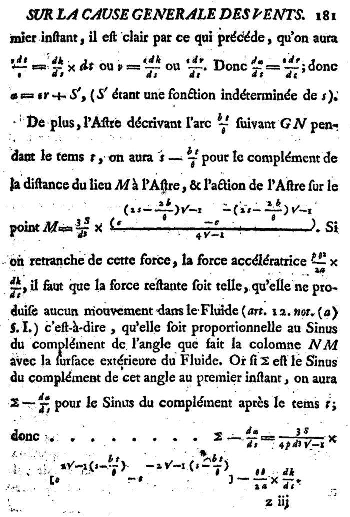
10 septembre 2015

Le groupe D'Alembert

Le groupe d'Alembert est un rassemblement d'une quarantaine de chercheurs travaillant à l'édition critique des *Œuvres complètes* de d'Alembert. Ces *Œuvres* sont divisées en cinq séries :

- Série I : Œuvres mathématiques de jeunesse (1736-1756)
- Série II : Articles de l'*Encyclopédie* (avec ENCCRE)
- Série III : Suite des œuvres mathématiques (1757-1783)
- Série IV : Écrits philosophiques, historiques et littéraires
- Série V : Correspondance générale

Réédition critique


SUR LA CAUSE GENERALE DES VENTS. 181

mier instant, il est clair par ce qui précéde, qu'on aura $\frac{\nu dt}{\varepsilon} = \frac{dk}{ds} \times dt$ ou $\nu = \frac{\varepsilon dk}{ds}$ ou $\frac{\varepsilon dr}{ds}$. Donc $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\varepsilon dr}{dt}$; donc $\alpha = \varepsilon r + S'$, ($S'$ étant une fonction indéterminée de s).

De plus, l'Astre décrivant l'arc $\frac{bt}{\theta}$ suivant GN pendant le tems t, on aura $s - \frac{bt}{\theta}$ pour le complément de la distance du lieu M à l'Astre, & l'action de l'Astre sur le point $M = \frac{3S}{d^3} \times \frac{(c^{(2s-\frac{2b}{\theta})\sqrt{-1}} - c^{-(2s-\frac{2b}{\theta})\sqrt{-1}})}{4\sqrt{-1}}$. Si on retranche de cette force, la force accélératrice $\frac{p\theta^2}{2a} \times \frac{dk}{ds}$, il faut que la force restante soit telle, qu'elle ne produise aucun mouvement dans le Fluide (*art.* 12. *not.* (*a*) *S.* I.) c'est-à-dire, qu'elle soit proportionnelle au Sinus du complément de l'angle que fait la colonne NM avec la surface extérieure du Fluide. Or si Σ est le Sinus du complément de cet angle au premier instant, on aura $\Sigma - \frac{d\alpha}{ds}$ pour le Sinus du complément après le tems t;

donc . . . . $\Sigma - \frac{d\alpha}{ds} = \frac{3S}{4pd^3\sqrt{-1}} \times [c^{2s\sqrt{-1}(s-\frac{bt}{\theta})} - c^{-2\sqrt{-1}(s-\frac{bt}{\theta})}] - \frac{\theta\theta}{2a} \times \frac{dk}{ds}$.

Z iij

p. 181 &, prenant ε pour la hauteur de la colonne NM au pre-/mier instant, il est clair par ce qui précéde, qu'on aura [5] $\frac{\nu\,\mathrm{d}t}{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s} \times \mathrm{d}t$ ou $\nu = \frac{\varepsilon\,\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s}$ ou $\frac{\varepsilon\,\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$. Donc $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\varepsilon\,\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$; donc [6] $\alpha = \varepsilon r + S'$, ($S'$ étant une fonction indéterminée de s).

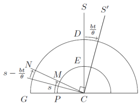
De plus, l'Astre décrivant l'arc [7] $\frac{bt}{\theta}$ suivant GN pendant le tems t, on aura $s - \frac{bt}{\theta}$ pour le complément de la distance du lieu M à l'Astre [8]& l'action de l'Astre sur le point M [9] $= \frac{3S}{d^3} \times \frac{(e^{(2s-\frac{2bt}{\theta})\sqrt{-1}} - e^{-(2s-\frac{2bt}{\theta})\sqrt{-1}})}{4\sqrt{-1}}$. Si on retranche de cette force, la force accélératrice $\frac{p\theta^2}{2a} \times \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t}$, il faut que la force restante soit telle, qu'elle ne produise aucun mouvement

[5]. D'Alembert fait probablement référence à diverses relations similaires de l'ouvrage, notamment l'équation (C) de l'art. 50. La différence, outre les notations, est qu'ici on distingue bien la variable temporelle t de celle de la distance s alors qu'auparavant seule la distance u point-Soleil intervenait. La relation suivante est donc ce que de nos jours on appellerait la conservation du volume et que l'on note classiquement $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{H}\frac{\partial h}{\partial t}$.

[6]. Toujours en notations actuelles : $h(x,t) = -H\frac{\partial N(x,t)}{\partial x} + f(x)$ avec N la position du point et f une fonction quelconque.

[7]. En effet b est défini à l'art. 50 p. 70 comme l'espace que le Soleil parcourt « dans l'Equateur par son mouvement uniforme » pendant le temps θ.

[8]. Nous résumons dans le schéma ci-contre la situation.xxxSimon

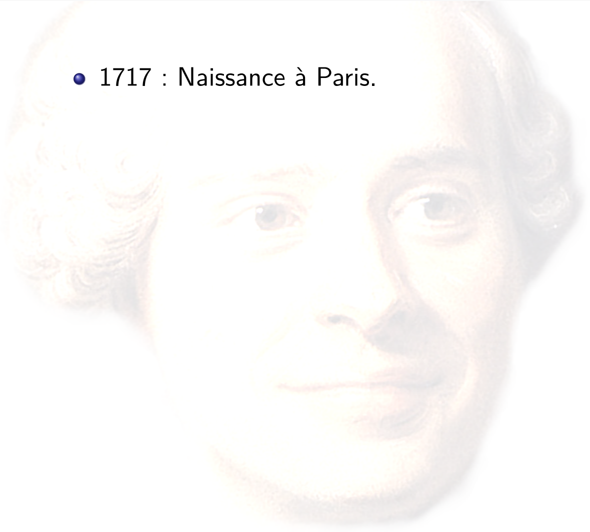


[9]. Au signe près, c'est l'expression donnée à l'article 37-4° indiquant que la composante horizontale de la force de marée est $\frac{3S}{2d^3}\sin 2u$ et écrite avec $u = s - bt/\theta$. Dans cette expression nous avons ajouté la variable t absente de l'original par erreur.

ENS DE LYON

Une chronologie

- 1717 : Naissance à Paris.



Une chronologie

- 1717 : Naissance à Paris.
- 1730-1735 : Après des études au Collège Mazarin (des Quatre Nations), reçu maître-ès-arts, puis entreprend des études de droit.

Une chronologie

- 1717 : Naissance à Paris.
- 1730-1735 : Après des études au Collège Mazarin (des Quatre Nations), reçu maître-ès-arts, puis entreprend des études de droit.
- 1741 : Entrée à l'Académie royale des sciences de Paris comme adjoint.

Une chronologie

- 1717 : Naissance à Paris.
- 1730-1735 : Après des études au Collège Mazarin (des Quatre Nations), reçu maître-ès-arts, puis entreprend des études de droit.
- 1741 : Entrée à l'Académie royale des sciences de Paris comme adjoint.
- 1743 : *Traité de dynamique*.

Une chronologie

- 1717 : Naissance à Paris.
- 1730-1735 : Après des études au Collège Mazarin (des Quatre Nations), reçu maître-ès-arts, puis entreprend des études de droit.
- 1741 : Entrée à l'Académie royale des sciences de Paris comme adjoint.
- 1743 : *Traité de dynamique*.
- 1746 : Prix de l'Académie de Berlin pour ses *Réflexions sur la Cause générale des vents*.

Une chronologie

- 1717 : Naissance à Paris.
- 1730-1735 : Après des études au Collège Mazarin (des Quatre Nations), reçu maître-ès-arts, puis entreprend des études de droit.
- 1741 : Entrée à l'Académie royale des sciences de Paris comme adjoint.
- 1743 : *Traité de dynamique*.
- 1746 : Prix de l'Académie de Berlin pour ses *Réflexions sur la Cause générale des vents*.
- 1751 : Premier tome de l'*Encyclopédie*.

Une chronologie

- 1717 : Naissance à Paris.
- 1730-1735 : Après des études au Collège Mazarin (des Quatre Nations), reçu maître-ès-arts, puis entreprend des études de droit.
- 1741 : Entrée à l'Académie royale des sciences de Paris comme adjoint.
- 1743 : *Traité de dynamique*.
- 1746 : Prix de l'Académie de Berlin pour ses *Réflexions sur la Cause générale des vents*.
- 1751 : Premier tome de l'*Encyclopédie*.
- 1754 : Élu à l'Académie française.

Une chronologie

- 1717 : Naissance à Paris.
- 1730-1735 : Après des études au Collège Mazarin (des Quatre Nations), reçu maître-ès-arts, puis entreprend des études de droit.
- 1741 : Entrée à l'Académie royale des sciences de Paris comme adjoint.
- 1743 : *Traité de dynamique*.
- 1746 : Prix de l'Académie de Berlin pour ses *Réflexions sur la Cause générale des vents*.
- 1751 : Premier tome de l'*Encyclopédie*.
- 1754 : Élu à l'Académie française.
- 1759 : Interdiction de l'*Encyclopédie*.

Une chronologie

- 1717 : Naissance à Paris.
- 1730-1735 : Après des études au Collège Mazarin (des Quatre Nations), reçu maître-ès-arts, puis entreprend des études de droit.
- 1741 : Entrée à l'Académie royale des sciences de Paris comme adjoint.
- 1743 : *Traité de dynamique*.
- 1746 : Prix de l'Académie de Berlin pour ses *Réflexions sur la Cause générale des vents*.
- 1751 : Premier tome de l'*Encyclopédie*.
- 1754 : Élu à l'Académie française.
- 1759 : Interdiction de l'*Encyclopédie*.
- 1783 : Décès d'Euler le 8 septembre et de D'Alembert le 29 octobre.

REFLEXIONS
SUR
LA CAUSE GENERALE DES VENTS.

Piéce qui a remporté le Prix proposé par l'Académie Royale des Sciences de Berlin, pour l'année 1746.

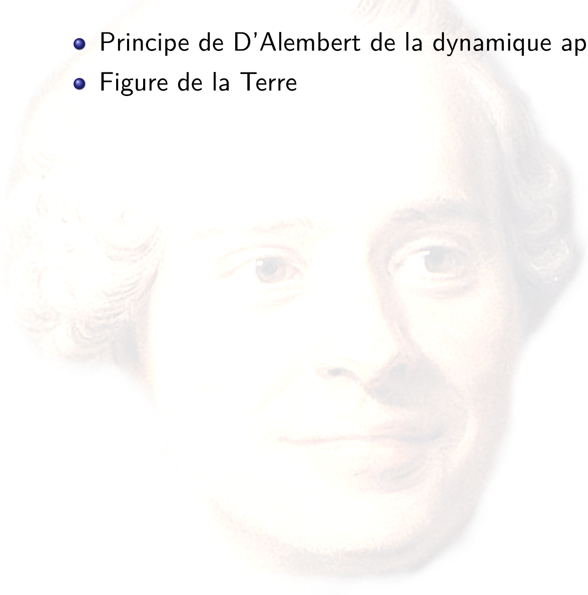
Par M. D'ALEMBERT, des Académies Royales des Sciences de Paris & de Berlin.

A PARIS,
Chez DAVID l'aîné, Libraire, rue Saint Jacques, à la Plume d'or.

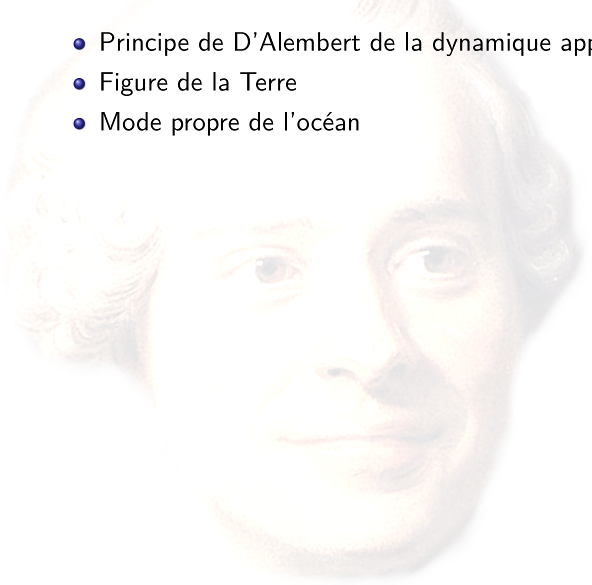
M D C C X L V I I.

- Principe de D'Alembert de la dynamique appliqué aux fluides

- Principe de D'Alembert de la dynamique appliqué aux fluides
- Figure de la Terre



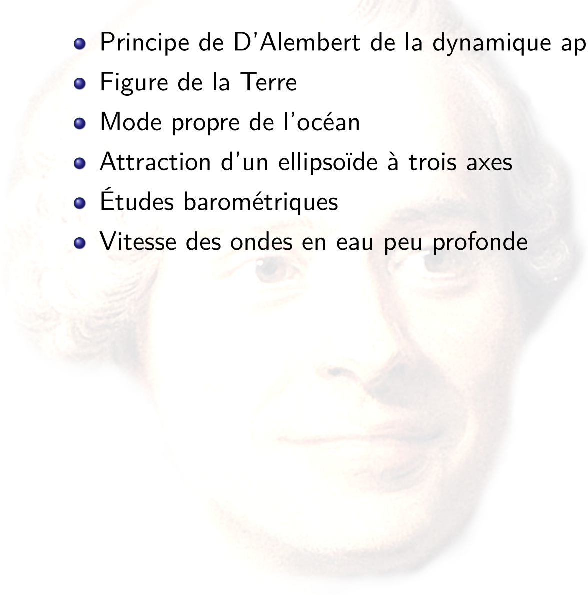
- Principe de D'Alembert de la dynamique appliqué aux fluides
- Figure de la Terre
- Mode propre de l'océan



- Principe de D'Alembert de la dynamique appliqué aux fluides
- Figure de la Terre
- Mode propre de l'océan
- Attraction d'un ellipsoïde à trois axes

- Principe de D'Alembert de la dynamique appliqué aux fluides
- Figure de la Terre
- Mode propre de l'océan
- Attraction d'un ellipsoïde à trois axes
- Études barométriques

- Principe de D'Alembert de la dynamique appliqué aux fluides
- Figure de la Terre
- Mode propre de l'océan
- Attraction d'un ellipsoïde à trois axes
- Études barométriques
- Vitesse des ondes en eau peu profonde



- Principe de D'Alembert de la dynamique appliqué aux fluides
- Figure de la Terre
- Mode propre de l'océan
- Attraction d'un ellipsoïde à trois axes
- Études barométriques
- Vitesse des ondes en eau peu profonde
- Trigonométrie et cinématique sphérique

- Principe de D'Alembert de la dynamique appliqué aux fluides
- Figure de la Terre
- Mode propre de l'océan
- Attraction d'un ellipsoïde à trois axes
- Études barométriques
- Vitesse des ondes en eau peu profonde
- Trigonométrie et cinématique sphérique
- Étude du cas d'un fluide stratifié

- Principe de D'Alembert de la dynamique appliqué aux fluides
- Figure de la Terre
- Mode propre de l'océan
- Attraction d'un ellipsoïde à trois axes
- Études barométriques
- Vitesse des ondes en eau peu profonde
- Trigonométrie et cinématique sphérique
- Étude du cas d'un fluide stratifié
- Équivalence entre équation différentielle linéaire et système d'équations différentielles du premier ordre

- Principe de D'Alembert de la dynamique appliqué aux fluides
- Figure de la Terre
- Mode propre de l'océan
- Attraction d'un ellipsoïde à trois axes
- Études barométriques
- Vitesse des ondes en eau peu profonde
- Trigonométrie et cinématique sphérique
- Étude du cas d'un fluide stratifié
- Équivalence entre équation différentielle linéaire et système d'équations différentielles du premier ordre
- Stabilité des nombres complexes sous les opérations algébriques

- Principe de D'Alembert de la dynamique appliqué aux fluides
- Figure de la Terre
- Mode propre de l'océan
- Attraction d'un ellipsoïde à trois axes
- Études barométriques
- Vitesse des ondes en eau peu profonde
- Trigonométrie et cinématique sphérique
- Étude du cas d'un fluide stratifié
- Équivalence entre équation différentielle linéaire et système d'équations différentielles du premier ordre
- Stabilité des nombres complexes sous les opérations algébriques
- Écoulement d'un fluide dans un canal à largeur variable

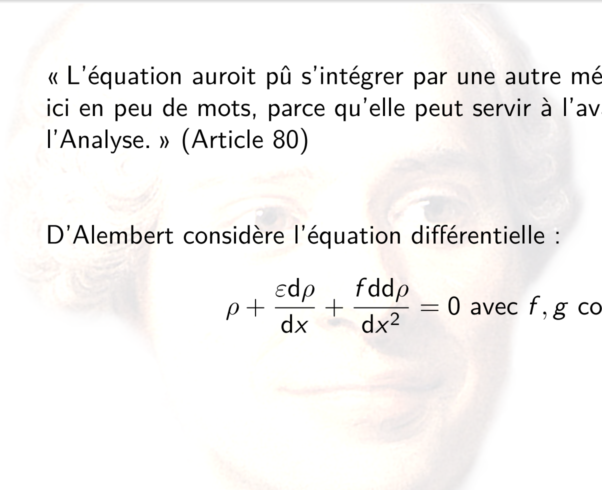
- Principe de D'Alembert de la dynamique appliqué aux fluides
- Figure de la Terre
- Mode propre de l'océan
- Attraction d'un ellipsoïde à trois axes
- Études barométriques
- Vitesse des ondes en eau peu profonde
- Trigonométrie et cinématique sphérique
- Étude du cas d'un fluide stratifié
- Équivalence entre équation différentielle linéaire et système d'équations différentielles du premier ordre
- Stabilité des nombres complexes sous les opérations algébriques
- Écoulement d'un fluide dans un canal à largeur variable
- Mise en équation du mouvement du fluide sur la sphère (2D) ou contraint à l'équateur (1D)

- Principe de D'Alembert de la dynamique appliqué aux fluides
- Figure de la Terre
- Mode propre de l'océan
- Attraction d'un ellipsoïde à trois axes
- Études barométriques
- Vitesse des ondes en eau peu profonde
- Trigonométrie et cinématique sphérique
- Étude du cas d'un fluide stratifié
- Équivalence entre équation différentielle linéaire et système d'équations différentielles du premier ordre
- Stabilité des nombres complexes sous les opérations algébriques
- Écoulement d'un fluide dans un canal à largeur variable
- Mise en équation du mouvement du fluide sur la sphère (2D) ou contraint à l'équateur (1D)
- Résolution générale de l'équation d'onde 1D

La méthode d'intégration

« L'équation auroit pû s'intégrer par une autre méthode, que j'exposerai ici en peu de mots, parce qu'elle peut servir à l'avancement de l'Analyse. » (Article 80)

La méthode d'intégration



« L'équation auroit pû s'intégrer par une autre méthode, que j'exposerai ici en peu de mots, parce qu'elle peut servir à l'avancement de l'Analyse. » (Article 80)

D'Alembert considère l'équation différentielle :

$$\rho + \frac{\varepsilon \mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x} + \frac{f\,\mathrm{dd}\rho}{\mathrm{d}x^2} = 0 \text{ avec } f, g \text{ constants}$$

La méthode d'intégration

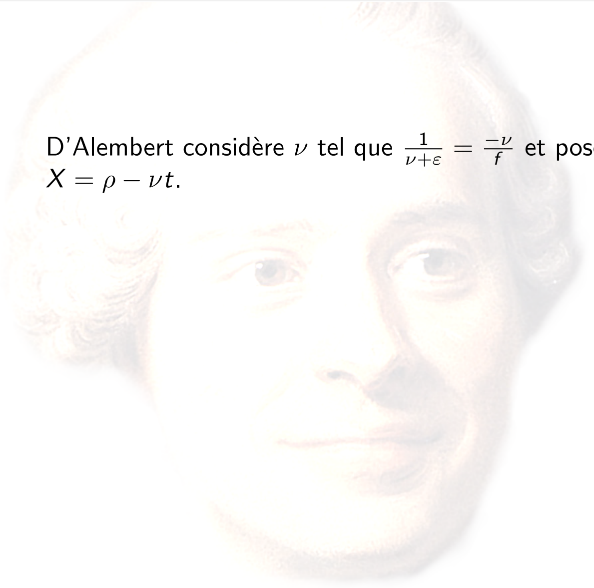
« L'équation auroit pû s'intégrer par une autre méthode, que j'exposerai ici en peu de mots, parce qu'elle peut servir à l'avancement de l'Analyse. » (Article 80)

D'Alembert considère l'équation différentielle :

$$\rho + \frac{\varepsilon \mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x} + \frac{f \mathrm{dd}\rho}{\mathrm{d}x^2} = 0 \text{ avec } f, g \text{ constants}$$

et remarque qu'elle est équivalente au système :

$$\begin{cases} \mathrm{d}\rho - t\mathrm{d}x & = & 0 \\ \rho + \frac{\varepsilon \mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x} + \frac{f \mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} & = & 0 \end{cases}$$



D'Alembert considère ν tel que $\frac{1}{\nu+\varepsilon} = \frac{-\nu}{f}$ et pose la fonction $X = \rho - \nu t$.

D'Alembert considère ν tel que $\frac{1}{\nu+\varepsilon} = \frac{-\nu}{f}$ et pose la fonction $X = \rho - \nu t$. Alors

$$\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}X}{X}(\nu + \varepsilon) = 0.$$

D'Alembert considère ν tel que $\frac{1}{\nu+\varepsilon} = \frac{-\nu}{f}$ et pose la fonction $X = \rho - \nu t$. Alors

$$\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}X}{X}(\nu + \varepsilon) = 0.$$

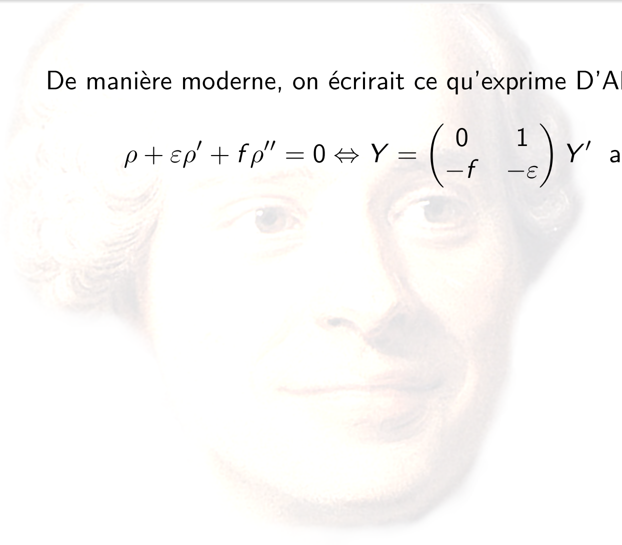
Nous savons donc que

$$X(x) = X(0)e^{-\frac{x}{\nu+\varepsilon}} = \rho(x) - \nu t(x)$$

Ce qui donne t en fonction de ρ et x, il ne reste donc plus qu'à résoudre une équation du premier ordre.

« Cette méthode que je ne fais qu'exposer ici à la hâte & en passant, est fort utile pour intégrer un nombre quelconque n d'équations différentielles, dont chacune seroit d'un degré quelconque, & qui contiendroient $n+1$ variables x, y, z, u, &c. dont la premiere eût sa différence $\mathrm{d}x$ constante, & dont les autres u, y, z, &c. & leurs différences ne parussent que sous une forme lineaire, c'est-à-dire, ne fussent ni mêlées entr'elles, ou avec x & y, ni élevées à aucune puissance autre que l'unité, mais seulement multipliées par des puissances convenables de $\mathrm{d}x$. L'intégration n'auroit même aucune difficulté de plus, si dans chacune de ces équations il y avoit un terme quelconque composé & formé comme on voudroit, de x, de $\mathrm{d}x$ & de constantes. »

Lien avec l'approche moderne



De manière moderne, on écrirait ce qu'exprime D'Alembert

$$\rho + \varepsilon\rho' + f\rho'' = 0 \Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f & -\varepsilon \end{pmatrix} Y' \quad \text{avec} \quad Y = \begin{pmatrix} t \\ \rho \end{pmatrix}$$

Lien avec l'approche moderne

De manière moderne, on écrirait ce qu'exprime D'Alembert

$$\rho + \varepsilon\rho' + f\rho'' = 0 \Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f & -\varepsilon \end{pmatrix} Y' \quad \text{avec} \quad Y = \begin{pmatrix} t \\ \rho \end{pmatrix}$$

La diagonalisation donne

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f & -\varepsilon \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} -(\nu+\varepsilon) & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix} P$$

où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -(\nu+\varepsilon) & \nu \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2\nu+\varepsilon} \begin{pmatrix} \nu & -1 \\ \nu+\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

et ν est une solution de $\frac{1}{\nu+\varepsilon} = \frac{-\nu}{f}$.

En faisant le changement de base $P^{-1}Y = (P^{-1}AP)P^{-1}Y'$, on obtient donc

$$\begin{pmatrix} \nu t - \rho \\ (\nu + \varepsilon)t + \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\nu + \varepsilon) & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu t' - \rho' \\ (\nu + \varepsilon)t' + \rho' \end{pmatrix}$$

En faisant le changement de base $P^{-1}Y = (P^{-1}AP)P^{-1}Y'$, on obtient donc

$$\begin{pmatrix} \nu t - \rho \\ (\nu+\varepsilon)t + \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\nu+\varepsilon) & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu t' - \rho' \\ (\nu+\varepsilon)t' + \rho' \end{pmatrix}$$

Soit, en première composante,

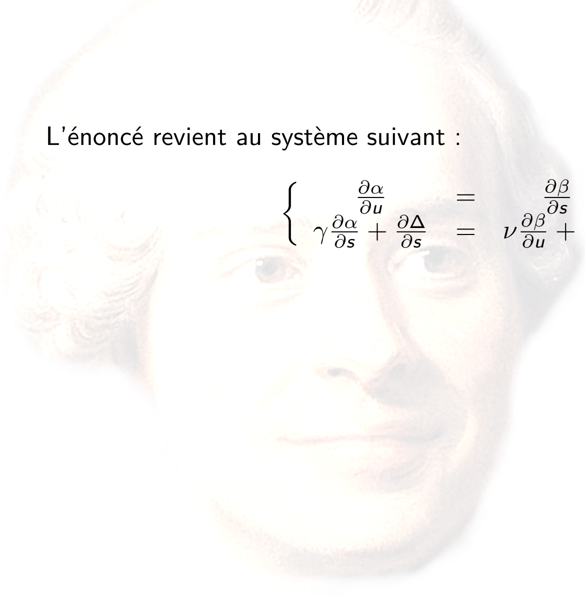
$$1 + \frac{X'}{X}(\nu+\varepsilon) = 0 \text{ avec } X = \nu t - \rho.$$

« *Soient données deux quantités*

$$\alpha \mathrm{d}s + \beta \mathrm{d}u$$

$$\& \qquad \rho\alpha \mathrm{d}u + \nu\beta \mathrm{d}s + \mathrm{d}u\,\Delta u, s + \mathrm{d}s\,\Gamma u, s$$

dans lesquelles ρ *&* ν *désignent des constantes données,* $\Delta u, s,$ *&* $\Gamma u, s,$ *des fonctions quelconques données de u, & de s ; Supposons, outre cela, que ces deux quantités soient l'une et l'autre des différentielles exactes et complettes de quelque fonction de u et de s ; on demande une méthode pour déterminer* α *&* β*, & par conséquent l'intégration des deux différentielles proposées.* » (propos XVI, article 87)



L'énoncé revient au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial \alpha}{\partial u} & = & \dfrac{\partial \beta}{\partial s} \\ \gamma \dfrac{\partial \alpha}{\partial s} + \dfrac{\partial \Delta}{\partial s} & = & \nu \dfrac{\partial \beta}{\partial u} + \dfrac{\partial \Gamma}{\partial u} \end{array} \right.$$

L'énoncé revient au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial \alpha}{\partial u} & = & \dfrac{\partial \beta}{\partial s} \\ \gamma \dfrac{\partial \alpha}{\partial s} + \dfrac{\partial \Delta}{\partial s} & = & \nu \dfrac{\partial \beta}{\partial u} + \dfrac{\partial \Gamma}{\partial u} \end{array}\right.$$

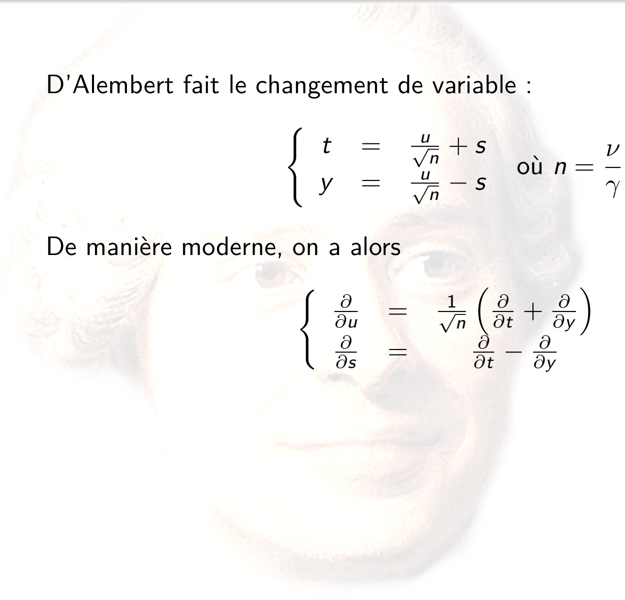
Ou, en notant f une fonction telle que $\mathrm{d}f = \alpha \mathrm{d}s + \beta \mathrm{d}u$, cela revient à

$$\gamma \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} - \nu \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \frac{\partial \Gamma}{\partial u} - \frac{\partial \Delta}{\partial s}$$

Équation d'onde, dite de D'Alembert, avec un terme source $\frac{\partial \Gamma}{\partial u} - \frac{\partial \Delta}{\partial s}$.

D'Alembert fait le changement de variable :

$$\left\{\begin{array}{lcl} t & = & \frac{u}{\sqrt{n}} + s \\ y & = & \frac{u}{\sqrt{n}} - s \end{array}\right. \quad \text{où } n = \frac{\nu}{\gamma}$$



D'Alembert fait le changement de variable :

$$\left\{\begin{array}{lcl} t & = & \frac{u}{\sqrt{n}} + s \\ y & = & \frac{u}{\sqrt{n}} - s \end{array}\right. \quad \text{où } n = \frac{\nu}{\gamma}$$

De manière moderne, on a alors

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial}{\partial u} & = & \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial s} & = & \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \end{array}\right.$$

D'Alembert fait le changement de variable :

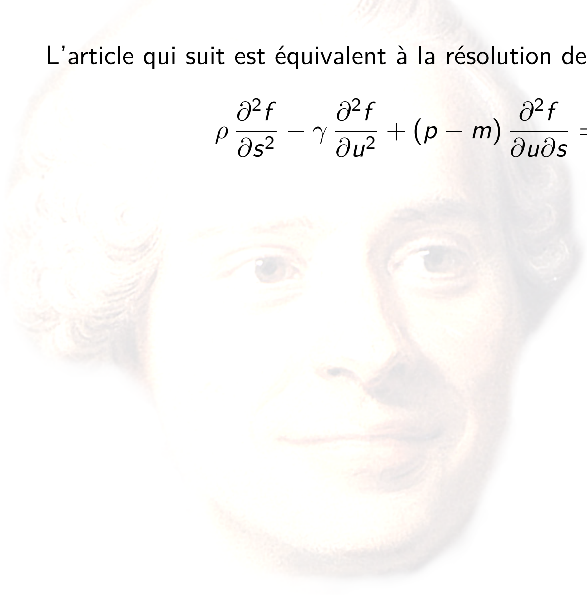
$$\left\{\begin{array}{lcl} t & = & \frac{u}{\sqrt{n}} + s \\ y & = & \frac{u}{\sqrt{n}} - s \end{array}\right. \quad \text{où } n = \frac{\nu}{\gamma}$$

De manière moderne, on a alors

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial}{\partial u} & = & \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial}{\partial s} & = & \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \end{array}\right.$$

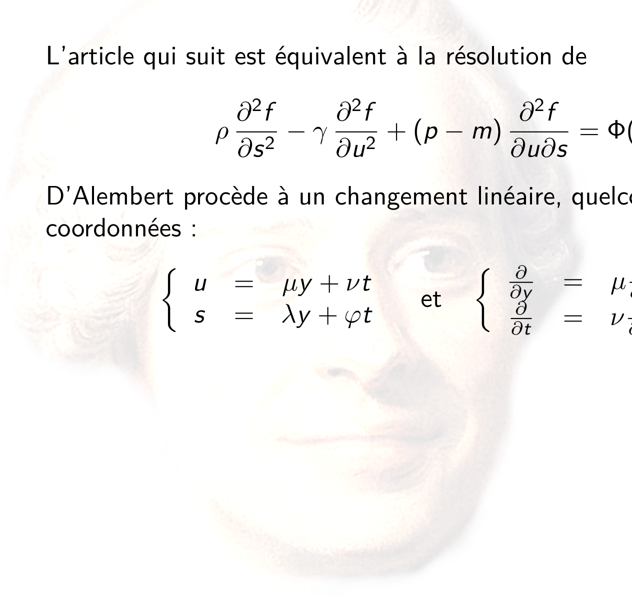
D'où la factorisation

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{\nu}{\gamma}\frac{\partial^2}{\partial u^2} = \left(\frac{\partial}{\partial s} - \sqrt{n}\frac{\partial}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial}{\partial s} + \sqrt{n}\frac{\partial}{\partial u}\right) = -4\frac{\partial^2}{\partial y \partial t}.$$



L'article qui suit est équivalent à la résolution de

$$\rho \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} - \gamma \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (p - m) \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial s} = \Phi(u, s).$$



L'article qui suit est équivalent à la résolution de

$$\rho \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} - \gamma \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (p - m) \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial s} = \Phi(u, s).$$

D'Alembert procède à un changement linéaire, quelconque cette fois, des coordonnées :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u & = & \mu y + \nu t \\ s & = & \lambda y + \varphi t \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial y} & = & \mu \frac{\partial}{\partial u} + \lambda \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} & = & \nu \frac{\partial}{\partial u} + \varphi \frac{\partial}{\partial s} \end{array} \right.$$

L'article qui suit est équivalent à la résolution de

$$\rho \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} - \gamma \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (p - m) \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial s} = \Phi(u, s).$$

D'Alembert procède à un changement linéaire, quelconque cette fois, des coordonnées :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} u & = & \mu y + \nu t \\ s & = & \lambda y + \varphi t \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial y} & = & \mu \frac{\partial}{\partial u} + \lambda \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} & = & \nu \frac{\partial}{\partial u} + \varphi \frac{\partial}{\partial s} \end{array} \right.$$

On souhaiterait trouver des constantes $\mu, \nu, \lambda, \varphi$ telles qu'on ait à nouveau factorisation, soit telles que, à une constante près :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \lambda\varphi & = & \rho \\ \mu\nu & = & -\gamma \\ \lambda\nu + \mu\varphi & = & p - m \end{array} \right.$$

En divisant par $\mu\nu = -\gamma$, on a nécessairement :

$$\left\{ \begin{array}{lcc} \frac{\varphi}{\nu} + \frac{\lambda}{\mu} & = & \frac{m-p}{\gamma} \\ \frac{\varphi}{\nu}\frac{\lambda}{\mu} & = & -\frac{\rho}{\gamma} \end{array} \right.$$

C'est-à-dire que $\frac{\varphi}{\nu}$ et $\frac{\lambda}{\mu}$ sont les racines du polynôme $X^2 + \frac{p-m}{\gamma}X - \frac{\rho}{\gamma}$.

En divisant par $\mu\nu = -\gamma$, on a nécessairement :

$$\begin{cases} \frac{\varphi}{\nu} + \frac{\lambda}{\mu} & = & \frac{m-p}{\gamma} \\ \frac{\varphi}{\nu}\frac{\lambda}{\mu} & = & -\frac{\rho}{\gamma} \end{cases}$$

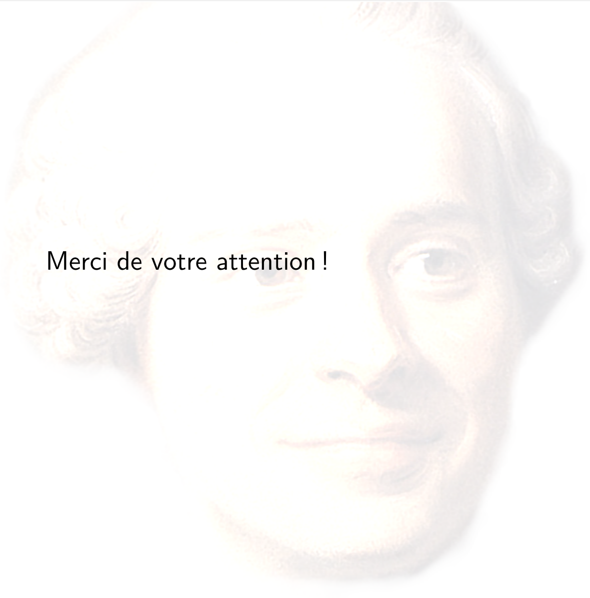
C'est-à-dire que $\frac{\varphi}{\nu}$ et $\frac{\lambda}{\mu}$ sont les racines du polynôme $X^2 + \frac{p-m}{\gamma}X - \frac{\rho}{\gamma}$.Remarquons que le cas où il admet une unique racine correspond au cas $\Delta = 0 \Leftrightarrow -4\rho\gamma = (p-m)^2$, on a la factorisation :

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial s^2} + 2\sqrt{\rho(-\gamma)}\frac{\partial^2}{\partial u \partial s} - \gamma\frac{\partial^2}{\partial u^2} = \left(\sqrt{\rho}\frac{\partial}{\partial s} + \sqrt{-\gamma}\frac{\partial}{\partial u}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

En prenant $\lambda = \sqrt{\rho}$, $\mu = \sqrt{-\gamma}$ et (φ, ν) non colinéaire à (λ, μ).

Pour le cas général, notons x_1 et x_2 les racines distinctes du polynôme, alors si l'on prend par exemple $\varphi = x_1$, $\lambda = x_2$ et $\mu = \nu = 1$, nous obtenons

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial t} = -\frac{1}{\gamma}\left(\rho \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \gamma \frac{\partial^2}{\partial u^2} + (p - m)\frac{\partial^2}{\partial u \partial s}\right)$$



Merci de votre attention !