# Stage de L3
# Histoire des sciences
# Réflexion sur la cause générale des vents de D'Alembert

Simon Allais

Responsable de stage : Frédéric Chambat
Laboratoire de géologie de l'ENS de Lyon

28 août 2015

## Table des matières

# 1 Introduction

## 1.1 Le groupe d'Alembert

Le groupe d'Alembert est un rassemblement d'une quarantaine de chercheurs travaillant à l'édition critique des *Œuvres complètes* de d'Alembert. Celles-ci devraient compter une cinquantaine de volumes dont six sont déjà parus. Ces *Œuvres* sont divisées en cinq séries :

**Série I :** Œuvres mathématiques de jeunesse (1736-1756)

**Série II :** Articles de l'*Encyclopédie* (liée au projet numérique ENCCRE)

**Série III :** Suite des œuvres mathématiques (1757-1783)

**Série IV :** Écrits philosophiques, historiques et littéraires

**Série V :** Correspondance générale

Chaque volume de cette édition critique est constitué d'une introduction générale d'une centaine de pages visant à contextualiser et présenter dans un langage scientifique moderne les textes de d'Alembert qu'il renferme. L'édition critique de l'ouvrage consiste ensuite en de nombreuses annotations de bas de page visant à éclairer le lecteur.

## 1.2 Objectif de mon stage

Il a été confié à Frédéric Chambat, mon responsable de stage, la réédition des *Réflexions sur la cause générale des vents*, mémoire publié par D'Alembert en 1746. À ce stade d'avancement, la retranscription en LaTeX de l'œuvre avait déjà été partiellement annotée sur l'ensemble des articles qui la composent. Cependant, il restait des zones d'ombre sur une partie des articles : résultats, démarches et modélisations incompris notamment. Mon rôle était avant tout de me plonger dans l'œuvre de D'Alembert et le contexte historique de celle-ci afin de pouvoir comprendre son écrit et, éventuellement, corriger et compléter les annotations.

J'ai eu le temps, durant ces six semaines de stage, de traverser globalement l'œuvre et de revoir précisément plus de la moitié de ses articles. J'ai pu aider à résoudre une grande part des questions restées ouvertes. J'ai aussi donné une ébauche d'une dizaine de pages de la partie consacrée aux mathématiques de l'introduction générale de cette édition critique.

## 1.3 Structure du rapport

Après une brève présentation de l'œuvre, je discuterai de la dynamique des fluides de D'Alembert, sa compréhension ayant été un des problèmes fondamentaux de mon stage. Je discuterai ensuite de l'apport mathématique essentiel de cette œuvre (qui compte plusieurs travaux de mathématiques pures dignes d'intérêt, comme je l'évoquerai dans la section suivante) : la résolution des équations d'onde. Comme cette œuvre est connue pour être la première à mettre en évidence des EDP dans un problème physique et à résoudre celles-ci mathématiquement, je propose finalement la retranscription de l'article paradigmatique (que j'ai annoté) en guise d'application des résultats précédemment énoncés.

# 2 Brève présentation de l'œuvre

## 2.1 Contexte historique

Depuis son apparition au milieu du XVII$^{\text{e}}$ siècle, le calcul différentiel ne cesse de se perfectionner tout au long du XVIII$^{\text{e}}$. Son usage dans la plupart des problèmes physiques, initié par les *Principia* de Newton, en fait un sujet prolifique. Toutefois, même si d'un point de vue purement mathématique la théorie différentielle se développe, avec Euler notamment, au delà des fonctions d'une variable (en usant de termes modernes), l'absence d'application en physique demeure. Ce n'est qu'en 1746, que D'Alembert, en réponse à un concours de l'Académie des Sciences de Berlin, propose une résolution du problème des marées dynamiques se basant sur la théorie des différentielles exactes. L'objet du concours était de d'établir le mouvement du vent en tant qu'il serait causé par le mouvement de la Terre et l'attraction du Soleil et de la Lune.

Les *Réflexions sur la cause générale des vents* furent publiées à Paris, fin 1746, comme « Piéce qui a remporté le Prix proposé par l'Académie Royale des Sciences de Berlin, pour l'année 1746 » en un volume composé d'une introduction, de la pièce traduite en français et complétée par D'Alembert ainsi que de la pièce latine originale. La pièce se compose de Proposition, Corollaires, Scolies, Remarques, Lemmes et Problèmes en parallèle d'une numérotation en articles. L'introduction comporte une analyse de l'œuvre dans laquelle D'Alembert y distingue trois grandes parties.

## 2.2 Plan de l'œuvre

Dans sa première partie, D'Alembert considère un globe sphérique solide recouvert par une fine couche d'air. Il étudie la réponse de ce fluide à l'adjonction d'un astre fixe exercant ainsi une force supplémentaire sur celui-ci (la force de marée). Il en vient notamment à donner, pour la première fois, l'expression des modes propres d'oscillation de l'océan en montrant que le fluide oscille suivant un profil ellipsoïdal. En discutant suivant que le fluide est plus ou moins rare, il est amené à considérer l'attraction mutuelle des parties de ce fluide en utilisant et généralisant (sans démonstration), des résultats dues à Clairaut concernant l'attraction d'un ellipsoïde.

Dans sa seconde partie, D'Alembert met l'astre en mouvement. L'étude du mouvement du fluide l'amène à démontrer plusieurs résultats de trigonométrie sphérique par des moyens analytiques (« à la physicienne »). Pour mettre en place les équations du problème général sur l'ensemble de la surface du globe, il utilise un système de coordonnées analogue à un système sphérique mobile pour lequel on aurait pris l'astre comme pôle. Il obtient un système d'équations aux dérivées partielles couplées qu'il ne parvient pas à résoudre sans approximation.

La dernière partie se concentre sur un problème plus spécifique : l'évolution d'un fluide confiné au niveau de l'équateur par deux chaînes de montagnes parallèles. C'est dans cette partie que D'Alembert présente et illustre sa méthode de résolution d'un certain type d'équations aux dérivées partielles équivalentes à ce que l'on nomme aujourd'hui l'équation d'onde avec un terme source.

### 2.3 Sujets abordés

Afin de donner une idée de la diversité et de la densité des études du livre de D'Alembert, voici une liste des sujets abordés classés (autant que possible) par ordre d'apparition :

- Principe de D'Alembert de la dynamique appliqué aux fluides
- Figure de la Terre
- Mode propre de l'océan
- Attraction d'un ellipsoïde à trois axes
- Études barométriques
- Vitesse des ondes en eau peu profonde
- Trigonométrie et cinématique sphérique
- Étude du cas d'un fluide stratifié
- Équivalence entre équation différentielle linéaire et système d'équations différentielles du premier ordre
- Stabilité des nombres complexes sous les opérations algébriques
- Écoulement d'un fluide dans un canal à largeur variable
- Mise en équation du mouvement du fluide sur la sphère (2D) ou contraint à l'équateur (1D)
- Résolution générale de l'équation d'onde 1D

## 3 Formalisation de la dynamique des fluides chez D'Alembert

### 3.1 Forces accélératrices

Les principes de dynamique de D'Alembert se basent sur une notion de force qui différe quelque peu de l'acception actuelle. D'Alembert distingue des forces, telles que nous les percevons dans le langage scientifique moderne de la mécanique newtonienne, les *forces accélératrices*. Une force accélératrice « ne se fait connoître à nous que par son effet » ([DD51] article Accélération de d'Alembert). Il s'agit d'une force pouvant agir seule sur un objet de sorte que l'accélération de cet objet s'identifie (à un facteur de masse près) à la force. Les forces d'intéraction à distances (telles que les attractions gravitationnelle et magnétique) sont ainsi des forces accélératrices, au contraire des forces de liaison telles que la tension d'un fil ou, dans un sens plus large, la pression d'un fluide (qui ne sont présentes qu'en réaction à une autre force).

La force accélératrice d'un objet, et c'est ce qui peut rendre la lecture de D'Alembert laborieuse, peut aussi désigner son accélération. Comme les forces s'exerçant dans un fluide homogène sont ici des forces de volumes, une force est souvent prise homogène à une accélération, à l'exception de l'étude d'un fluide stratifié (où les différences de densité jouent un rôle).

## 3.2 Forces détruites et principe de la dynamique appliquée aux fluides

Voici le principe du raisonnement de D'Alembert. Considérant une parcelle de fluide, D'Alembert exprime l'accélération $\vec{a}$ (en composantes, le formalisme vectoriel n'existant pas) et la résultante des forces accélératrices (massiques) $\vec{f}_{\mathrm{acc}}$ qui agissent en chacun de ses points. Or ces forces accélératrice n'agissent, en général, pas « pleinement » sur le fluide ($\vec{a} \neq \vec{f}_{\mathrm{acc}}$), une partie de leur action est *détruite* par l'intéraction des différentes particules de fluide.

D'Alembert nomme ainsi *force(s) détruite(s)* la force

$$\vec{f}_{\mathrm{acc}} - \vec{a}$$

(multiplié par la densité $\delta$ du fluide si celle-ci n'est pas constante).

Pour un système quelconque (pas forcément un fluide), la somme des forces internes est nulle. D'Alembert dit ainsi que la somme des forces détruites est nulle.

Dans le cas d'un fluide, d'Alembert généralise un résultat plus subtil de Clairaut [Cla43] qui stipule que sur tout contour la somme des forces détruites est nulle (Clairaut n'étudiant que le cas d'équilibre) :

$$\oint \delta \left( \vec{f}_{\mathrm{acc}} - \vec{a} \right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = 0$$

Ou, ce qui revient au même, la somme entre deux points ne dépend pas du chemin choisi.

## 3.3 Interface entre deux fluides

Ce principe permet d'obtenir les relations dynamiques à l'interface entre deux fluides. Considérons ici le cas de deux couches de fluide de densité $\delta$ et $\delta'$ étudié à l'article 76 du livre. On considère ici que le fluide se déplace uniquement selon $(AD)$ et qu'il n'est soumis verticalement qu'à la pesanteur notée $p$ par D'Alembert (notre $g$ en physique moderne). $AD = Nn' = N'n$ étant pris infiniment petits, on note $\varpi$ les forces détruites suivant $Nn'$ et $\varpi'$ celles suivant $N'n$ (en pratique il n'y a que l'accélération qui change entre les deux). Alors la somme des forces détruites suivant $\overrightarrow{Nn}$, en supposant la continuité des forces tangentielles, s'exprime de deux façons :

$$\int_{Nn'n} \delta \left( \vec{f}_{\mathrm{acc}} - \vec{a} \right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \int_{NN'n} \delta' \left( \vec{f}_{\mathrm{acc}} - \vec{a} \right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$$

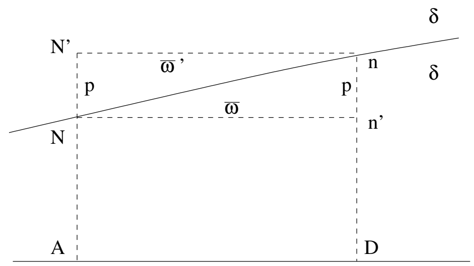



FIGURE 1 – Interface entre deux fluides $\delta$ et $\delta'$

soit

$$\delta(\varpi' N n' - p n' n) = \delta'(-pNN' + \varpi' N' n)$$

ou encore

$$p(\delta - \delta')(NA - Dn) = (\varpi\delta - \varpi'\delta')AD.$$

Si le second fluide est vide, $\delta' = 0$ et on obtient que les forces détruites en surface sont orthogonales à la surface libre :

$$\frac{NA - Dn}{AD} = \frac{\varpi}{p}.$$

## 3.4 Point de vue moderne du principe

Le principe que D'Alembert emploie est vérifié dans le cas d'un fluide non visqueux pour lequel le tenseur des contraintes se restreint à la pression $P$. Alors, le principe de la dynamique appliquée à une parcelle de fluide s'écrirait, en gardant les notations précédentes :

$$\delta\vec{a} = \delta\vec{f}_{\mathrm{acc}} - \vec{\nabla} P$$

Ainsi, dans un fluide homogène, les forces détruites $\delta\left(\vec{f}_{\mathrm{acc}} - \vec{a}\right)$ dérivent d'un potentiel, ce qui est équivalent au principe de D'Alembert.

## 3.5 Conservation de la masse

D'Alembert considère dans son ouvrage un fluide « sans ressort », c'est-à-dire incompressible. Il exprime ainsi la conservation de la masse d'une parcelle de fluide au cours du temps comme la conservation de son volume. Se plaçant dans un contexte où le fluide ne se déplace que selon l'axe des $x$ avec une vitesse $v$ et une hauteur variable $h$ de hauteur typique $H$ telle que $|H - h| \ll H$, D'Alembert obtient bien l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{H}\frac{\partial h}{\partial t}$$

# 4 Les équations aux dérivées partielles

## 4.1 Problème mathématique

Voici l'énoncé original du problème (propos XVI, article 87) que D'Alembert se propose de résoudre :
*Soient données deux quantités*

$$\alpha \mathrm{d}s + \beta \mathrm{d}u$$

$$\& \qquad \rho\alpha \mathrm{d}u + \nu\beta \mathrm{d}s + \mathrm{d}u\, \Delta u, s + \mathrm{d}s\, \Gamma u, s$$

*dans lesquelles $\rho$ & $\nu$ désignent des constantes données, $\Delta u, s$, & $\Gamma u, s$, des fonctions quelconques données de $u$, & de $s$ ; Supposons, outre cela, que ces deux quantités soient l'une et l'autre des différentielles exactes et complettes de quelque fonction de $u$ et de $s$ ; on demande une méthode pour déterminer $\alpha$ & $\beta$, & par conséquent l'intégration des deux différentielles proposées.*

Il faut lire $\Delta u, s$ comme $\Delta(u, s)$ et le terme *complet[tes]* est un synonyme de *exact* (qui a toujours le même sens). En terme moderne, on ajouterait l'hypothèse que ces formes différentielles sont les différentielles de fonctions $\mathcal{C}^2$ pour pouvoir appliquer le théorème de Schwarz (à l'époque justifié par Euler dans [Eul40] §7, démonstration que l'on retrouvera aussi plus tard dans [Eul87]) qui fait de ce système un système d'équation aux dérivées partielles.

L'énoncé revient au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial \alpha}{\partial u} & = & \frac{\partial \beta}{\partial s} \\ \gamma \frac{\partial \alpha}{\partial s} + \frac{\partial \Delta}{\partial s} & = & \nu \frac{\partial \beta}{\partial u} + \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \end{array} \right.$$

Ou, en notant $f$ une fonction telle que $\mathrm{d}f = \alpha \mathrm{d}s + \beta \mathrm{d}u$, cela revient à

$$\gamma \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} - \nu \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \frac{\partial \Gamma}{\partial u} - \frac{\partial \Delta}{\partial s}$$

Équation d'onde dite de D'Alembert avec un terme source $\frac{\partial \Gamma}{\partial u} - \frac{\partial \Delta}{\partial s}$.

Sa résolution du problème repose essentiellement (comme on le fait encore) sur le changement de variable :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} t & = & \frac{u}{\sqrt{n}} + s \\ y & = & \frac{u}{\sqrt{n}} - s \end{array} \right.$$

où $n = \frac{\nu}{\gamma}$. En effet, de manière moderne, on a alors

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial u} & = & \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial s} & = & \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right.$$

D'où la factorisation

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{\nu}{\gamma} \frac{\partial^2}{\partial u^2} = \left( \frac{\partial}{\partial s} - \sqrt{n} \frac{\partial}{\partial u} \right) \left( \frac{\partial}{\partial s} + \sqrt{n} \frac{\partial}{\partial u} \right) = -4 \frac{\partial^2}{\partial y \partial t}$$

On obtient ainsi une solution homogène en $g\left(\frac{u}{\sqrt{n}}+s\right)+h\left(\frac{u}{\sqrt{n}}-s\right)$ et un terme forcé obtenu en intégrant le terme source selon $t$ et $y$.

## 4.2 Application : un exemple d'article annoté

Je joins ici un extrait de la retranscription du texte de D'Alembert annoté tel qu'il était à la fin de mon stage. Il s'agit du problème dans lequel D'Alembert met en équation le mouvement d'un fluide astreint à se déplacer sur l'équateur et soumis à l'attraction d'un astre. Le système qu'il trouve est analogue au problème précédent, il montre donc que le fluide vérifie l'équation des ondes et la résout avant de discuter des conditions initiales. C'est un des derniers problèmes traités par D'Alembert dans cet ouvrage, il se situe vers le milieu de la troisième partie : il s'agit du point VII. de l'article 90 (p.180 de l'édition originale).

Les annotations que j'ai personnellement ajoutées à ce texte sont suivies de « **xxx** Simon ».

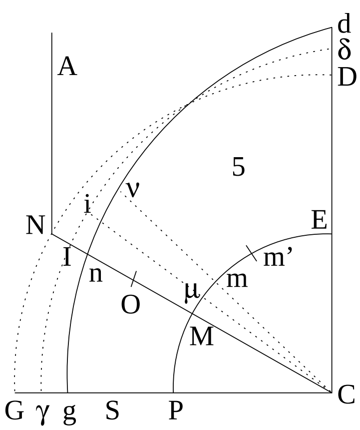



FIGURE 2 – Figure à laquelle se réfère D'Alembert dans l'article

## VII.

Les mêmes choses étant supposées, que dans l'*art. prés. n. I*[1], imaginons que toutes les parties de chaque colonne de l'air, tendent à se mouvoir horizontalement avec une vitesse donnée ; supposons, outre cela, que la figure de l'air soit telle qu'on voudra, pourvû qu'elle différe peu d'un cercle, & qu'enfin le corps $S$ parte d'un point donné $D$ (Fig. 5) ; & cherchons quelle doit être la vitesse & la hauteur de l'air en un lieu quelconque $M$ après un tems quelconque $t$, écoulé depuis le moment où le corps $S$ a commencé à se mouvoir [2].

Soit $MP = s$, le complément de la distance [3] du lieu $M$ à l'Astre, dans le moment que l'Astre part ; $q$ l'espace que le point $M$ décrit dans ses oscillations pendant le tems $t$ ; $\alpha$ la hauteur dont la colonne d'air qui est au-dessus du point $M$, décroît ou croît dans le tems $t$ ; on voit que les quantités $\alpha$ & $q$ ne peuvent être que des fonctions de $s$ & de $t$.

Soit donc [4] $\mathrm{d}q \;\; = k\,\mathrm{d}t + r\,\mathrm{d}s$

$\mathrm{d}\alpha \;\; = \nu\,\mathrm{d}t + g\,\mathrm{d}s$

---

[1]. Attention toutefois, les notations changent radicalement ici. La distance $u$, le déplacement $\mathrm{d}\alpha$, la vitesse $q$, la hauteur $\varepsilon - k$, deviennent maintenant $-s$, $q$, $k$ et $-\alpha$ !

D'Alembert considère une chaîne de montagnes parallèles, sous l'Equateur et cherche la solution générale du mouvement avec un astre mobile. Je ne sais pas s'il a, dès le début de cette partie, en tête un bassin fermé, mais il cherche bien une solution qui dépend de deux variables.

[2]. D'Alembert cherche à établir, outre la vitesse $k$ d'oscillation de la colonne d'air $MN$ autour de $s$, la variation de hauteur de celle-ci. Pour cela, il suppose que le profil de hauteur « différe peu d'un cercle » en ne considérant que sa hauteur moyenne $\epsilon$ à l'ordre 0. Il est ensuite amené à considérer la pente $\Sigma$ du profil de hauteur réel à l'instant $t = 0$ (qui ne dépend que de $s$) ainsi que l'écart $\alpha$ à ce profil pour un temps quelconque (dépendant cette fois de $s$ et de $t$) si bien que la hauteur en $MN$ à un temps quelconque est exactement $\epsilon + \int \Sigma \mathrm{d}s - \alpha$ et $\epsilon + \int \Sigma \mathrm{d}s$ à l'instant initial. $\alpha$ est donc la variation cherchée tandis que $\Sigma$ peut être vue comme une condition initiale du problème.**xxx**Simon

[3]. $s$ est l'angle complémentaire de celui auparavant appelé $u$ : $s = \frac{\pi}{2} - u$.**xxx**Simon

[4]. Cela définit les quatre quantités $k = \frac{\partial q}{\partial t}$, $r = \frac{\partial q}{\partial s}$, $\nu = \frac{\partial \alpha}{\partial t}$, $g = \frac{\partial \alpha}{\partial s}$.

p. 181 &, prenant $\varepsilon$ pour la hauteur de la colonne $NM$ au pre-/mier instant, il est clair par ce qui précéde, qu'on aura [5] $\dfrac{\nu\,\mathrm{d}t}{\varepsilon} = \dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s} \times \mathrm{d}t$ ou $\nu = \dfrac{\varepsilon\,\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s}$ ou $\dfrac{\varepsilon\,\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$. Donc $\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\varepsilon\,\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ ; donc [6] $\alpha = \varepsilon r + S'$, ($S'$ étant une fonction indéterminée de $s$).

De plus, l'Astre décrivant l'arc [7] $\dfrac{bt}{\theta}$ suivant $GN$ pendant le tems $t$, on aura $s - \dfrac{bt}{\theta}$ pour le complément de la distance du lieu $M$ à l'Astre [8]& l'action de l'Astre sur le point $M$ [9] $= \dfrac{3S}{d^3} \times \dfrac{(e^{(2s-\frac{2bt}{\theta})\sqrt{-1}} - e^{-(2s-\frac{2bt}{\theta})\sqrt{-1}})}{4\sqrt{-1}}$. Si on retranche de cette force, la force accélératrice $\dfrac{p\theta^2}{2a} \times \dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t}$, il faut que la force restante soit telle, qu'elle ne produise aucun mouvement

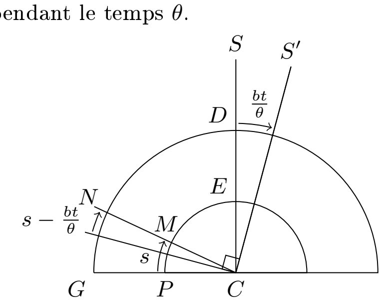
---

[5]. D'Alembert fait probablement référence à diverses relations similaires de l'ouvrage, notamment l'équation ($C$) de l'art. 50. La différence, outre les notations, est qu'ici on distingue bien la variable temporelle $t$ de celle de la distance $s$ alors qu'auparavant seule la distance $u$ point-Soleil intervenait. La relation suivante est donc ce que de nos jours on appellerait la conservation du volume et que l'on note classiquement $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{H}\,\frac{\partial h}{\partial t}$.

[6]. Toujours en notations actuelles : $h(x,t) = -H\frac{\partial N(x,t)}{\partial x} + f(x)$ avec $N$ la position du point et $f$ une fonction quelconque.

[7]. En effet $b$ est défini à l'art. 50 p. 70 comme l'espace que le Soleil parcourt « dans l'Equateur par son mouvement uniforme » pendant le temps $\theta$.

[8]. Nous résumons dans le schéma ci-contre la situation.**xxx**Simon




[9]. Au signe près, c'est l'expression donnée à l'article 37-4° indiquant que la composante horizontale de la force de marée est $\frac{3S}{2d^3}\sin 2u$ et écrite avec $u = s - bt/\theta$. Dans cette expression nous avons ajouté la variable $t$ absente de l'original par erreur.

dans le Fluide (*art.* 12 *not.* (a) §. I.) c'est-à-dire, qu'elle soit proportionnelle au Sinus du complément de l'angle que fait la colonne $NM$ avec la surface extérieure du Fluide. Or si $\Sigma$ est le Sinus du complément de cet angle au premier instant, on aura $\Sigma - \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$ pour le Sinus du complément après le tems $t$ [10] ; donc

p. 182

$$\Sigma - \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \frac{3S}{4pd^3\sqrt{-1}} \times \left[e^{2\sqrt{-1}(s-\frac{bt}{\theta})} - e^{-2\sqrt{-1}(s-\frac{bt}{\theta})}\right] - \frac{\theta\theta}{2a} \times \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t}. \qquad /$$

Donc, si on fait [11] $\mathrm{d}k = \nu\,\mathrm{d}t + \varsigma\,\mathrm{d}s$ ; on aura [12]

$$\mathrm{d}r = \varsigma\,\mathrm{d}t + \frac{\nu\theta\theta}{2a\varepsilon}\,\mathrm{d}s - \frac{\mathrm{d}S'}{\varepsilon} + \frac{\Sigma\,\mathrm{d}s}{\varepsilon}$$

---

[10]. Nous résumons dans le schéma ci-contre les principales notations. $MM'$ est la surface du fluide à l'instant $t$, la ligne en tirets et pointillés en dessous indique la pente qu'avait cette même surface à l'instant initial (à noter que le fluide n'atteignait pas forcément cette hauteur). La somme des forces moins l'accélération doit être perpendiculaire à la surface, cf Introduction générale et 76.1. La tangente de l'angle (ou le sinus au premier ordre), $(\Sigma\,\mathrm{d}s - \mathrm{d}\alpha)/\mathrm{d}s$, est égale au rapport des forces tangentes $\Pi$, données en phrase précédente, à la force centrale $p$.**xxx**Simon : intervertir $M$ et $N$.

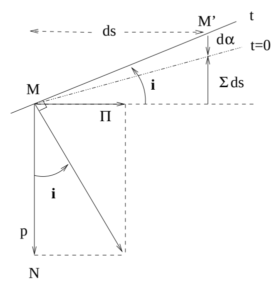



Fig. I

[11]. Attention, ce ne sont pas les mêmes $\nu$ et $\varsigma$ que ceux définis précédemment en p.180 (dans $\mathrm{d}\alpha$) et en p. 177 (dans $\mathrm{d}k$).

[12]. On utilise toujours $\mathrm{d}q = k\,\mathrm{d}t + r\,\mathrm{d}s$ défini p. 180 et qui permet de montrer que $\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial s} = \varsigma$. Le deuxième terme de $\mathrm{d}r$ est $\frac{\partial r}{\partial s}\mathrm{d}s$ et on le calcule en dérivant par rapport à $s$ la relation $\alpha = \varepsilon r + S'$ donnée p. 181, en utilisant la précédente expression pour avoir $\frac{\partial \alpha}{\partial s}$, puis en utilisant $\frac{\partial k}{\partial t} = \nu$ et $\frac{\partial S'}{\partial s}\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}S'$ (puisque $S'$ ne dépend que $s$).

$$-\frac{\mathrm{d}s}{\varepsilon} \times \frac{3S}{4pd^3\sqrt{-1}} \times \left(e^{2(s-\frac{bt}{\theta})\sqrt{-1}} - e^{-2(s-\frac{bt}{\theta})\sqrt{-1}}\right).$$

Il faut donc que ces deux différentielles soient l'une & l'autre des différentielles complettes, & on peut les trouver par *l'article 87*. Pour rendre le calcul plus facile, on supposera que [13] $\theta^2 = 2a\varepsilon$, ce qui est permis ici, & on aura $\dfrac{\theta\theta}{2a\varepsilon} = 1$ ; ensuite on fera [14] $\nu + \beta = m$ ; $\nu - \beta =$

[13]. Puisque $a = \frac{1}{2}p\theta^2$ cette hypothèse revient à écrire que la vitesse de l'onde de gravité est unitaire $p\varepsilon$=1. C'est possible par choix d'unité.

[14]. Il s'agit des définitions de $m$, $\mu$, $u$, $y$, $k$ et $h$. Attention, $u$ et $k$ ne désignent pas les mêmes quantités que précédemment, ce sont ici de nouvelles quantités ! De plus $k$ désigne ici deux quantités différentes : la vitesse mais aussi le paramètre $1 + \frac{b}{\theta}$ ! [**xxx** Les noter différemment ?]

$\mu$ ; $t+s=u$ ; $t-s=y$, $1+\frac{b}{\theta}=k$, $1-\frac{b}{\theta}=h$ ; & il viendra [15]

$$k=\varphi u+\Delta y+\frac{3S}{pd^3\varepsilon}\times\left[e^{2(s-\frac{bt}{\theta})\sqrt{-1}}+e^{-2(s-\frac{bt}{\theta})\sqrt{-1}}\right]$$

---

[15]. Les expressions 2.8 doivent être lues $2\times 8$.

Le calcul qui mène à $k$ me semble un peu long. Détaillons-le un peu. En Suivant les notations de l'article 87, notons $\Gamma(t,s)=\frac{1}{\varepsilon}\left(\Sigma-\frac{3S}{2pd^3}\sin 2\left(s-\frac{bt}{\theta}\right)\right)$, les différentielles précédentes s'écrivent :

$$\mathrm{d}k=\nu\,\mathrm{d}t+\mathscr{C}\,\mathrm{d}s\quad\text{et}\quad\mathrm{d}\left(r+\frac{S'}{\varepsilon}\right)=\mathscr{C}\,\mathrm{d}t+\nu\,\mathrm{d}s+\Gamma\,\mathrm{d}s.$$

La méthode de l'article 87 donne les relations suivantes. Avec les nouvelles variables les relations précédentes s'écrivent

$$\mathrm{d}\left(k+r+\frac{S'}{\varepsilon}\right)=\left(m+\frac{\Gamma}{2}\right)\mathrm{d}u-\frac{\Gamma}{2}\mathrm{d}y\quad\text{et}\quad\mathrm{d}\left(k-r-\frac{S'}{\varepsilon}\right)=\left(\mu+\frac{\Gamma}{2}\right)\mathrm{d}y-\frac{\Gamma}{2}\mathrm{d}u.$$

Ces différentielles sont exactes donc

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(m+\frac{\Gamma}{2}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\partial\Gamma}{\partial u}\quad\text{et}\quad\frac{\partial}{\partial u}\left(\mu+\frac{\Gamma}{2}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\partial\Gamma}{\partial y}.$$

L'intégration de ces deux relations respectivement par rapport à $y$ et $u$ donne

$$m+\frac{\Gamma}{2}=-\frac{1}{2}\int\frac{\partial\Gamma}{\partial u}\mathrm{d}y+\tilde{\varphi}(u)\quad\text{et}\quad\mu+\frac{\Gamma}{2}=-\frac{1}{2}\int\frac{\partial\Gamma}{\partial y}\mathrm{d}u+\tilde{\tilde{\varphi}}(y)$$

avec $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\tilde{\varphi}}$ deux fonctions quelconques. D'autre part $\mathrm{d}k=\frac{1}{2}m\,\mathrm{d}u+\frac{1}{2}\mu\,\mathrm{d}y$ donc

$$\frac{\partial k}{\partial u}=\frac{1}{2}m=-\frac{1}{4}\int\frac{\partial\Gamma}{\partial u}\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\tilde{\varphi}(u)-\frac{\Gamma}{4}\quad\text{et}\quad\frac{\partial k}{\partial y}=\frac{1}{2}\mu=-\frac{1}{4}\int\frac{\partial\Gamma}{\partial y}\mathrm{d}u+\frac{1}{2}\tilde{\tilde{\varphi}}(y)-\frac{\Gamma}{4}.$$

Remarquons maintenant que $2\left(s-\frac{bt}{\theta}\right)=hu-ky$ si bien que $\Gamma=\frac{1}{\varepsilon}\left(\Sigma-\frac{3S}{2pd^3}\sin(hu-ky)\right)$. En insérant cette expression dans les dérivées partielles de $k$ on trouve

$$\frac{\partial k}{\partial u}=-\frac{1}{4\varepsilon}\left(\int\frac{\partial\Sigma}{\partial u}\mathrm{d}y+\Sigma+\frac{3S}{2pd^3}\left(\frac{h}{k}-1\right)\sin(hu-ky)+\bar{\varphi}(u)\right)+\frac{1}{2}\tilde{\varphi}(u)$$

$$\frac{\partial k}{\partial y}=-\frac{1}{4\varepsilon}\left(\int\frac{\partial\Sigma}{\partial y}\mathrm{d}u+\Sigma+\frac{3S}{2pd^3}\left(\frac{k}{h}-1\right)\sin(hu-ky)+\bar{\bar{\varphi}}(y)\right)+\frac{1}{2}\tilde{\tilde{\varphi}}(y).$$

avec $\bar{\varphi}$ et $\bar{\bar{\varphi}}$ deux fonctions quelconques. L'intégration de ces deux expressions donne, comme il se doit, la même expression. En effet les termes en sinus s'intègrent tous deux en $(1/h-1/k)\cos(hu-ky)$. $\Sigma$, vue comme fonction de $(s,t)$, est indépendante

$$\times\left(\frac{1}{2.8k}-\frac{1}{2.8h}\right)\ ;\ \&^{[16]}$$

$$\alpha=\varepsilon\varphi u-\varepsilon\Delta y+\frac{3S}{pd^3}\times\left[e^{2\left(s-\frac{bt}{\theta}\right)\sqrt{-1}}+e^{-2\left(s-\frac{bt}{\theta}\right)\sqrt{-1}}\right]$$

$$\times\left(\frac{1}{2.8k}+\frac{1}{2.8h}\right)+\int\Sigma\,\mathrm{d}s.$$

---

de $t$, ainsi $\frac{\partial\Sigma}{\partial u}=\frac{\partial s}{\partial u}\frac{\partial\Sigma}{\partial s}=\frac{1}{2}\frac{\partial\Sigma}{\partial s}$ et en faisant le changement de variable à $u$ constant $s=\frac{u-y}{2}$, on obtient

$$\int\frac{\partial\Sigma}{\partial u}\,\mathrm{d}y=\int\frac{1}{2}\frac{\partial\Sigma}{\partial s}(-2)\,\mathrm{d}s=-\Sigma$$

Les termes en $\Sigma$ s'annulent donc dans $\frac{\partial k}{\partial u}$ et, de la même façon, dans $\frac{\partial k}{\partial v}$.

Les primitives des fonctions de $u$ et $y$ sont des sommes d'une fonction de $u$ et d'une fonction de $y$, notées $\varphi$ et $\Delta$ par D'Alembert. On trouve donc

$$k(u,y)=\varphi(u)+\Delta(y)+\frac{3S}{8pd^3}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{h}\right)\cos(hu-ky).$$

Les deux premiers termes forment la solution libre et le troisième la solution forcée.

[16]. En suivant la même méthode que précédemment. On montre tout d'abord que $\mathrm{d}\left(r+\frac{S'}{\varepsilon}\right)=\frac{1}{2}m\,\mathrm{d}u-\frac{1}{2}\mu\,\mathrm{d}y+\frac{\Gamma}{2}(\mathrm{d}u-\mathrm{d}y)$ donc

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(r+\frac{S'}{\varepsilon}\right)=\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\Gamma=\frac{\partial k}{\partial u}+\frac{1}{2}\Gamma\quad\text{et}\quad\frac{\partial}{\partial y}\left(r+\frac{S'}{\varepsilon}\right)=-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\Gamma=-\frac{\partial k}{\partial y}-\frac{1}{2}\Gamma.$$

En intégrant chacune de ces relations, on trouve deux relations qui doivent être égales, ce qui impose des conditions sur les fonctions qui interviennent dans l'intégration. On trouve finalement pour $\alpha=\varepsilon\left(r+\frac{S'}{\varepsilon}\right)$ :

$$\alpha=\varepsilon\varphi(u)-\varepsilon\Delta(y)+\frac{3S}{8pd^3}\varepsilon\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{h}\right)\cos(hu-ky)+\int\Sigma\,\mathrm{d}s$$

C'est ce que D'Alembert trouve. **xxx**Simon

## Références


[Cla43] Claude Clairaut : *Théorie de la figure de la Terre.* 1743. Expression de l'équilibre d'un fluide.

[D'A47] Jean Le Rond D'Alembert : *Réflexion sur la cause générale des vents.* 1747.

[DD51] Denis Diderot et Jean Le Rond D'Alembert : *Encyclopédie.* 1751.

[Eng84] Steven B. Engelsman : D'Alembert et les équations aux dérivées partielles. *Dix-huitième siècle*, 16:27–37, 1984.

[Eul40] Leonhard Euler : De infinitis curvis eiusdem generis seu methodus inveniendi aequationes pro infinitis curvis eiusdem generis. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 7*, pages 174–189, 1740.

[Eul87] Leonhard Euler : *Foundations of differential calculus, with applications to finite analysis and series.* 1787. Ouvrage réédité chez Springer.

[Gil07] Christian Gilain : Introduction générale. *In Textes de mathématiques pures (1745 - 1752).* cnrs éditions, 2007.

[Oza65] Jacques Ozanam : *La trigonométrie rectiligne et sphérique.* 1765. Démontre les relations fondamentales de la trigonométrie sphérique. Se réfère à un livre de Wolf (que je n'ai pu trouver) cité dans l'*Encyclopédie.*