

Stage de M1
Géométrie quantitative
Étude de quelques inégalités métriques et
harmoniques

Simon ALLAIS

Responsable de stage : Florent BALACHEFF

Laboratoire Paul Painlevé

1^{er} août 2016

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Inégalités systoliques	3
1.2	Analyse harmonique sur une variété	4
2	Quelques inégalités métriques sur les variétés finsleriennes ou riemanniennes	5
2.1	Inégalités systoliques sur le tore	5
2.1.1	Variétés de Finsler	5
2.1.2	Version systolique du théorème de Minkowski	6
2.2	Lemme de Besicovitch et inégalité de Papasoglu	8
2.2.1	Version finslerienne du lemme de Besicovitch	8
2.2.2	Inégalité isopérimétrique de Papasoglu	10
3	Analyse harmonique	12
3.1	Algèbre multi-linéaire sur un espace euclidien	12
3.1.1	Rappels et notations	12
3.1.2	Structures euclidiennes induites	13
3.1.3	Opérateur de Hodge	14
3.1.4	Extension aux formes différentielles	15
3.2	Laplaciens sur une variété riemannienne	16
3.2.1	Divergence d'un champ de vecteur et laplacien d'une fonction	16
3.2.2	Divergence d'une forme différentielle	17
3.2.3	Formes harmoniques et laplacien de Hodge	18
3.3	Le réseau des 1-formes harmoniques et la première valeur propre du laplacien	18
3.3.1	Quelques résultats sur les formes harmoniques	18
3.3.2	Majoration des 1-formes harmoniques	19
3.3.3	Conséquence sur la première valeur propre du laplacien	20
A	Sur le réseau des formes harmoniques	21
	Références	23

1 Introduction

L'objectif de ce rapport est d'introduire quelques objets d'étude de la géométrie quantitative. Plus précisément, nous nous attachons ici à l'établissement d'inégalités entre des invariants métriques ayant lieu sur une grande classe de variétés : on espère au mieux trouver des estimations ne dépendant que de la topologie de la variété. Les deux sous-sections suivantes introduisent les deux parties de ce rapport. Les résultats que j'ai trouvés personnellement sont indiqués d'une étoile *. Il s'agit du théorème 2.8 et des propositions 2.12 et 2.13

1.1 Inégalités systoliques

Considérons un exemple simple : un tore (\mathbb{T}^2, g) de dimension 2 plongé dans l'espace ambiant munit de sa métrique riemannienne induite naturellement. Nous nous intéressons à la plus petite longueur que peut prendre une courbe close non contractile sur celui-ci, c'est-à-dire une courbe qu'on ne peut réduire continument à un point. Nous nommons indifféremment *systole* cette longueur, notée $\text{sys}(\mathbb{T}^2, g)$, ou une éventuelle courbe la réalisant. Intuitivement, si cette longueur est assez grande, on se doute que l'aire totale de notre surface est elle-même assez grande – et ceci indépendamment des déformations continues que l'on ferait subir à (\mathbb{T}^2, g) . Nous traduisons cette assertion en disant qu'il doit exister une constante $C > 0$ indépendante de la métrique g telle que

$$\frac{\mathcal{A}}{\text{sys}^2}(\mathbb{T}^2, g) \geq C$$

L'objectif de la géométrie systolique est l'établissement de telles inégalités, la recherche d'inégalités optimales et des métriques les réalisant. Nous renvoyons à [CK03] pour un aperçu des avancées dans ce domaine pour les structures riemanniennes. Mentionnons que M. Gromov a établi l'existence de telles inégalités pour une classe vaste (et, en un sens, optimale) de variétés (dites *essentielles*) dans son article fondamental *Filling Riemannian manifolds* [Gro83]. La question du tore riemannien bidimensionnel a, quant à elle, été résolue par Loewner qui montra (vers 1949) que la constante optimale était $C = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (voir la section 2.1 de [CK03]).

L'objectif de la première partie de ce rapport est d'étendre certains résultats au cas de variétés métriques plus générales : les variétés de Finsler dont la donnée d'une métrique ne correspond plus à la donnée d'un produit scalaire en chaque point mais à celle d'une norme quelconque (voire asymétrique dans un cadre encore plus général que nous ne développerons pas). Nous développerons plus spécifiquement la question du tore et mettrons en évidence le lien étroit entre l'inégalité systolique sur un tore de Finsler et le théorème de Minkowski de théorie des nombres. Nous donnerons une version systolique (et qui semble inédite) du lemme de Besicovitch – qui peut être vue, d'après Gromov, comme une inégalité systolique sur une variété à bord (plus rigoureusement, à faces). Enfin nous donnerons une conséquence de cette inégalité dans un problème

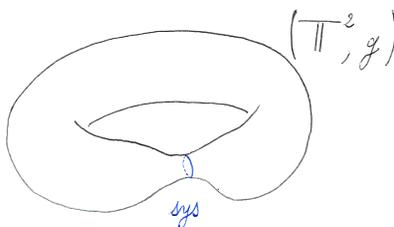


FIGURE 1 – Un tore et sa systole

d'isopérimétrie due à Pappasoglu dont nous raffinerons aussi la preuve du cas riemannien.

1.2 Analyse harmonique sur une variété

Tâchons de justifier brièvement ici l'interprétation physique que l'on donne usuellement de la première valeur propre du laplacien d'une variété riemannienne. Soit donc une variété riemannienne M , une onde scalaire se propageant à vitesse v sur celle-ci vérifie l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \Delta f.$$

Une telle onde $f : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite stationnaire si elle se factorise en $f(x, t) = g(x)h(t)$ où $x \in M$ et $t \in \mathbb{R}$. L'onde ne semble alors pas avoir de mouvement apparent, son profil g « oscille » suivant h . Sous de telles hypothèses, l'équation d'onde se réécrit :

$$g \cdot h'' = v^2 \Delta g \cdot h.$$

En supposant que f est non nulle presque partout, nous en déduisons que

$$\frac{\Delta g}{g} = v^{-2} \frac{h''}{h} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

L'égalité nous apprend, d'une part, λ est une valeur propre de Δ (réciproquement, toute valeur propre nous donnerait un g convenable) et, d'autre part, que h est une sinusoïde de pulsation $v\sqrt{\lambda}$ (par la théorie spectrale des opérateurs compacts, on sait que le laplacien n'a que des valeurs propres positives). En prenant pour v la vitesse du son (spécifique au matériaux dont serait fait notre variété), les ondes stationnaires sont celles que l'on entend lorsque la variété résonne, les valeurs propres du laplacien sont donc en correspondance avec les fréquences propres de la variété via $\lambda \leftrightarrow 2\pi v\sqrt{\lambda}$.

Nous appellerons première valeur propre du laplacien la première valeur propre non nulle de celui-ci notée λ_1 . Elle est en correspondance avec la plus petite fréquence du spectre de résonance de notre variété, sa fréquence de résonance, c'est celle qui est la plus perceptible à l'écoute. Par expérience, plus

un objet a un conduit d'air large, plus grave est sa résonance et plus petite est donc sa fréquence (et, ce que revient au même, λ_1). On se doute donc que si la systole d'une surface M est assez grande, la fréquence (et donc λ_1) est assez petite, ce que l'on traduit par l'existence d'un $C > 0$ tel que

$$\text{sys}^2 \cdot \lambda_1 \leq C.$$

L'existence d'une telle inégalité dans un cadre assez général a été mise en évidence par Marcel Berger dans [Ber73].

La seconde partie du rapport est consacrée à une introduction voulue pédagogique des outils de base de l'analyse harmonique d'une variété riemannienne nécessaires à la compréhension de la preuve du résultat de Marcel Berger (on renvoie le lecteur à son article pour la preuve en elle-même) et à la discussion de son énoncé.

2 Quelques inégalités métriques sur les variétés finleriennes ou riemanniennes

2.1 Inégalités systoliques sur le tore

2.1.1 Variétés de Finsler

Définition 2.1. Une variété de Finsler (M, Φ) est la donnée d'une variété différentielle M ainsi que d'une norme de Finsler (ou métrique de Finsler) $\Phi : TM \rightarrow \mathbb{R}$, c'est-à-dire une application lisse en dehors de la section nulle de TM et telle que sa restriction au tangent $T_x M$ (pour un $x \in M$ quelconque) soit une norme.

Remarque 2.2. En toute généralité, on autorise la norme en chaque tangent à être asymétrique. Il faut alors prendre garde que la métrique de longueur induite n'est plus symétrique. Nous nous restreindrons au cas symétrique ici.

La métrique de Finsler Φ munit la variété (M, Φ) d'une structure d'espace métrique pour la distance d_Φ telle que :

$$\forall p, q \in M, \quad d_\Phi(p, q) = \inf_{\gamma: p \rightsquigarrow q} \text{long}_\Phi \gamma$$

où l'infimum est pris sur les chemins \mathcal{C}^1 par morceaux tels que $\gamma(0) = p$ et $\gamma(1) = q$ et

$$\text{long}_\Phi \gamma := \int_0^1 \Phi(\gamma'(t)) dt.$$

Nous pouvons aussi munir (M, Φ) d'une mesure de volume « naturelle » (en fait plusieurs). Pour simplifier, commençons par considérer le cas où M est un ouvert de \mathbb{R}^n et notons λ la mesure de Lebesgue associée. On définit alors le volume de Busemann-Hausdorff v_{BH} par :

$$\forall x \in M, \quad dv_{BH}(x) = \frac{b_n}{\lambda(B_\Phi(x))} d\lambda(x)$$

où $B_\Phi(x) \subset T_x M \cong \mathbb{R}^n$ est la boule unité de la norme Φ_x et où b_n désigne le volume $\lambda(B_n)$ de la boule euclidienne de \mathbb{R}^n muni de son produit scalaire canonique, explicitement

$$b_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}.$$

Dans le cas où Φ_x serait identique pour tout $x \in M$, on aurait ainsi normalisé la mesure de Lebesgue pour que le volume de la boule unité de Φ soit celui de la boule unité classique.

Pour le cas général, munissons M d'une métrique riemannienne auxiliaire g de volume associé ν_g et définissons le volume d'un ouvert de M par :

$$v_{BH}(U) := \int_U \frac{|B_g|}{|B_\Phi|} \nu_g$$

où $|\cdot|$ au point $x \in M$ désigne la mesure associée à l'espace euclidien $(T_x M, g_x)$ (en poussant en avant la mesure de Lebesgue par l'identification d'une base orthonormée à la base canonique de \mathbb{R}^n). On vérifie que cette mesure se lit dans les cartes locales comme la mesure définie précédemment dans le cas d'ouvert de \mathbb{R}^n et qu'elle ne dépend donc que de la donnée de la métrique Φ .

2.1.2 Version systolique du théorème de Minkowski

Rappelons l'énoncé du théorème de géométrie des nombres de Minkowski :

Théorème 2.3 (Minkowski). *Si Γ est un réseau de \mathbb{R}^n et $K \subset \mathbb{R}^n$ est un compact convexe symétrique par rapport à l'origine tel que $K \cap \Gamma = \{0\}$, alors*

$$\lambda(K) < 2^n \det(\Gamma)$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue et \det est donné par la structure euclidienne orientée canonique.

Nous en proposons une version en terme d'inégalité systolique vérifiée par un tore muni d'une métrique induite par une norme. Soit Γ un réseau de \mathbb{R}^n et $K \subset \mathbb{R}^n$ compact convexe non vide symétrique par rapport à l'origine. Nous faisons alors correspondre à K , la norme de gauge $\|\cdot\|_K$ définie classiquement par

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, \quad \|v\|_K = \inf\{t > 0 : v \in tK\}.$$

On définit alors $\mathbb{T}_{\Gamma, K}^n$ comme la variété de Finsler plate $(\mathbb{R}^n/\Gamma, \|\cdot\|_K)$.

On remarque que, si $\tilde{\gamma}$ désigne le relevé de γ dans \mathbb{R}^n ,

$$\text{long}_K^{(\mathbb{T}_{\Gamma, K}^n)} \gamma = \text{long}_K^{(\mathbb{R}^n)} \tilde{\gamma} := \int_0^1 \|\tilde{\gamma}'(t)\|_K dt.$$

De l'inégalité de la norme portant sur les intégrales de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_K)$, on déduit

$$\text{long}_K \gamma \leq \|\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)\|_K$$

qui est atteinte, par exemple, pour la projection de $t \mapsto \tilde{\gamma}(0) + t(\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0))$ sur le tore.

Si $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}_{\Gamma, K}^n$ est un lacet basé en 0 (l'image de $0 \in \mathbb{R}^n$ par la projection sur le tore) $\tilde{\gamma}(1) \in \Gamma$ est différent de 0 si, et seulement, si γ est non homotope à un point (rappelons, en effet, que $\pi_1(\mathbb{T}_{\Gamma, K}^n) \cong \Gamma$). Nous tirons ainsi de l'inégalité précédente que

$$\text{sys}(\mathbb{T}_{\Gamma, K}^n) = \inf \{\|v\|_K \text{ où } v \in \Gamma \setminus \{0\}\} \quad (1)$$

En particulier $\text{sys}(\mathbb{T}_{\Gamma, K}^n) \leq 1$ si, et seulement si, $K \cap (\Gamma \setminus \{0\}) \neq \emptyset$ avec égalité lorsque $K \cap (\Gamma \setminus \{0\}) \subset \partial K$.

D'autre part, v_{BH} munit $\mathbb{T}_{\Gamma, K}^n$ d'une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ (passée au quotient) de telle sorte que :

$$v_{BH}(\mathbb{T}_{\Gamma, K}^n) = \frac{b_n}{\lambda(K)} \det \Gamma. \quad (2)$$

Soit alors $\alpha_0 > 0$ le plus petit réel tel que $\alpha K \cap (\Gamma \setminus \{0\}) \neq \emptyset$ (atteint par compacité de K et discrétion de Γ) et $\alpha < \alpha_0$. Par la remarque faite après (1),

$$\text{sys}(\mathbb{T}_{\Gamma, \alpha_0 K}^n) = 1$$

or nous avons que $\|\cdot\|_{\alpha_0 K} = \frac{\|\cdot\|_K}{\alpha_0}$ donc $\text{long}_{\alpha_0 K} = \frac{\text{long}_K}{\alpha_0}$ et ainsi

$$\text{sys}(\mathbb{T}_{\Gamma, K}^n) = \alpha_0 \text{sys}(\mathbb{T}_{\Gamma, \alpha_0 K}^n) = \alpha_0 \quad (3)$$

αK vérifie les hypothèses du théorème de Minkowski, par définition de α , d'où

$$\lambda(\alpha K) < 2^n \det \Gamma$$

Or $\lambda(\alpha K) = \alpha^n \lambda(K) = \alpha^n \frac{b_n}{v_{BH}(\mathbb{T}_{\Gamma, K}^n)} \det \Gamma$ ainsi

$$\forall \alpha \in]0, \alpha_0[, \quad \frac{v_{BH}(\mathbb{T}_{\Gamma, K}^n)}{\alpha^n} > \frac{b_n}{2^n}$$

D'où, en passant à la limite quand α tend vers α_0 et en utilisant (3), le

Théorème 2.4 (Minkowski systolique). *Si Γ est un réseau de \mathbb{R}^n et $K \subset \mathbb{R}^n$ est un compact convexe non vide symétrique par rapport à l'origine, alors*

$$\frac{v_{BH}(\mathbb{T}_{\Gamma, K}^n)}{\text{sys}^n(\mathbb{T}_{\Gamma, K}^n)} \geq \frac{b_n}{2^n}.$$

Cet énoncé est complètement équivalent au théorème précédent : si, inversement, nous prenons Γ et K vérifiant les hypothèses du théorème de Minkowski, alors, d'après la remarque suivant (1), $\text{sys}(\mathbb{T}_{\Gamma, K}^n) > 1$, ce qui, combiné à (2) dans le théorème version systolique, redonnerait le premier théorème.

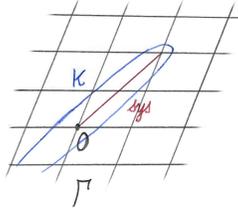


FIGURE 2 – Convexe et systole associée

2.2 Lemme de Besicovitch et inégalité de Papasoglu

2.2.1 Version finslerienne du lemme de Besicovitch

Ici, les variétés M et N impliquées seront compactes connexes, orientées, et de même dimension.

Définition 2.5. Un volume v sur une classe de variétés de dimension fixée (dépendant éventuellement de la métrique) désigne ici la donnée, pour toute variété M de cette classe, d'une mesure notée abusivement v telle que $v(U) > 0$ pour tout ouvert non vide U (propriété de non dégénérescence).

Un volume v est dit monotone si pour toute application contractante $f : (M, d) \rightarrow (N, \delta)$ où (M, d) et (N, δ) sont des espaces métriques (de longueur disons),

$$v(f(M), \delta) \leq v(M, d).$$

On dira que v est strictement monotone si le cas d'égalité caractérise les f isométriques sur leur image.

Proposition 2.6. *Pour toute application localement k -lipschitsienne $f : (M^n, \Phi) \rightarrow (N^n, \Psi)$,*

$$v_{BH}(f(M), \Psi) \leq k^n v_{BH}(M, \Phi)$$

En particulier $v_{BH}(f(M), \Psi) \leq v_{BH}(M, f^*\Psi)$.

Corollaire 2.7. *Le volume de Busemann-Hausdorff est strictement monotone.*

Nous reprenons la preuve du lemme de Besicovitch donnée en section 4.28 de [Gro01] pour en déduire une forme plus générale qui l'étend au cas finslerien.

Proposition 2.8 (Lemme de Besicovitch version Finsler *). *Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un paralléloétope de paires de faces opposées $(F_i, G_i)_{1 \leq i \leq n}$ que l'on munit d'une métrique de Finsler Φ . Si $d_i = d_\Phi(F_i, G_i)$, alors, pour tout volume monotone v ,*

$$v(P, \Phi) \geq v \left(\prod_{i=1}^n [0, d_i], \|\cdot\|_\infty \right)$$

De plus, si v est strictement monotone, l'égalité a lieu si, et seulement si, (P, Φ) est isométrique à $(\prod_{i=1}^n [0, d_i], \|\cdot\|_\infty)$.

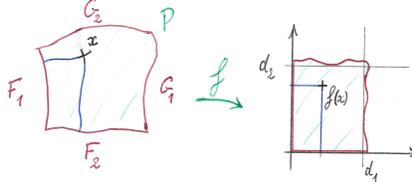


FIGURE 3 – Principe de la démonstration

Démonstration. Considérons l'application continue

$$f : \begin{cases} P & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & (d_\Phi(x, F_i))_{1 \leq i \leq n} \end{cases}$$

Comme pour tous points x et y de P ,

$$|d_\Phi(x, F_i) - d_\Phi(y, F_i)| \leq d_\Phi(x, y) \quad (4)$$

quel que soit i , nous obtenons que $f : (P, \Phi) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ est contractante en passant au maximum parmi les i . Il suffit donc de montrer que $f(P) \supset \prod_{i=1}^n [0, d_i] =: C$ pour obtenir l'inégalité.

Remarquons que le bord de P est envoyé hors de l'intérieur de C , plus précisément, en notant $f = (f^1, \dots, f^n)$, $f^i(F_i) = 0$ tandis que $f^i(G_i) \subset [d_i, +\infty[$. Par définition de P , il existe un homéomorphisme $h : P \rightarrow C$ envoyant faces sur faces (avec le choix de face évident). $f_t = t f|_{\partial P} + (1-t) h|_{\partial P}$ définit alors une homotopie entre $h|_{\partial P}$ et $f|_{\partial P}$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{C}$. Supposons qu'il existe $y \in \overset{\circ}{C} \setminus f(P)$, alors f serait homotope à 0 sur $\mathbb{R}^n \setminus y \supset \mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{C}$ donc $h|_{\partial P}$ serait aussi homotope à 0 sur $\mathbb{R}^n \setminus y$ ce qui est absurde car $h(P) \ni y$.

Par monotonie du volume v , nous avons donc la chaîne d'inégalité

$$v(P, \Phi) \geq v(f(P), \|\cdot\|_\infty) \geq v(C, \|\cdot\|_\infty)$$

La cas d'égalité de la proposition implique celui de ces deux inégalités. Celle de droite implique que $f(P) = C$ par non dégénérescence de v et, si v est strictement monotone, celle de gauche implique que (P, Φ) est isométrique à $(f(P), \|\cdot\|_\infty) = (C, \|\cdot\|_\infty)$. □

Exemple 2.9. Si $v = v_{BH}$, on obtient l'inégalité

$$v_{BH}(P, \Phi) \geq \frac{b_n}{2^n} \prod_{i=1}^n d_i$$

Remarque 2.10. L'obtention de l'inégalité (4) utilise de manière cruciale la symétrie de d_Φ , ainsi la preuve précédente ne s'étend-elle pas au cas plus général d'une norme de Finsler asymétrique.

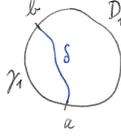


FIGURE 4 – δ ne peut être un ε -raccourci

2.2.2 Inégalité isopérimétrique de Papasoglu

Dans [Pap09] (proposition 2.4), Panos Papasoglu démontre la

Proposition 2.11. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une courbe close γ qui découpe (\mathbb{S}^2, g) en deux disques D_1 et D_2 tels que $\mathcal{A}(D_1), \mathcal{A}(D_2) \geq \frac{\mathcal{A}(\mathbb{S}^2, g)}{4}$ et*

$$\text{long}(\gamma) \leq 2\sqrt{3\mathcal{A}(\mathbb{S}^2, g)} + \varepsilon.$$

Nous rappelons ici sa preuve, reposant sur le lemme de Besicovitch, en l'étendant au cas finslerien :

Proposition 2.12 (*). *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une courbe close γ qui découpe (\mathbb{S}^2, Φ) en deux disques D_1 et D_2 tels que $\mathcal{A}(D_1), \mathcal{A}(D_2) \geq \frac{\mathcal{A}(\mathbb{S}^2, \Phi)}{4}$ et*

$$\text{long}(\gamma) \leq \frac{4}{\sqrt{\pi}}\sqrt{3\mathcal{A}(\mathbb{S}^2, \Phi)} + \varepsilon.$$

La mesure d'aire \mathcal{A} désigne ici le volume de Busemann-Hausdorff mais nous pourrions aussi bien la remplacer par un autre volume monotone en prenant soin de modifier la constante multiplicative comme il convient.

Démonstration. Soit U l'ensemble des courbes closes simples découpant \mathbb{S} en deux disques d'aires $\geq \frac{\mathcal{A}(\mathbb{S}^2, \Phi)}{4}$. Notons $L = \inf_{\gamma \in U} \text{long}(\gamma)$. Fixons $\varepsilon > 0$ et prenons donc $\gamma \in U$ telle que $\text{long}(\gamma) < L + \varepsilon$ et notons D_1 et D_2 les deux disques tels que $\mathbb{S}^2 = D_1 \sqcup \gamma \sqcup D_2$ avec $\mathcal{A}(D_1) \geq \mathcal{A}(D_2)$ (ce qui entraîne $\mathcal{A}(D_1) \geq \frac{\mathcal{A}(\mathbb{S}^2, \Phi)}{2}$).

Alors, γ ne possède pas d' ε -raccourci sur D_1 dans le sens où il n'existe pas de chemin $\delta \subset D_1$ joignant deux points a et b de γ de longueur $\text{long}(\delta) < \text{long}(\gamma_1) - \varepsilon$ où $\gamma_1 \subset \gamma$ est le plus court chemin entre a et b sur γ . En effet, si δ contredisait l'inégalité précédente, alors $\delta \cup \gamma_1$ ou $\delta \cup \gamma_2$ ceindrait un disque d'aire $\geq \frac{\mathcal{A}(\mathbb{S}^2, \Phi)}{4}$ en ayant une longueur $< L$ (en notant $\gamma_2 = \gamma \setminus \gamma_1$) ce qui est impossible.

Divisons maintenant γ en 4 courbes successives $\gamma = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3 \cup \alpha_4$ de même longueur $\frac{\text{long}(\gamma)}{4}$. Comme il n'existe pas d' ε -raccourci, nous avons que

$$d_{\Phi}(\alpha_1, \alpha_3), d_{\Phi}(\alpha_2, \alpha_4) \geq \frac{\text{long}(\gamma)}{4} - \varepsilon$$

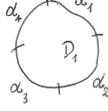


FIGURE 5 – Découpage de $\gamma = \partial D_1$ en 4 chemins de même longueur

D'où, par le lemme de Besicovitch,

$$\mathcal{A}(D_1) \geq \frac{\pi (\text{long}(\gamma) - 4\varepsilon)^2}{4 \cdot 16}$$

Or $\mathcal{A}(D_1) \leq \frac{3}{4}\mathcal{A}(\mathbb{S}^2, \Phi)$ d'où

$$\text{long}(\gamma) \leq \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{3\mathcal{A}(\mathbb{S}^2, \Phi)} + 4\varepsilon.$$

□

Le cas riemannien de l'inégalité isopérimétrique de Papasoglu peut être amélioré en ayant recours à la formule de la co-aire plutôt qu'au lemme de Besicovitch :

Proposition 2.13 (*). *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une courbe close γ qui découpe (\mathbb{S}^2, g) en deux disques D_1 et D_2 tels que $\mathcal{A}(D_1), \mathcal{A}(D_2) \geq \frac{\mathcal{A}(\mathbb{S}^2, g)}{4}$ et*

$$\text{long}(\gamma) \leq \sqrt{6\mathcal{A}(\mathbb{S}^2, g)} + \varepsilon.$$

Démonstration. Nous reprenons la démarche de la preuve précédente en prenant cette fois un chemin $\gamma \in U$ de longueur $\text{long}(\gamma) < L + \frac{\varepsilon}{L}$ (en prenant ε assez petit pour que $\text{long}(\gamma) < 2L$). Sur D_1 le disque de plus grande aire, il n'existe donc pas d' $\frac{\varepsilon}{L}$ -raccourci entre deux points de γ . Soient $A \in \gamma$ un point du contour et, pour $r \geq 0$, $F_r := \{m \in \overline{D_1} \mid d(A, m) = r\}$. La fonction $d(A, \cdot)$ étant lipshitzienne, elle est presque partout différentiable et, d'après le lemme de Sard, F_r est une sous-variété pour presque tout r ; on se restreindra à de tels r . Notons $u(r)$ et $v(r)$ les deux points de γ à distance r de A lorsque $r < \text{long}\gamma$. Comme F_r est une sous-variété sur D_1 s'étendant en une sous-variété à bord sur $D_1 \cup \gamma$, il existe un chemin δ_r de F_r reliant $u(r)$ à $v(r)$. Alors, comme il n'existe pas d' $\frac{\varepsilon}{L}$ -raccourci,

$$\text{long}(\delta_r) \geq \begin{cases} 2r - \frac{\varepsilon}{L} & \text{si } r \geq \frac{\text{long}(\gamma)}{4} \\ \text{long}(\gamma) - 2r - \frac{\varepsilon}{L} & \text{si } \frac{\text{long}(\gamma)}{4} \leq r \leq \frac{\text{long}(\gamma)}{2}. \end{cases}$$

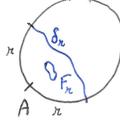


FIGURE 6 – Les lieux F_r et δ_r

Appliquons alors la formule de la co-aire :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(D_1) &= \int_0^{+\infty} \text{long}(F_r) \, dr \\
&\geq \int_0^{\frac{\text{long}(\gamma)}{2}} \text{long}(\delta_r) \, dr \\
&\geq 2 \int_0^{\frac{\text{long}(\gamma)}{4}} \left(2r - \frac{\varepsilon}{L}\right) \, dr \\
&\geq \frac{\text{long}(\gamma)^2}{8} - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Combiné au fait que $\frac{3}{4}\mathcal{A}(\mathbb{S}^2) \geq \mathcal{A}(D_1)$ et que l'inégalité est valable pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, on obtient le résultat annoncé. \square

Remarque 2.14. Appliquer cette méthode en utilisant l'analogie finslerien de la formule de la co-aire conduit à la même inégalité qu'avec le lemme de Besicovitch version Finsler.

3 Analyse harmonique

3.1 Algèbre multi-linéaire sur un espace euclidien

3.1.1 Rappels et notations

Dans l'ensemble de cette section, on suppose donné un espace euclidien orienté $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ de dimension n (on notera aussi bien $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_E$) dont $\underline{e} =: (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée directe. On notera $\Lambda^k E$ l'espace vectoriel des k -vecteurs de E que l'on peut voir comme $E^{\otimes k} / \mathfrak{S}_k$ où \mathfrak{S}_k agit sur les tenseurs simples de $E^{\otimes k}$ par

$$\sigma \cdot u_1 \otimes \dots \otimes u_k = \varepsilon(\sigma) u_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma^{-1}(k)}.$$

On appellera k -vecteurs simples les orbites des tenseurs simples et l'on notera $u_1 \wedge \dots \wedge u_k$ l'orbite de $u_1 \otimes \dots \otimes u_k$. Les k -vecteurs simples engendrent l'espace vectoriel $\Lambda^k E$, plus précisément : si \underline{e} est une base de E , $(\epsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \epsilon_{i_k})_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$ est une base de $\Lambda^k E$ (en particulier, on rappelle que $\dim \Lambda^k E = \binom{n}{k}$).

On notera $(E^*, \langle \cdot, \cdot \rangle_{E^*})$ l'espace euclidien orienté dual de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ et \underline{dx} la base duale de \underline{e} . Il faut garder en tête le pendant dual de l'ensemble des résultats suivants en substituant systématiquement E^* à E et k -formes à k -vecteurs. On rappelle que $\Lambda^k(E^*) \cong (\Lambda^k E)^*$.

3.1.2 Structures euclidiennes induites

On peut se donner une intuition géométrique d'un k -vecteur simple de E $u_1 \wedge \cdots \wedge u_k$ en se le représentant comme le k -paralléloptope de E porté par les vecteurs u_1, \dots, u_k . Les propriétés de k -linéarité du produit extérieur font que cette représentation n'est pas unique, par exemple

$$(u_1 + u_2) \wedge \cdots \wedge u_k = u_1 \wedge \cdots \wedge u_k$$

ou

$$2u_1 \wedge \frac{1}{2}u_2 \wedge u_3 \wedge \cdots \wedge u_k = u_1 \wedge \cdots \wedge u_k.$$

En fait, tout k -vecteurs de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ est de la forme

$$\lambda(u_1 \wedge \cdots \wedge u_k)$$

où λ est un scalaire qui réalise ainsi l'isomorphisme $\Lambda^k \text{Vect}(u_1, \dots, u_k) \cong \mathbb{R}$ si (u_1, \dots, u_k) est libre (sinon $\lambda = 0$). Remarquons, dans ce cas, que

$$\forall g \in \mathcal{L}(\text{Vect}(u_1, \dots, u_k)), g(u_1) \wedge \cdots \wedge g(u_k) = \det(g)(u_1 \wedge \cdots \wedge u_k) \quad (5)$$

Ainsi les parallélotopes associés à un même k -vecteur sont exactement l'orbite de l'un d'entre eux sous l'action de $SL(\text{Vect}(u_1, \dots, u_k))$, *id est* ce sont les parallélotopes de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ d'un volume et d'une orientation (non canoniquement définie) fixés.

Définition-proposition 3.1. *On définit la norme $|\cdot|$ d'un k -vecteur simple de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ comme le volume d'un des parallélotopes le représentant. Celui-ci est donné par le déterminant de Gram :*

$$|u_1 \wedge \cdots \wedge u_k| = \sqrt{\det \left((\langle u_i, u_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq k} \right)}$$

La norme s'étend à une norme euclidienne sur $\Lambda^k E$ en définissant le produit scalaire associé par

$$\langle u_1 \wedge \cdots \wedge u_k, v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \rangle_{\Lambda^k E} = \det \left((\langle u_i, v_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq k} \right)$$

pour les k -vecteurs simples, étendu ensuite par bilinéarité.

La base $(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k})_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$ est alors orthonormée pour ce produit scalaire.

Nous passons sur la vérification des axiomes du produit scalaire, ce sont des propriétés classiques du déterminant de Gram. On notera par la suite simplement $\langle \cdot, \cdot \rangle$ les diverses normes précédemment définies tant que le contexte permet d'éviter les ambiguïtés. De (5), on déduit l'identité

$$\forall g \in \mathcal{L}(\text{Vect}(u_1, \dots, u_k)), |g(u_1) \wedge \cdots \wedge g(u_k)| = |\det(g)| \cdot |u_1 \wedge \cdots \wedge u_k| \quad (6)$$

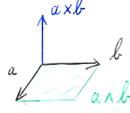


FIGURE 7 – Dualité de Hodge

3.1.3 Opérateur de Hodge

Le but de cette section est de construire un isomorphisme privilégié $\star_k : \Lambda^k E \rightarrow \Lambda^{n-k} E$ (on écrira aussi bien \star pour \star_k) via la structure euclidienne orientée de E . Il s'agit, en somme, d'une généralisation du produit vectoriel qui fournit, pour $n = 3$, une identification entre $E = \Lambda^1 E$ et $\Lambda^2 E$. En effet, si l'on note, pour éviter d'être confus, \times le produit vectoriel, on définit $\star_2 : \Lambda^2 E \rightarrow E$ par

$$\star_2(a \wedge b) = a \times b$$

Pour définir \star_k en toute généralité, mimons la définition du produit vectoriel. Comme le déterminant $\det : E^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme multi-linéaire alternée, il passe au quotient en une application bilinéaire $\det_{k,n-k} : \Lambda^k E \times \Lambda^{n-k} E \rightarrow \mathbb{R}$ en posant pour les multi-vecteurs simples

$$\det_{k,n-k}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_k, v_1 \wedge \cdots \wedge v_{n-k}) = \det(u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_{n-k}).$$

On définit de même $\det_n : \Lambda^n E \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\det_n(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n) = \det(u_1, \dots, u_n).$$

Fixant $\alpha \in \Lambda^k E$, l'application

$$\det_{k,n-k}(\alpha, \cdot) = \det_n(\alpha \wedge \cdot) : \Lambda^{n-k} E \rightarrow \mathbb{R}$$

est une forme linéaire sur l'espace euclidien $(\Lambda^{n-k} E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, par représentation de Riesz, nous en déduisons la

Définition 3.2. L'opérateur de Hodge $\star_k : \Lambda^k E \rightarrow \Lambda^{n-k} E$ est l'unique application satisfaisant :

$$\forall \alpha \in \Lambda^k E, \forall \beta \in \Lambda^{n-k} E, \quad \det_n(\alpha \wedge \beta) = \langle \star_k \alpha, \beta \rangle$$

ou, en multipliant par le volume unité (orienté) $e := e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$, de manière équivalente

$$\forall \alpha \in \Lambda^k E, \forall \beta \in \Lambda^{n-k} E, \quad \alpha \wedge \beta = \langle \star_k \alpha, \beta \rangle e. \quad (7)$$

En pratique, on préfère la forme (7).

Proposition 3.3. Si $\underline{\epsilon}$ est une base orthonormée de E , pour $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$,

$$\star_k(\epsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \epsilon_{i_k}) = \varepsilon(i) \cdot \epsilon_{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge \epsilon_{i_n}$$

où $i_{k+1} < \dots < i_n$ tels que $\{i_1, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\}$ et où $\varepsilon(i)$ désigne la signature de la permutation i , on l'écrira aussi $\varepsilon(I)$ où $I = \{i_1, \dots, i_k\}$.

L'opérateur de Hodge est linéaire et, pour tous k -vecteurs α et β , on a les identités

$$\star_{n-k} \star_k \alpha = (-1)^{k(n-k)} \alpha, \quad \langle \alpha, \beta \rangle = \langle \star_k \alpha, \star_k \beta \rangle, \quad \alpha \wedge \star_k \beta = \langle \alpha, \beta \rangle e. \quad (8)$$

En particulier $|\alpha| = |\star \alpha|$.

Remarque 3.4. L'identité de droite de (8) est souvent prise pour définition de l'opérateur de Hodge.

Exemples 3.5. Le cas $k = n - 1$ fournit la généralisation usuelle du produit scalaire en associant à un $(n - 1)$ -parallélotope non nul le vecteur normal à l'hyperplan qu'il engendre de norme son volume et tel que l'orientation du n -parallélotope obtenu soit directe.

Pour $k=1$, si $\underline{\epsilon} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ est une base orthonormée, on a

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \star e_i = (-1)^{i+1} e_1 \wedge \dots \wedge \widehat{e_i} \wedge \dots \wedge e_n.$$

Pour $k=0$, $\star : \lambda \mapsto \lambda e$ d'inverse $\lambda e \mapsto \lambda$.

Terminons cette section sur un point de dualité. Soit α une k -forme de E , $\Lambda^k(E)$ étant euclidien, il existe un k -vecteur $x \in \Lambda^k(E)$ tel que $\alpha = \langle x, \cdot \rangle$. Alors

Proposition 3.6. Si $\alpha \in \Lambda^k(E^*)$ s'écrit $\alpha = \langle x, \cdot \rangle$ où $x \in \Lambda^k(E^*)$, on a

$$\star \alpha = \langle \star x, \cdot \rangle.$$

3.1.4 Extension aux formes différentielles

Soit (M, g) une variété riemannienne orientée.

Définition 3.7. On munit les k -formes différentielles à support compact sur M d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega^k(M)}$ (qu'on écrira aussi $\langle \cdot, \cdot \rangle$) qui fait de $(\Omega^k(M), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega^k(M)})$ un espace préhilbertien, explicitement

$$\forall \alpha, \beta \in \Omega^k(M), \quad \langle \alpha, \beta \rangle_{\Omega^k(M)} = \int_{p \in M} \langle \alpha_p, \beta_p \rangle_{\Lambda^k(T_p M)} v_{g,p}$$

Dont on notera $\| \cdot \|_{\Omega^k(M)}$ (ou simplement $\| \cdot \|$) son produit scalaire :

$$\forall \alpha \in \Omega^k(M), \quad \|\alpha\|_{\Omega^k(M)} = \sqrt{\int_{p \in M} |\alpha_p|_{\Lambda^k(T_p M)}^2 v_{g,p}}$$

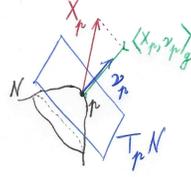


FIGURE 8 – Flux de X au travers ∂N

Définition 3.8. L'opérateur de Hodge défini sur chaque tangent $T_p M$ par rapport au produit scalaire g_p s'étend naturellement aux formes différentielles α par $(\star\alpha)_p = \star(\alpha_p)$ pour tout $p \in M$.

Remarque 3.9. Des deux définitions précédentes, on tire l'identité

$$\forall \alpha, \beta \in \Omega^k(M), \quad \langle \alpha, \beta \rangle_{\Omega^k(M)} = \int_M \alpha \wedge \star \beta$$

3.2 Laplaciens sur une variété riemannienne

3.2.1 Divergence d'un champ de vecteur et laplacien d'une fonction

Nous proposons une approche intuitive de la notion de divergence d'un champ de vecteur. Soit $X \in \Gamma(TM)$ un champ de vecteurs sur (M, g) riemannienne. Soit N une sous-variété à bord de M de même dimension. Soit $\nu : \partial N \rightarrow TM$ l'application de Gauss de N , c'est-à-dire le champ de vecteurs unitaires normaux sortant de ∂N .

Définition 3.10. Le flux de X à travers le bord de N est défini comme

$$\phi_{X, \partial N} = \int_{\partial N} \langle X, \nu \rangle_g v_{g, \partial N}$$

où $v_{g, \partial N}$ désigne la forme volume de ∂N .

Nous avons que $v_{g, \partial N} = \nu \lrcorner (i_{\partial N})^* v_{g, M}$ soit, pour tous $p \in \partial N$ et $u_1, \dots, u_{n-1} \in T_p(\partial N)$,

$$(v_{g, \partial N})_p(u_1, \dots, u_{n-1}) = (v_{g, M})_p(\nu_p, u_1, \dots, u_{n-1})$$

On vérifie alors que

$$\langle X, \nu \rangle_g v_{g, \partial N} = (i_{\partial N})^*(X \lrcorner v_{g, M}).$$

Le théorème de Stokes permet alors de démontrer aisément la

Définition-proposition 3.11. On définit la divergence de X comme la fonction scalaire $\operatorname{div} X$ telle que, pour tout $p \in M$,

$$(\operatorname{div} X)_p = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\phi_{X, \partial B_g(p, r)}}{|B_g(p, r)|}$$

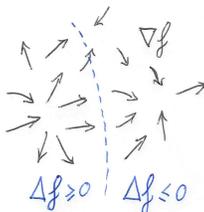


FIGURE 9 – Interprétation graphique de Δf

La limite étant toujours bien définie et telle que

$$(\operatorname{div} X)v_{g,M} = d(X \lrcorner v_{g,M}) \quad (9)$$

Remarque 3.12. La formule (9) est souvent prise pour définition et permet de généraliser naturellement la notion de divergence d'un champ de vecteur au cas d'une variété différentielle orientable (*id est* munie d'une forme volume).

Définition 3.13. On rappelle que le gradient d'une fonction scalaire f est défini, par représentation de Riesz, comme le champ de vecteur ∇f tel que $df = \langle \nabla f, \cdot \rangle$.

On définit alors le laplacien de f comme la divergence de son gradient :

$$\Delta f = \operatorname{div} \nabla f$$

Définition 3.14. Une fonction scalaire f sur (M, g) est dite harmonique si

$$\Delta f = 0.$$

3.2.2 Divergence d'une forme différentielle

Commençons par les 1-formes de (M, g) . Toute 1-forme α , s'écrit $\langle X, \cdot \rangle$. On peut ainsi définir $\operatorname{div} \alpha := \operatorname{div} X$.

Remarquons alors que

$$\star \alpha = \sum_{i=1}^n X_i \star dx_i = \sum_{i=1}^n X_i \star dx_i = \sum_{i=1}^n X_i (-1)^{i+1} dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n = X \lrcorner v_{g,M}$$

Ainsi $d \star \alpha = (\operatorname{div} X)v_{g,M} = (\operatorname{div} \alpha)v_{g,M}$ et comme $\star v_{g,M} = 1$ (exemples 3.5), $\star d \star \alpha = \operatorname{div} \alpha$.

Définition 3.15. La divergence d'une k -forme différentielle α est définie comme

$$\delta^k \alpha = (-1)^{k(n-k)+1} \star d^{n-k} \star \alpha.$$

Le signe étant choisi de telle sorte que l'on ait la

Proposition 3.16. $\delta^{k+1} : \Omega^{k+1}(M) \rightarrow \Omega^k(M)$ est l'adjoint formel de $d^k : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ dans le sens où

$$\forall \alpha \in \Omega^{k+1}(M), \forall \beta \in \Omega^k(M), \quad \langle \delta^{k+1} \alpha, \beta \rangle_{\Omega^k(M)} = \langle \alpha, d^k \beta \rangle_{\Omega^{k+1}(M)}.$$

3.2.3 Formes harmoniques et laplacien de Hodge

Définition 3.17. Une forme différentielle de (M, g) α est dite harmonique si elle est fermée et de divergence nulle, ou, de manière équivalente, si elle est fermée et cofermée, id est $\star\alpha$ est fermée. On notera $\mathcal{H}_g^k(M, \mathbb{R})$ ou simplement $\mathcal{H}_g^k(M)$ l'ensemble des k -formes harmoniques et $\mathcal{H}_g^k(M, \mathbb{Z}) = \mathcal{H}_g^k(M, \mathbb{R}) \cap F^k(M, \mathbb{Z})$ celui des k -formes harmoniques entières.

Exemple 3.18. Si $\alpha = df$ est une 1-forme exacte, α est harmonique si, et seulement si, f est harmonique.

Remarquons alors que, pour toute forme α ,

$$\begin{aligned} d\alpha = 0 \text{ et } \delta\alpha = 0 &\Leftrightarrow \|d\alpha\|^2 + \|\delta\alpha\|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle d\alpha, d\alpha \rangle + \langle \delta\alpha, \delta\alpha \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle (d\delta + \delta d)\alpha, \alpha \rangle = 0 \end{aligned}$$

On en déduit que α est harmonique si, et seulement si,

$$(d\delta + \delta d)\alpha = 0$$

(Le sens direct étant clair et la réciproque venant du calcul précédent).

Définition 3.19. On définit le laplacien de Hodge $\Delta^k : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$ par

$$\Delta^k = d^{k-1} \circ \delta^k + \delta^{k+1} \circ d^k$$

de telle sorte qu'une forme α est harmonique si, et seulement si,

$$\Delta\alpha = 0.$$

Remarque 3.20. De la dualité des deux opérateurs d et δ , on déduit l'identité familière

$$\forall \alpha, \beta \in \Omega^k(M), \quad \langle \Delta^k \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \Delta^k \beta \rangle.$$

3.3 Le réseau des 1-formes harmoniques et la première valeur propre du laplacien

3.3.1 Quelques résultats sur les formes harmoniques

Rappelons quelques résultats sur les formes harmoniques (cf section 9 de [Ber72]). le k -ième groupe de cohomologie à coefficients réels de M noté $H^k(M, \mathbb{R})$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension le k -ième nombre de Betti $\beta_k(M)$ s'identifiant à la cohomologie de De Rham par le théorème de De Rham selon $[\omega](\sigma) = \int_\sigma \omega$. On le norme en fixant, pour toute classe $\Omega \in H^k(M, \mathbb{R})$,

$$\|\Omega\| = \inf_{\omega \in \Omega \subset \Omega^k(M)} \|\omega\|$$

Cet infimum est atteint pour une forme harmonique $\Omega_h \in \mathcal{H}^k(M, \mathbb{R})$ qui est l'unique forme harmonique de la classe Ω . La théorie de Hodge affirme que l'identification

$$\begin{cases} H^k(M, \mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{H}^k(M, \mathbb{R}) \\ \Omega & \mapsto \Omega_h \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel qui munit ainsi $H^k(M, \mathbb{R})$ d'une structure euclidienne induite par $\mathcal{H}^k(M, \mathbb{R})$.

L'ensemble des k -formes harmoniques entières $\mathcal{H}^k(M, \mathbb{Z})$ forme un réseau de $\mathcal{H}^k(M, \mathbb{R})$ et, pour $k = 1$ et M de dimension 2, nous avons

$$\det(\mathcal{H}^1(M, \mathbb{Z})) = 1 \quad (10)$$

où \det désigne le déterminant en valeur absolue d'une base du réseau $\mathcal{H}^1(M, \mathbb{Z})$ par rapport à une base orthonormée de $\mathcal{H}^1(M, \mathbb{R})$. Nous renvoyons à l'annexe A pour une preuve de ce dernier résultat.

3.3.2 Majoration des 1-formes harmoniques

Soit M une variété riemannienne close de dimension 2. Fixons une base orthonormée de $\mathcal{H}^1(M, \mathbb{R})$ et identifions cet espace à \mathbb{R}^n via l'isométrie

$$f : (\mathcal{H}^1(M, \mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^n, (\cdot | \cdot))$$

envoyant cette base sur la base canonique de \mathbb{R}^n où $n = \beta_1(M)$. Notons $\Gamma = f(\mathcal{H}^1(M, \mathbb{Z}))$ réseau de \mathbb{R}^n de déterminant 1 par isométrie et (10). f passe alors au quotient en une isométrie sur les variétés riemanniennes plates :

$$\tilde{f} : \left(\frac{\mathcal{H}^1(M, \mathbb{R})}{\mathcal{H}^1(M, \mathbb{Z})}, \langle \cdot, \cdot \rangle \right) \xrightarrow{\sim} \left(\frac{\mathbb{R}^n}{\Gamma}, (\cdot | \cdot) \right)$$

Par isométrie, nous avons que la longueur de la systole et le volume de ces deux variétés compactes sont identiques, en l'occurrence, leur volume vaut 1 par (10).

En se réduisant au seul aspect normé, nous avons que \tilde{f} est une isométrie entre variétés de Finsler plates :

$$\tilde{f} : \left(\frac{\mathcal{H}^1(M, \mathbb{R})}{\mathcal{H}^1(M, \mathbb{Z})}, \|\cdot\| \right) \xrightarrow{\sim} \left(\frac{\mathbb{R}^n}{\Gamma}, \|\cdot\|_{B_n} \right) = \mathbb{T}_{\Gamma, B_n}^n$$

où B_n désigne toujours la boule unité euclidienne. B_n étant compact convexe centrée en l'origine dans \mathbb{R}^n , on applique le théorème 2.4 à $\mathbb{T}_{\Gamma, B_n}^n$ pour en tirer :

$$\frac{v_{BH}(\mathbb{T}_{\Gamma, K}^n)}{\text{sys}^n(\mathbb{T}_{\Gamma, K}^n)} \geq \frac{b_n}{2^n}.$$

Or, comme $\lambda(B_n) = b_n$, v_{BH} désigne le volume classique de la variété riemannienne $(\frac{\mathbb{R}^n}{\Gamma}, (\cdot | \cdot))$ obtenu en passant au quotient la mesure de Lebesgue (cf (2)) et donc $v_{BH}(\mathbb{T}_{\Gamma, K}^n) = \det \Gamma = 1$. D'où finalement, par isométrie,

$$\text{sys} \left(\frac{\mathcal{H}^1(M, \mathbb{R})}{\mathcal{H}^1(M, \mathbb{Z})}, \langle \cdot, \cdot \rangle \right) \leq \frac{2}{b_n^{\frac{1}{n}}}. \quad (11)$$

D'après (1) et l'identification isométrique des deux réseaux $\mathcal{H}^1(M, \mathbb{Z})$ et Γ , nous avons que

$$\text{sys} \left(\frac{\mathcal{H}^1(M, \mathbb{R})}{\mathcal{H}^1(M, \mathbb{Z})}, \langle \cdot, \cdot \rangle \right) = \inf_{\omega \in \mathcal{H}^1(M, \mathbb{Z}) \setminus \{0\}} \|\omega\|$$

D'où la formulation équivalente de (11) :

$$\inf_{\omega \in \mathcal{H}^1(M, \mathbb{Z}) \setminus \{0\}} \|\omega\| \leq \frac{2}{b_n^{\frac{1}{n}}}.$$

Si M est de genre g , nous avons $n = \beta_1(M) = 2g$ et alors $b_{2g} = \frac{\pi^g}{g!}$, d'où

$$\inf_{\omega \in \mathcal{H}^1(M, \mathbb{Z}) \setminus \{0\}} \|\omega\| \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} (g!)^{\frac{1}{2g}}.$$

Par l'encadrement classique $g^{\frac{g}{2}} \leq g! \leq \left(\frac{g+1}{2}\right)^g$, nous avons la borne grossière

$$\inf_{\omega \in \mathcal{H}^1(M, \mathbb{Z}) \setminus \{0\}} \|\omega\| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{g+1}.$$

et la borne inférieure de l'encadrement précédent nous indique que l'on ne peut espérer une borne meilleure que $\mathcal{O}(g^{\frac{1}{4}})$ par cette méthode.

Une bien meilleure borne est obtenue dans le cas hyperbolique par [BS94] en combinant l'équation suivant (3.6) à la remarque (3.1) :

$$\begin{aligned} \inf_{\omega \in \mathcal{H}^1(M, \mathbb{Z}) \setminus \{0\}} \|\omega\|^2 &\leq \frac{2}{\pi - 2\theta_0} \log(4g - 2) \\ &\leq (1, 37\dots) \log(4g - 2) \end{aligned}$$

où $\theta_0 = \arccos \frac{2}{3}$.

3.3.3 Conséquence sur la première valeur propre du laplacien

En gardant les notations précédentes, d'après le théorème 2.1 de [Ber73],

$$\lambda_1 \cdot \text{sys}^2(M) \leq 4\pi^2 \inf_{\omega \in \mathcal{H}^1(M, \mathbb{Z}) \setminus \{0\}} \|\omega\|^4$$

où λ_1 désigne la première valeur propre du laplacien de M . Notre borne grossière donne donc

$$\lambda_1 \cdot \text{sys}^2(M) \leq 16(g+1)^2$$

Dans le cas où M est hyperbolique, celle de P. Buser et P. Sarnak donne

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot \text{sys}^2(M) &\leq 16 \frac{\pi^2}{(\pi - 2\theta_0)^2} (\log(4g - 2))^2 \\ &\leq (74.138\dots) (\log(4g - 2))^2 \end{aligned}$$

qui est bien meilleure dès que $g \geq 6$.

A Sur le réseau des formes harmoniques

On démontre ici la

Proposition A.1. *Si M est une variété riemannienne close et orientée de dimension 2, alors*

$$\det(\mathcal{H}^1(M, \mathbb{Z})) = 1$$

Ce résultat découle du fait que le réseau $\star(\mathcal{H}^1(M, \mathbb{Z}))$ est dual de $\mathcal{H}^1(M, \mathbb{Z})$ au sens de la

Définition-proposition A.2. *Soit Γ un réseau de $(E, (\cdot|\cdot))$ euclidien de dimension n , on définit*

$$\Gamma^* = \{u \in E : \forall v \in \Gamma, (u|v) \in \mathbb{Z}\}.$$

Γ^* est un réseau de E appelé réseau dual de Γ .

Si, de plus, \underline{b} est une base de Γ , alors une base de Γ^* est donnée par $\underline{\beta}$ vérifiant

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad (b_i | \beta_j) = \delta_{i,j}.$$

Dans notre cas $(E, (\cdot|\cdot)) = (\mathcal{H}^1(M, \mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Par définition,

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}^1(M, \mathbb{Z}))^* &= \left\{ \alpha \in \mathcal{H}^1(M, \mathbb{R}) : \forall \beta \in \mathcal{H}^1(M, \mathbb{Z}), \int_M \star \alpha \wedge \beta \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= \star \left\{ \alpha \in \mathcal{H}^1(M, \mathbb{R}) : \forall \beta \in \mathcal{H}^1(M, \mathbb{Z}), [\alpha, \beta] \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

comme \star est involutive (au signe près). $[\alpha, \beta] := \int_M \alpha \wedge \beta$ correspond à l'image de la classe fondamentale $[M] \in H_2(M, \mathbb{R})$ de M par le cup-produit de α et β vus dans $H^1(M, \mathbb{R})$ via le théorème de De Rham :

$$[\alpha, \beta] = (\alpha \smile \beta)[M]$$

Nous voulons donc montrer que

$$\mathcal{H}^1(M, \mathbb{Z}) = \left\{ \alpha \in \mathcal{H}^1(M, \mathbb{R}) : \forall \beta \in \mathcal{H}^1(M, \mathbb{Z}), [\alpha, \beta] \in \mathbb{Z} \right\}$$

Ce qui correspond, en cohomologie singulière, à

$$H^1(M, \mathbb{Z}) = \left\{ \alpha \in H^1(M, \mathbb{R}) : \forall \beta \in H^1(M, \mathbb{Z}), (\alpha \smile \beta)[M] \in \mathbb{Z} \right\}$$

l'inclusion \subset étant claire, vérifions que la réciproque est vérifiée dans notre cas. M est une variété close de dimension 2, soit donc g son genre. Nous savons alors (cf l'exemple 3.7 de [Hat02]) qu'il existe une base $(\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g)$ de $H^1(M, \mathbb{Z})$ telle que les cup-produits soient deux à deux triviaux sauf $\alpha_i \smile \beta_i = -\beta_i \smile \alpha_i$ (i parcourant $\{1, \dots, g\}$) pour lesquels $(\alpha_i \smile \beta_i)[M] = 1$.

Ainsi, si $\omega = \sum_{j=1}^g \lambda_j \alpha_j + \mu_j \beta_j \in H^1(M, \mathbb{R})$ vérifie $(\omega \smile \beta)[M] \in \mathbb{Z}$ pour tout élément $\beta \in H^1(M, \mathbb{Z})$, en prenant $\beta = \beta_i$ (respectivement $\beta = \alpha_i$), on obtient $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ (resp. $-\mu_i \in \mathbb{Z}$), d'où le résultat. Finalement :

$$(\mathcal{H}^1(M, \mathbb{Z}))^* = \star(\mathcal{H}^1(M, \mathbb{Z}))$$

La proposition résulte alors de ce que $\det(\star(\mathcal{H}^1(M, \mathbb{Z}))) = \det(\mathcal{H}^1(M, \mathbb{Z}))$ (comme \star est une isométrie) et du

Lemme A.3. Si Γ est un réseau de $(E, (\cdot|\cdot))$ de dual Γ^* ,

$$\det(\Gamma) \det(\Gamma^*) = 1$$

Démonstration. Soit $\underline{\beta}$ la base de Γ^* associée à une base \underline{b} de Γ , notons $B = [b_1 \cdots b_n]$ et $B^* = [\beta_1 \cdots \beta_n]$ les matrices associées par rapport à une base orthonormée de E . Alors ${}^t B B^* = I_n$ d'où

$$\det(\Gamma) \det(\Gamma^*) = |\det(B) \det(B^*)| = |\det({}^t B) \det(B^*)| = |\det(I_n)| = 1$$

□

Remarque A.4. Plus généralement, si M est riemannienne close orientée de dimension n , nous avons toujours l'inclusion :

$$\star(\mathcal{H}^k(M, \mathbb{Z})) \subset (\mathcal{H}^{n-k}(M, \mathbb{Z}))^*$$

L'inclusion réciproque ayant lieu si M vérifie la condition topologique :

$$\forall \alpha \in H^k(M, \mathbb{R}) : (\forall \beta \in H^{n-k}(M, \mathbb{Z}), (\alpha \smile \beta)[M] \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \alpha \in H^k(M, \mathbb{Z}).$$

Se référer à [Ber72] section 9 où il est montré que cette condition est notamment satisfaite pour le tore \mathbb{T}^n , les projectifs complexes et quaternioniens $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ et $\mathbb{H}\mathbb{P}^n$, le plan projectif des octaves de Cayley $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$ et le produit de deux n -sphères $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n$. D'où l'on tire, via le lemme A.3, des identités sur les déterminants des réseaux de formes harmoniques.

Références

- [Ber72] Marcel BERGER : À l'ombre de Loewner. *Annales scientifiques de l'É.N.S.*, 5 :241–260, 1972.
- [Ber73] Marcel BERGER : Sur les premières valeurs propres des variétés riemanniennes. *Compositio mathematica*, 26 :129–149, 1973.
- [BS94] P. BUSER et P. SARNAK : On the period matrix of a riemann surface of large genus. *Inventiones mathematicæ*, 117 :27–56, 1994.
- [CK03] Christopher B. CROKE et Mikhail G. KATZ : Universal volume bounds in riemannian manifolds. *Surveys in Differential Geometry*, 8 :109–137, 2003.
- [Gro83] Misha GROMOV : Filling riemannian manifolds. *J. Differential Geometry*, 18 :1–147, 1983.
- [Gro01] Misha GROMOV : *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*. 2001.
- [Hat02] Allen HATCHER : *Algebraic Topology*. 2002.
- [Heb91] James HEBDA : Two geometric inequalities for the torus. *Geometriæ-Dedicata*, 38 :101–106, 1991.
- [Pap09] Panos PAPASOGLU : Cheeger constants of surfaces & isoperimetric inequalities. *Transactions of the american mathematical society*, 361(10) :5139–5162, october 2009.