

**DOSSIER DE CANDIDATURE AU POSTE DE PROFESSEUR
250145 DE L'UNIVERSITÉ DE STRASBOURG**

GIUSEPPE ANCONA

TABLE DES MATIÈRES

1.	Curriculum vitae et studiorum	3
2.	Liste de publications	5
3.	Organisation	6
3.1.	Conférences organisées	6
3.2.	Séminaires organisés	7
4.	Activités administratives	8
4.1.	Responsable d'axe dans le RT du CNRS de théorie des nombres	8
4.2.	Responsable de pôle dans l'ANR Cyclades	9
4.3.	Conseil scientifique de l'IRMA	9
4.4.	Comité parité de l'IRMA	9
4.5.	Comité scientifique du GDR JC2A	9
4.6.	Conseil scientifique du Laboratoire International Lysm	9
5.	Activités d'enseignement	9
5.1.	Enseignement à l'étranger	9
5.2.	Enseignement à Strasbourg	9
6.	Activités de diffusion	10
6.1.	Exposé à la semaine des sciences	10
6.2.	Math en jeans	10
6.3.	Exposé au Rallye Math	10
6.4.	Encadrement d'une collégienne en stage d'observation	10
6.5.	Exposé dans le SLIME (Séminaire Licence Info-Math)	11
6.6.	Animath	11
6.7.	Olympiades de Mathématiques	11
7.	Encadrement	11
7.1.	Encadrement de recherches	11
7.2.	Encadrement de mémoires	11
8.	Exposés	12
8.1.	Exposés dans des séminaires de recherche à l'étranger	12
8.2.	Exposés dans des séminaires de recherche en France	13
8.3.	Exposés dans des conférences	14
8.4.	Exposés dans des groupes de travail	14
9.	Évaluation de la recherche	15
9.1.	Activités de rapporteur	15
9.2.	Jurys de thèse et habilitation	15
9.3.	Comités de suivi de thèse	16

10.	Résumé des travaux	16
10.1.	La conjecture standard de type Hodge en dimension quatre	16
10.2.	Irrationnalité et techniques p -adiques	18
10.3.	Périodes ramifiées et corps de définition	19
10.4.	Classes algébriques pour les hyper-kählers lagrangiennes	20
10.5.	Classes algébriques et périodes p -adiques	21
11.	Programme de recherche	24
11.1.	Structures de Hodge non-géométriques	24
11.2.	Contre-exemples à la conjecture de Tate entière	24
11.3.	Classes algébriques et pincesaux	25
11.4.	La conjecture standard de type Hodge en dimension supérieure	26
	Références	26

1. CURRICULUM VITAE ET STUDIORUM

Giuseppe ANCONA	4, rue Silbermann Strasbourg
Maître de conférences	ancona@math.unistra.fr
Université de Strasbourg	06 28 43 49 23
Né le 12 Novembre 1984 à Bari (Italie)	Université de Strasbourg
Nationalité : Italienne	7, rue Descartes Strasbourg
Marié, deux enfants	Page web : http://irma.math.unistra.fr/~ancona/

Diplômes :

- novembre 2022 : **Habilitation à diriger des recherches**, Strasbourg.
- septembre 2009 - novembre 2012 : **Doctorat**, Paris 13, très honorable.
- septembre 2006 - août 2009 : **Masters** ENS ULM, mentions très bien.
- septembre 2003 - août 2006 : **Licence**, SNS Pise, cum laude.
- juillet 2003 : **Bac S**, Lycée « Cirillo », Bari (Italie), mention 100/100.

Postes :

- 2024-2029 : Membre **IUF Junior**.
- depuis septembre 2016 : **Maître de Conférences**, Strasbourg.
- septembre 2015 - août 2016 : **Post-Doctorat**, Zurich.
- janvier 2014 - avril 2014 : **Junior Hausdorff Trimester Program**, Bonn.
- septembre 2013 - août 2015 : **Post-Doctorat**, Essen.
- septembre 2012 - août 2013 : **ATER complet**, LAGA, Paris 13.
- septembre 2009 - août 2012 : **Allocation couplée**, LAGA, Paris 13.

Prix et reconnaissances :

- Septembre 2024 : Membre IUF Junior.
- Avril 2024 : Prix Guy Ourisson du Cercle Gutemberg.
- Septembre 2023 : Projet ANR « Cyclades », responsable du pôle Nord et Est.
- Janvier 2023 : Prime RIPEC.
- Septembre 2018 : Projet ANR « Pergamo ».
- janvier 2018 : Prime PEDR.
- juillet 2006 : Admis à l'ENS ULM (Sélection Internationale).
- Septembre 2003 : Admis à la Scuola Normale Superiore de Pise.
- Mai 2002 : Médaille d'or aux Olympiades Italiennes de Mathématiques.

Organisation de conférences :

- Conférence du Réseau Thématique de théorie des nombres, CIRM, 2026.
- École d'été ETHEN du RT2N, CIRM, Septembre 2024.
- Conférences CAVARET (Courbes, Abelian Varieties And Related Topics), Barcelone, Juillet 2024 et Juillet 2026.
- École d'été sur les périodes à Nysiros (Grèce), Juillet 2023
- Rencontres ANR à Strasbourg, Mars 2023 et Janvier 2025.
- Masterclass de Géométrie Algébrique à Strasbourg, Janvier 2023

- Ecoles d'été JAVA. France, depuis 2016, 8 éditions.
- Workshop : Arithmetic intersection theory and Shimura varieties. Bonn, 2014.

Organisation de séminaires :

- Séminaire du laboratoire IRMA, depuis 2023.
- Séminaire du Rhin sur la transcendance, depuis 2022.
- Séminaire annuel Dijon-Freiburg-Strasbourg, depuis 2017.
- Colloquium mensuel de l'IRMA, depuis 2022.
- Séminaire hebdomadaire de l'équipe AGA à Strasbourg, 2017-24.
- Groupe de travail de l'équipe AGA, 2016-24.
- *RéGA*, Réseau des étudiants en Géométrie Algébrique, IHP Paris, 2011-13.

Responsabilités :

- Responsable de l'axe Géométrie Arithmétique du RT2N de l'INSMI, 2024-28.
- Membre du comité parité de l'IRMA, depuis 2024.
- Membre du comité scientifique du GDR JC2A (CNRS), 2019-204.
- Membre du conseil scientifique de l'IRMA, 2018-2023.
- Membre du conseil scientifique du Laboratoire International Lysm (CNRS - INdAM), 2022-2026.

Encadrement :

- Garant de l'habilitation de Arthur César Le Bras, IRMA, 2025.
- Thèse de Kenza Memlouk, 2024-27.
- Postdoc Nirvana Coppola, 2024.
- Thèse de Thomas Agugliaro, 2022-25.
- Postdoc Mattia Cavicchi, 2020-22.
- M2 de Martin Baget, 2024
- M2 de Thomas Agugliaro, 2022.
- M2 de Sofiar Tur, 2021.
- Au total 25 mémoires de Licence et Master.

Diffusion :

- Interventions pour la semaine des sciences, Ecole Maternelle Schuman et Lycée Européen, 2024-25.
- Exposé au Rallye Math d'Alsace, 2024.
- Stage d'observation d'une collégienne, 2023.
- Encadrement de groupes du Lycée Monnet pour Maths en Jeans, 2022-25.
- Exposé dans le SLIME (pour les étudiants de Licence), 2019.
- Contributions aux activités d'Animath à Paris, 2012.
- Préparation aux Olympiades de Mathématiques, Bari (Italie), 2004-2011.

Formations :

- Questions de genre, AMETHIS, Strasbourg, 7h, 2025.
- Encadrement doctoral, AMETHIS, Strasbourg, 14 h, 2024.

Langues : Italien, Français, Anglais, Espagnol.

Autres Intérêts : Tango Argentin, Foot, Judo.

2. LISTE DE PUBLICATIONS

Publications

- (1) AMBROSI, E., ANCONA, G. : *An Artin–Mumford criterion for conic bundles in characteristic 2*, pré-publication, 2025.
- (2) ANCONA, G., FRATILA, D., VEZZANI, A. : *Ramified periods and field of definition*, pré-publication, 2025.
- (3) ANCONA, G., MARMORA, A. : *The Hilbert symbol in the Hodge standard conjecture*, Commentarii Math. Helv., 2025.
- (4) ANCONA, G., FRATILA, D. : *Algebraic classes in mixed characteristic and André’s p -adic periods*, Journal de Jussieu, 2025.
- (5) ANCONA, G., CAVICCHI, M., LATERVEER, R., SACCÁ, G. : *Relative and absolute Lefschetz standard conjectures for some lagrangian fibrations*, Journal de la LMS, 2025.
- (6) ANCONA, G., FRATILA, D. : *Ngô support theorem and polarizability of quasi-projective commutative group schemes*, EPIGA, 2024.
- (7) ANCONA, G. : *Standard conjectures for abelian fourfolds*, Invent. Math. 223 (2021), no. 1, 149-212.
- (8) ANCONA, G. : *Conservativity of realizations on motives of abelian type over finite fields*, à paraître dans les actes de "Motives and Complex multiplication", 2018.
- (9) ANCONA, G. : *Degeneration of Hodge structures over Picard modular surfaces*, Int. J. Number Theory 13 (2017) ; no. 5, 1145-1164.
- (10) ANCONA, G. : *Numerical functors on Voevodsky’s motives*, Research in Mathematical Sciences 3 (2016), no. 2, 150-178.
- (11) ANCONA, G., HUBER A., PEPIN-LEHALLEUR S. : *On the relative motive of a commutative algebraic group scheme*, Algebraic Geometry 3 (2) (2016) 150-178,
- (12) ANCONA, G. : *Décomposition de motifs abéliens*, Manuscripta Math. Volume 146, Issue 3 (2015), pages 307-328.
- (13) ANCONA, G., ENRIGHT-WARD S., HUBER A. : *On the motive of a commutative algebraic group*, Documenta Math. 20 (2015) 807–858.

Collaborateurs à Strasbourg

- (1) Emiliano Ambrosi
- (2) Mattia Cavicchi
- (3) Dragos Fratila
- (4) Robert Laterveer
- (5) Adriano Marmora

Collaborateurs extérieurs

- (1) Annette Huber (Freiburg)
- (2) Simon Pepin Lehalleur (Nijmegen)
- (3) Giulia Saccà (New York)
- (4) Alberto Vezzani (Milano)

3. ORGANISATION

3.1. Conférences organisées.

3.1.1. *JAVA : Un « Arbeitsgemeinschaft » annuel en France.* L'Arbeitsgemeinschaft est une tradition scientifique allemande (présente notamment à Oberwolfach) qui a été proposée aussi en France, par Jean-Benoît Bost et François Loeser, entre 1995 et 2002 à Luminy (puis en 2004 par Antoine Chambert-Loir et Carlo Gasbarri). Il s'agit d'un groupe de travail condensé en une semaine qui a lieu une fois par an. Les participants votent à la fin de la semaine le sujet de l'année suivante (et un expert qui puisse aider à rédiger un programme).

Olivier Benoist, Javier Fresán, Marco Maculan et moi-même avons repris cette tradition. Cinq éditions ont été organisées sur l'île de Tatihou (Normandie). Les sujets ont été les théorèmes d'algébrisation (expert Jean-Benoît Bost), les domaines de périodes complexes et p -adiques (Yves André), la conjecture $P = W$ (Luca Migliorini), les modules de Hodge mixtes (Claude Sabbah) et les espaces de modules des courbes (Sam Payne).

Nous avons toujours une quarantaine de participants (principalement des étudiants en thèse ou des chercheurs en début de carrière), dont une quinzaine d'orateurs.

Suite à la hausse de prix de Tatihou nous cherchons un nouveau lieu nous avons arrêté l'organisation pendant quelques années. J'ai repris l'organisation et trouvé un nouveau lieu avec des organisateurs plus jeunes à qui je passerai bientôt le relais. Depuis 2024 nous sommes à la Maison Clément du CNRS dans les Cévennes. On a ouvert les inscriptions pour l'édition 2025 et celle de 2026 est en cours d'organisation. Les sujets de cette nouvelle vague sont l'irrationalité d'hypersurfaces (Stefan Schreieder), la o -minimalité (Philipp Habegger) et la construction de classes algébriques (Eyal Markmann).

Détails (et photos!) se trouvent sur la page web de l'événement.

3.1.2. *Conférences CAVARET (Courbes, Abelian Varieties And Related Topics), Barcelone.* Avec Emiliano Ambrosi, Francesc Fité et Xevi Guitart j'ai organisé une conférence à l'université de Barcelone en Juin 2024. Nous avons réuni des experts d'horizons différents qui touchent aux variétés abéliennes. Les aspects arithmétiques, géométriques et cohomologiques étaient présents. Nous avons veillé à avoir un mélange d'origines mathématiques et géographiques ainsi qu'un mélange d'âge et de genre. L'événement a compté environ 90 personnes et a été un grand succès. Une deuxième édition est fixée pour Juillet 2026. Les détails se trouvent sur les pages web des deux événements.

3.1.3. *Masterclass de Géométrie Algébrique à Strasbourg.* J'ai organisé une masterclass avec Rutger Noot en Janvier 2023. C'était l'occasion de faire de la publicité au futur M2 de géométrie algébrique de Strasbourg. Nous avons eu 4 cours de 4 heures donnés par Olivier Benoist, Javier Fresán, Christine Huyghe et Arthur César Le Bras. Nous avons eu une quarantaine d'étudiants provenant de toute la France.

3.1.4. *Rencontres ANR : Cycles, périodes et motifs.* J'ai organisé 2 rencontres ANR (en 2023 et 2025) à Strasbourg. Cela a réuni plusieurs chercheurs de toute la France et a été un événement très apprécié par les collègues strasbourgeois.

3.1.5. *École d'été sur les périodes, Nysiros (Grèce)*. Avec Javier Fresán, Bruno Klingler et Charles Vial, j'ai organisé une école d'été sur l'île de Nysiros (Grèce) en Juillet 2023 sur les périodes. Il y a eu quatre cours de Joseph Ayoub, Raphaël Beauzart, Jean-Benoît Bost et Francis Brown. Nous avons touché différents aspects des périodes, entre autres : études classiques, étude tannakienne, techniques triangulées et aspects automorphes.

3.1.6. *École d'été « Motives for periods »*. Avec Javier Fresán et Simon Pepin Lehalleur, j'ai organisé une école d'été à Berlin en 2017. Le but de l'école était d'introduire les étudiants et les jeunes chercheurs aux différentes catégories de motifs à travers leurs applications spectaculaires récentes aux périodes.

Nous avons eu trois cours de cinq heures, un par Joseph Ayoub sur les catégories triangulées de motifs à la Voevodsky et la conjecture de Kontsevich-Zagier, un par Clément Dupont sur les motifs de Tate et la conjecture de Hoffman d'après Brown et un par Peter Jossen sur les motifs de Nori et les périodes exponentiels. En complément nous avons eu quelques exposés de recherche donnés par des jeunes experts. Nous avons eu une cinquantaine de participants.

3.1.7. *Workshop : « Arithmetic intersection theory and Shimura varieties », Bonn*. Avec Dennis Eriksson, Gerard Freixas, Javier Fresán, Marc-Hubert Nicole et Siddarth Sankaran j'ai organisé une conférence intitulée « Arithmetic intersection theory and Shimura varieties » qui a eu lieu à Bonn du Lundi 3 au Vendredi 7 Février 2014.

Nous avons eu une soixantaine de participants. Les orateurs ont été : F. Andreatta, M. Bertolini, A. Besser, J-B. Bost, J. Burgos, D. Disegni, W. Gubler, B. Howard, J. Kramer, K. Künnemann, M. Longo, A. von Pippich, M. Raum, M. Rapoport, D. Rössler, P. Scholze, M. Viazoska, E. Viehmann, T. Yang et D. Zagier.

L'objectif principal de la conférence était de réunir des experts provenant de différents horizons de l'arithmétique, notamment la géométrie p -adique, la théorie d'Arakelov et les variétés de Shimura, le point de rencontre étant le Programme de Kudla qui vise à mettre en relation les nombres d'intersection de cycles spéciaux sur des variétés de Shimura avec les coefficients de Fourier de formes modulaires.

3.2. Séminaires organisés.

3.2.1. *Séminaire RéGA*. Avec Yohan Brunebarbe, Javier Fresán et Marco Maculan je suis créateur du *RéGA*, Réseau des étudiants en Géométrie Algébrique. Il s'agit d'un rendez-vous mensuel, où les doctorants de la région parisienne qui travaillent autour de la géométrie algébrique peuvent se retrouver. À chaque rencontre, un chercheur et un doctorant sont invités à donner un exposé sur un sujet de leur choix. L'accent est mis sur les motivations, l'historique et les exemples développés.

Le séminaire est né en 2011 et nous avons passé le relais à de nouveaux organisateurs depuis Octobre 2013. Le séminaire est maintenant devenu un rendez-vous habituels de la jeunesse parisienne.

3.2.2. *Groupe de Travail annuel*. À mon arrivé à Strasbourg j'ai souhaité apporter une tradition que j'ai appris à Essen : un groupe de travail par an qui fédère les différents membres de l'équipe, avec une thématique large et un certain nombre d'exposés introductifs. Cette idée a très bien pris, actuellement la quasi-totalité de l'équipe participe et donne un exposé et nous avons eu des sujets très variés qui ont

permis à chacun de mieux comprendre les mathématiques de l'autre. Au début de chaque année nous nous réunissons et qui le souhaite propose un sujet. (D'habitude nous avons 5/6 sujets proposés.) Nous avons eu notamment : variétés abéliennes sur les corps finis, hyperbolicité, Schémas propres et lisses sur \mathbb{Z} , la conjecture de Beauville–Voisin, Dégénérescence de la suite spectrale Hodge–de Rham, Géométrie Algébrique réelle, groupes de monodromie.

3.2.3. *Colloquium de l'IRMA*. Le colloquium réunit une fois par mois tous les chercheurs de l'IRMA des 7 équipes de mathématiques pures et appliquées. L'organisateur précédent, Olivier Guichard, m'a demandé de prendre le relais à partir de la rentrée 2022. Je me concerté avec les différents membres du laboratoire afin de concevoir un programme aussi varié que possible. Dans les invitations je prête attention à la qualité pédagogique des invités, aux questions de genre et écologiques.

3.2.4. *Séminaire de l'IRMA*. Dit « Sém'in », ce séminaire suit le format du colloquium mais c'est toujours une personne de Strasbourg qui expose. Le séminaire avait lieu de façon assez sporadique. J'ai repris l'organisation en 2023 et je me suis engagé à avoir un exposé par semaine. Le séminaire est devenu le rendez-vous hebdomadaire du laboratoire.

3.2.5. *Séminaire de l'équipe à Strasbourg*. J'ai été organisateur du séminaire hebdomadaire de l'équipe Arithmétique et Géométrie Algébrique à Strasbourg de 2017 à 2024.

3.2.6. *Séminaire du Rhin sur la transcendance*. Ce séminaire a été créé en 2022, il réunit deux fois par ans des chercheurs de Bâle, Freiburg et Strasbourg qui travaillent sur la transcendance au sens large. Les organisateurs sont Philippe Habegger, Annette Huber, Amador Pizarro et moi-même. A chaque rencontre nous désignons un orateur par laboratoire.

3.2.7. *Séminaire commun Dijon-Freiburg-Strasbourg*. Avec Annette Huber et Frédéric Déglise j'ai organisé un séminaire récurrent (une ou deux fois par an entre 2017 et 2020) qui avait lieu à l'IRMA et qui réunissait les trois laboratoires. La thématique était l'Arithmétique et les motifs au sens large. Cela permettait aux participants de retrouver leurs collègues voisins et de découvrir sur quoi ils travaillent. A chaque rencontre nous désignons un orateur par laboratoire.

Le séminaire a été interrompu par la pandémie, puis par le départ de Frédéric Déglise à Lyon.

3.2.8. *Journée jeunes chercheurs*. En Janvier 2020 j'ai organisé à l'IRMA une journée autour des jeunes chercheurs en géométrie algébrique. Nous avons eu comme oratrices et orateurs : Laura Capuano, François Greer, Federico Lo Bianco, Anne Lonjou et Mirko Mauri.

4. ACTIVITÉS ADMINISTRATIVES

4.1. **Responsable d'axe dans le RT du CNRS de théorie des nombres.** Depuis 2024 le CNRS a voulu transformer les précédents GDR en RT (Réseaux Thématiques). Il y en a moins et ils sont plus larges et viennent typiquement de la fusion de plusieurs GDR. La création du RT de Théorie des nombres a demandé un travail de réflexion, auquel j'ai participé activement. Je fais actuellement partie de son premier bureau et je suis responsable de l'axe de Géométrie Arithmétique,

qui vise à organiser des activités fédératrices dans la communauté et finance des événements.

4.2. Responsable de pôle dans l'ANR Cyclades. Je suis membre de l'ANR Cyclades et responsable du pôle Nord et Est qui regroupe permanents et doctorants des université de Lille et Strasbourg. Je dispose d'un certain budget qui a permis de recruter une postdoc (Nirvana Coppola), de financer une rencontre que j'ai organisé et les missions des membres de ces deux universités.

4.3. Conseil scientifique de l'IRMA. Le conseil scientifique se réunit une fois par mois et discute de la politique scientifique du laboratoire. La décision principale est celle de la thématique des nouveaux postes à créer au sein du labo. J'étais un des élus du mandat 2018-2023.

4.4. Comité parité de l'IRMA. Je fais partie de ce comité depuis sa création en 2024. Parmi les motions que j'ai proposé on a notamment créé la possibilité de garde d'enfants à l'IRMA pour des jeunes parents invités à donner un exposés

4.5. Comité scientifique du GDR JC2A. Le conseil scientifique discute principalement par mail de la vie du GDR. La tâche la plus importante est la distribution des fonds du GDR (environ 25 000 euros) pour soutenir les conférences en arithmétique organisées par des membres du GDR.

4.6. Conseil scientifique du Laboratoire International Lysm. Le but est de discuter le financement de missions et conférences qui comportent une interaction entre chercheurs français et italiens. Le conseil scientifique est composé d'une dizaine de personnes.

5. ACTIVITÉS D'ENSEIGNEMENT

5.1. Enseignement à l'étranger. Pendant mes deux années de Post-Doctorat à Essen j'ai assuré un cours par an en Master et j'ai aussi donné un cours à l'école doctorale. Annette Huber m'a invité à Friburg pour que je donne un cours aux étudiants en thèse. Pendant mon année à Zurich j'ai encadré un TD en Licence. Tous ces cours ont été dispensés en anglais. Le détail est présent ci-dessous (les trois blocs correspondent aux trois années d'enseignements).

Topologie Algébrique	M1	Mathématiques	Cours et TD	24h
Introduction aux motifs	ED	Mathématiques	Cours	6h
Conjectures de Weil	ED	Mathématiques	Cours	12h
Topologie générale	L3	Mathématiques	Cours	52h
Analyse complexe	L3	Mathématiques	TD	20h

5.2. Enseignement à Strasbourg. J'enseigne à l'IRMA depuis mon arrivée en 2016. Voici le détail des enseignements de ces années. (Chaque bloc correspond à une année d'enseignement du plus récent au plus ancien).

Algèbre	L1	Math	Cours	75h	30p
Groupes	L3	Math	TD	36h	30p
Théorie des schémas	M2	Math	Cours	60h	20p
Algèbre	L1	Math	Cours	96h	30p
Groupes	L3	Math	TD	36h	30p
Géométrie affine	L2	Math	Cours	60h	50p
Algèbre Linéaire	L1	Math	Cours	96h	30p
Algèbre Linéaire	L1	Math	Cours	96h	30 p
Algèbre Linéaire	L1	Math	Cours	96h	30 p
Capes	M1	Math	Cours et TD	96h	40p
Analyse	L1	Math	Cours	17h	100p
Agrégation	M2	Math	Leçons	30h	20p
Arithmétique	L3	Math	TD	51h	30p
Courbes Algébriques	M2	Math	TD	20h	20p
Analyse Réelle	L1	Math	Cours	25 h	100p
Espaces normés	L2	Math-Éco	Cours et TD	10+34 h	100p+30p
Arithmétique	L3	Math	TD	51h	30p
Agrégation	M2	Mathématiques	Leçons	30h	20p
Méthodologie du Travail	L1	Mathématiques	Cours et TD	12h	40p
Espaces normés	L2	Math-Éco	Cours et TD	10+17 h	100p + 30p
Arithmétique	L3	Mathématiques	TD	51h	30p

6. ACTIVITÉS DE DIFFUSION

6.1. **Exposé à la semaine des sciences.** J'ai donné des exposés en 2024 et 2025 au Lycée Européen de Strasbourg et à l'école élémentaire Schuman. J'ai pu donner un aperçu à ces jeunes publics ce que l'on fait en recherche mathématique et cela les a passionné.

6.2. **Math en jeans.** Depuis 2022 je participe à Math en Jeans. Le but de cette activité est d'introduire les jeunes de collège et lycée au goût de la recherche. Je me suis occupé de plusieurs groupes du Lycée Monnet de Strasbourg. Je propose à chaque groupe une question aussi ouverte et flexible que possible et qui soit assez originale et différente de ce à quoi ils sont habitués. Ils cherchent une réponse pendant toute l'année et je les vois de temps en temps. Le but final est de produire un texte et de donner un exposé à la fin de l'année devant les autres lycées qui ont participé au projet.

6.3. **Exposé au Rallye Math.** En Juin 2024 j'ai donné un exposé devant les finaliste du Rallye de Mathématiques d'Alsace, leurs parents et leurs enseignants (environ cent personnes). J'ai donné une introduction à la topologie algébrique, de façon très élémentaire.

6.4. **Encadrement d'une collégienne en stage d'observation.** En Février 2023 j'ai encadré Sasha Sinclair, étudiante en dernière année au collège de l'Esplanade de Strasbourg. Elle a passé une semaine avec moi, elle est venue en cours, en colles, aux séminaires, au colloquium, aux discussions avec mes collaborateurs et aux groupes de travail. Elle a pu apprécier les différentes activités du milieu. On

faisait régulièrement des points pour qu'elle me pose des questions et pour que je lui explique le rôle de chaque activité.

6.5. Exposé dans le SLIME (Séminaire Licence Info-Math). Il s'agit d'un séminaire organisé par les étudiants de Strasbourg qui vise à leur donner une introduction à la recherche. J'y ai donné un exposé en 2019 intitulé « Géométrie et Arithmétique des polynômes ». J'ai présenté de façon élémentaire plusieurs exemples d'interactions entre la géométrie des solutions complexes et l'arithmétique des solutions entières ou modulo p d'une équation polynomiale. J'ai notamment illustré le théorème de Faltings (conjecture de Mordell) et les conjectures de Weil par une liste d'exemples amusants.

6.6. Animath. En 2012 j'ai participé à plusieurs activités de l'association « Animath ». Il s'agissait d'encadrer des élèves de collège ou de lycée et de les faire travailler par groupes sur des problèmes de mathématiques « non scolaires ».

6.7. Olympiades de Mathématiques. J'ai encadré cinq stages de préparation aux Olympiades de Mathématiques dans les lycées de ma ville natale (Bari, Italie) entre 2004 et 2011. Chaque stage était étalé sur cinq ou six journées. Chaque séance (de 3 heures) avait un thème différent (combinatoire, géométrie plane, arithmétique...). Je commençais en donnant des exemples de techniques que l'on peut utiliser, ensuite j'encadrais leur travail en groupe, puis je m'occupais de la correction des exercices.

7. ENCADREMENT

7.1. Encadrement de recherches.

- (1) Garant de l'habilitation de Arthur César Le Bras, IRMA, 2025.
- (2) Thèse de Kenza Memlouk, 2024-27.
- (3) Postdoc de Nirvana Coppola, 2024.
- (4) Thèse de Thomas Agugliaro, 2022-25.
- (5) Postdoc de Mattia Cavicchi, 2020-22.
- (6) M2 Recherche de Martin Baget, 2024
- (7) M2 Recherche de Thomas Agugliaro, 2022.
- (8) M2 Recherche de Sofiar Tur, 2021.

7.2. Encadrement de mémoires.

- (1) Morgane VOLLMER « Nombres p -adiques » Mémoire Licence 2017.
- (2) Jonah FREBAULT « Corps finis » Mémoire pour le concours d'entrée à l'ENS de Lyon (voie universitaire), L2, 2017.
- (3) Maxime GIVELET « Autour du théorème de Chevalley-Waring », Mémoire Agrégation 2018.
- (4) Pierre MUNCH « Formes quadratiques sur les rationnels » M1 2018.
- (5) Jonah FREBAULT Corps p -adiques Mémoire Licence 2018.
- (6) Jean-Pierre NOOT « équations diophantiennes » Mémoire Licence 2019.
- (7) Samuel LAURENT « Le théorème de Burnside » Mémoire Agrégation 2019.
- (8) Thomas BOURNEUF « Théorie des représentations sur des corps généraux » Mémoire Agrégation 2020.

- (9) Toky ANDRIAMANALINA « Corps finis » Mémoire Licence 2020.
- (10) Corentin HAVETTE, Raphaël Fernandez et Yann Magnus « Simplicité de PSL » Mémoire Licence 2020.
- (11) Hugo NARTZ (Orsay) « Introduction à l'algèbre homologique », M1, 2020.
- (12) Corentin HAVETTE « Théorie des représentations », M1, 2021.
- (13) Dounia M'FOUCK « simplicité de PSL », mémoire d'agrégation, 2021.
- (14) Sofian TUR (ENS Lyon) « Catégories tannakiennes », mémoire M2, 2021.
- (15) Arthur DOUAY « Courbes algébriques », Mémoire L3, 2022.
- (16) Yassline BOUAKAZ « Cube de Rubik », mémoire M1, 2022.
- (17) Thomas AGUGLIARO (ENS Ulm) « Théorème d'Honda–Tate », M2, 2022
- (18) Antoine KLUGERTZ (ENS Lyon) « Courbes elliptiques », M1, 2022
- (19) Rim BENS Aidane, « Nombres p -adiques », Licence, 2023.
- (20) Lisa GROFF, « simplicité de PSL », M1, 2023.
- (21) Lorry BLANCHET, « Groupes de matrices », Agrégation, 2023.
- (22) Titouan PERIGNON « Groupes fondamentaux », L3, 2024.
- (23) Martin BAGEL « Cohomologie étale », M2, 2024.
- (24) William CORDONNIER « Transcendance », L3, 2025.
- (25) Léa NASR « Théorème de Burnside », L3, 2025.

8. EXPOSÉS

8.1. Exposés dans des séminaires de recherche à l'étranger.

- (1) Juin 2025 : Séminaire de Géométrie Algébrique, Utrecht (Pays-Bas).
- (2) Janvier 2025 : Séminaire de Théorie des Nombres, Vienne (Autriche).
- (3) Février 2024 : Séminaire de Géométrie Algébrique, Essen (Allemagne).
- (4) Mars 2023 : Séminaire de Géométrie Algébrique, Vienne (Autriche).
- (5) Février 2023 : Séminaire d'Arithmétique, Pisa (Italie).
- (6) Février 2023 : Séminaire de Géométrie, Florence (Italie).
- (7) Janvier 2023 : Séminaire de Géométrie Algébrique, Mayence (Allemagne).
- (8) Décembre 2022 : Colloquium SBF, Regensburg (Allemagne).
- (9) Novembre 2022 : Séminaire de Théorie des nombres, Barcelone (Espagne).
- (10) Novembre 2022 : Séminaire de transcendance du Rhin, Bâle (Suisse).
- (11) Mai 2022 : Séminaire de Géométrie, Rome (Italie).
- (12) Mars 2022 : Séminaire de Géométrie Algébrique, Purdue (Etats Unis).
- (13) Avril 2021 : Séminaire de Géométrie Algébrique, Hannover (Allemagne).
- (14) Mars 2021 : Séminaire sur les périodes, Rio de Janeiro (Brésil).
- (15) Mars 2021 : Séminaire de Géométrie Algébrique, Oslo (Norvège).
- (16) Mars 2021 : Séminaire de Théorie des Nombres, Ben Gurion (Israël).
- (17) Juin 2018 Séminaire de Géométrie Arithmétique, Stockholm (Suède).
- (18) Juin 2018 : Séminaire de Géométrie Arithmétique, Berlin (Allemagne).

- (19) Juillet 2017 : Séminaire de Géométrie Algébrique, Bielefeld (Allemagne).
- (20) Avril 2017 : Séminaire néerlandais d'arithmétique, Nijmegen (Pays-Bas).
- (21) Mars 2017 : Séminaire de Théorie des Nombres, Londres (Royaume Uni).
- (22) Décembre 2016 : Séminaire de Géométrie, Regensburg (Allemagne).
- (23) Avril 2016 : Séminaire de Géométrie Algébrique, Amsterdam (Pays-Bas).
- (24) Avril 2016 : Séminaire Bâle-Dijon, Bâle (Suisse).
- (25) Décembre 2014 : Séminaire de Géométrie Algébrique, Nagoya (Japon).
- (26) Novembre 2014 : Séminaire de Théorie des nombres, Zurich (Suisse).
- (27) Juin 2014 : Séminaire de Géométrie Algébrique, Freiburg (Allemagne).
- (28) Mai 2014 : Séminaire de Géométrie Algébrique, Cambridge (Royaume Uni).
- (29) Juin 2013 : Séminaire de Géométrie Algébrique, Padoue (Italie).

8.2. Exposés dans des séminaires de recherche en France.

- (1) Avril 2025 : Séminaire Géométrie Arithmétique et Motivique, Paris 13.
- (2) Avril 2025 : Séminaire de Théorie des nombres, Lille.
- (3) Mars 2025 : Géométrie Algébrique, Champs et Homotopie, Toulouse.
- (4) Septembre 2024 : Séminaire de formes automorphes, Marseille.
- (5) Avril 2024 : Colloquium de Géométrie, Nancy.
- (6) Mars 2024 : Séminaire de Géométrie Algébrique et Topologie, Montpellier.
- (7) Février 2024 : Séminaire d'Algèbre et Topologie, Angers.
- (8) Janvier 2024 : Séminaire de Géométrie, Grenoble.
- (9) Mars 2023 : Séminaire de Théorie des Nombres, Jussieu.
- (10) Décembre 2021 : Séminaire de Théorie des Nombres, Bordeaux.
- (11) Octobre 2020 : Séminaire de Géométrie Algébrique de Jussieu.
- (12) Janvier 2019 : Séminaire RéGA, Paris.
- (13) Juin 2018 : Géométrie Algébrique, Champs et Homotopie, Toulouse.
- (14) Mai 2018 : Séminaire Géométrie Arithmétique et Motivique, Paris 13.
- (15) Novembre 2017 : Autour des Cycles algébriques, Paris.
- (16) Mars 2017 : Séminaire de Géométrie Algébrique, Nancy.
- (17) Avril 2016 : Séminaire de Géométrie Algébrique, Rennes.
- (18) Mars 2016 : Séminaire de Géométrie Algébrique et Topologie, Montpellier.
- (19) Mars 2016 : Géométrie et Systèmes Dynamiques, Dijon.
- (20) Mars 2015 : Géométrie Algébrique, Champs et Homotopie, Toulouse.
- (21) Mars 2014 : Séminaire de Théorie des nombres, Besançon.
- (22) Décembre 2013 : Séminaire de Géométrie Algébrique, Jussieu.
- (23) Novembre 2013 : Séminaire de Géométrie Algébrique, Rennes.
- (24) Octobre 2013 : Séminaire d'Arithmétique, Strasbourg.
- (25) Février 2013 : Autour des cycles algébriques, Paris 7.
- (26) Février 2013 : Séminaire d'arithmétique, Lyon.
- (27) Janvier 2013 : Séminaire de théorie des nombres, Bordeaux.

8.3. Exposés dans des conférences. :

- (1) Mai 2025 : Arithmetica Transalpina, Genova (Italie).
- (2) Mai 2025 : Hodge theory, Stockholm (Suède).
- (3) Janvier 2025 : Hodge theory, periods and special loci, Berlin (Allemagne).
- (4) Octobre 2024 : Workshop on algebraic cycles, Hannover (Allemagne).
- (5) Octobre 2023 : Journée du GDR GAGC, Poitiers.
- (6) Septembre 2022 : Session de Géométrie Algébrique de la conférence annuelle de la DMV, société mathématique allemande, Berlin (Allemagne).
- (7) Juin 2022 : Special values of L -functions, Oxford (Angleterre).
- (8) Juin 2022 : Dynamical systems and systems of equations, Pisa (Italie).
- (9) Mars 2022 : Conférence de clôture de l'ANR Ecova, Rome (Italie).
- (10) Juin 2021 : Standard conjectures and dynamical systems, Oslo (Norvège).
- (11) Juin 2019 : Motives Today, cours de 6h, Trento (Italie).
- (12) Mai 2018 : Journées de Géométrie Algébrique, Genova (Italie).
- (13) Avril 2018 : Mini-colloque de Géométrie Algébrique, Dijon.
- (14) Décembre 2017 : 70 ans de Jean-Louis Colliot-Thélène, Florence (Italie).
- (15) August 2016 : Motives and Complex Multiplication, Monte Verità (Suisse).
- (16) July 2016 : Motivic cohomology, Oberwolfach (Allemagne).
- (17) Mai 2016 : Regulators IV, Jussieu.
- (18) Décembre 2015 : Journées « Jeunes chercheurs », Strasbourg.
- (19) Décembre 2014 : Motives in Tokyo, Tokyo (Japon).
- (20) Novembre 2014 : Géométrie Algébrique et Géométrie Complexe, Luminy.

8.4. Exposés dans des groupes de travail. :

- (1) Novembre 2024 : « Conjecture de Mumford-Tate », Strasbourg.
- (2) Juillet 2024 : « La décomposition de la diagonale, d'après Voisin », JAVA.
- (3) Mars 2024 : « La méthode de Lawrence-Venkatesh », Strasbourg.
- (4) Octobre 2023 : « Théorème de décomposition », Strasbourg.
- (5) Mars 2023 : « Problème de Galois inverse », Strasbourg.
- (6) Janvier 2022 : « Dimension essentielle, via la cohomologie prismatique, d'après Farb–Kisin–Wolfson », Strasbourg.
- (7) Octobre 2021 : « Méthode de la fibration et approximation fine, d'après Benoist–Wittenberg », Strasbourg.
- (8) Juiller 2021 : « Caractéristique d'Euler des espaces de modules des courbes, d'après Payne et al. », JAVA.
- (9) Mars 2021 : « Nombres de Hodge en caractéristique positive », Strasbourg.
- (10) Janvier 2021 : « Dégénérescence de la suite spectrale Hodge–de Rham, d'après Deligne–Illusie », Strasbourg.
- (11) Septembre 2020 : « Schémas propres et lisses sur \mathbb{Z} », Strasbourg.

- (12) Janvier 2018 : « Notion de positivité pour les fibrés », Strasbourg.
- (13) Janvier 2017 : « Les conjectures de Weil pour les surfaces K3 », Strasbourg.
- (14) Octobre 2016 : « Variétés abéliennes sur un corps fini », Strasbourg.
- (15) Avril 2015 : « L'exemple d'Artin et Mumford », Essen.
- (16) Novembre 2014 : « Conjectures de Beilinson et courbes modulaires », Essen.
- (17) Juillet 2014 : « La courbe modulaire de niveau infini est perfectoïde », Essen.
- (18) Novembre 2013 : « Algèbres de Hecke », Essen.
- (19) Juillet 2013 : « La conjecture de Tate pour les surfaces K3 », Essen.
- (20) Juillet 2013 : « Multizêtas d'après Brown », Essen
- (21) Mars 2011 : « Preuve de Weil I », LAGA.
- (22) Juin 2010 : « Régulateurs classiques », LAGA.
- (23) Janvier 2010 : « Surfaces de Picard », LAGA.
- (24) Novembre 2009 : « Extensions unipotentes de variétés de Shimura », LAGA.
- (25) Mai 2009 : « Formule des traces en cohomologie étale », IHP.

9. ÉVALUATION DE LA RECHERCHE

9.1. Activités de rapporteur.

- (1) Math Zentralblatt.
- (2) Math Sci Net.
- (3) Mathematischen Annalen.
- (4) Journal de l'IMJ.
- (5) Crelle.
- (6) Documenta Math.
- (7) Manuscripta Math.
- (8) Forum, Sigma.
- (9) Communications in Contemporary Mathematics.
- (10) Advances in Mathematics.
- (11) Gazette des mathématiques.
- (12) Annales Henri Lesbesgue.
- (13) European Journal of Mathematics.
- (14) Lecture Notes in Mathematics Series, Springer.

9.2. Jurys de thèse et habilitation.

- (1) Membre du jury et garant de l'HDR d'Arthur César Le Bras, 2025.
- (2) Membre du jury de thèse de Antoine Szabo, Strasbourg, 2024.
- (3) Rapporteur et membre du jury de thèse de Haohao Liu, Strasbourg, 2024.
- (4) Membre du jury de thèse de Long Liu, Paris 7, 2024.
- (5) Rapporteur et membre du jury de thèse d'Ivan Rosas-Soto, Dijon, 2023.
- (6) Membre du jury de la thèse de Mattia Cavicchi, Paris 13, 2019.
- (7) Rapporteur et membre du jury de thèse de Natascia Zangani Trento (Italie), 2020.

9.3. Comités de suivi de thèse.

- (1) Jean-Jil Duchamps (Directeur : Olivier Fouquet, Besançon), 2024.
- (2) Jinglin Wang (Directeur : Xiaolin Zeng), 2023
- (3) Roméo Troubat (Directeur : Olivier Guichard), 2023.
- (4) Clarence Kineider (Directeur : Olivier Guichard), 2021, 2022.
- (5) Martin Miou-Mouton (Directeur : Charles Frances), 2020.
- (6) Alexandre Eimer (Directeur : Pierre Guillot), 2020.

10. RÉSUMÉ DES TRAVAUX

Je travaille en géométrie algébrique et arithmétique. Je m'intéresse à la cohomologie des variétés algébriques et aussi aux motifs, aux cycles algébriques et aux périodes. Les applications géométriques et arithmétiques de cette étude font également partie de mes intérêts, par exemple les questions de rationalité ou de corps de définition.

J'aime particulièrement l'interaction entre la géométrie complexe et la géométrie sur les corps finis et comment l'une peut être utile à l'autre (dans chaque direction). J'essaie autant que possible d'appliquer des théories fines à des problèmes relativement concrets.

Mes variétés préférées sont les variétés abéliennes, les variétés hyper-kähler, les variétés de Shimura et les hypersurfaces. Mes outils préférés sont la théorie de Hodge, les faisceaux pervers, la cohomologie ℓ -adique, la théorie de Hodge p -adique, les complexes motiviques à la Voevodsky, la théorie des représentations et les catégories tannakiennes. Je suis ouvert aux mathématiques de mes collègues et j'essaie constamment d'élargir mon spectre d'intérêts.

Je présente ici mes travaux plus récents. Ils sont également présentés avec plus de détails (mais toujours dans un esprit, je l'espère, pédagogique) dans mon Habilitation, disponible sur ma page web ou sur Arxiv. On pourra par ailleurs y retrouver également des travaux plus anciens, certains de nature géométrique comme des décompositions d'anneaux de Chow à la Beauville [AHPL16] d'autres de nature arithmétique comme la conjecture de conservativité pour les variétés abéliennes définies sur un corps finis [Anc18].

10.1. La conjecture standard de type Hodge en dimension quatre. Dans [Gro58], Grothendieck redémontre un résultat (appelé souvent théorème de l'indice de Hodge) qui décrit la signature du produit d'intersection des diviseurs sur une surface. Quelques années plus tard, il formule une conjecture (qui fait partie du corpus des conjectures standards) qui souhaiterait généraliser ce résultat aux variétés de dimension plus grande (et aux cycles de codimension quelconque). Nous la rappelons ici.

Soit k un corps de base, X une variété projective et lisse sur k de dimension g et L une section hyperplane. Considérons les cycles algébriques à coefficients rationnels modulo équivalence numérique. Pour $i \leq g/2$ soit $V^i(X)$ l'espace des cycles α sur X de codimension i et tels que $\alpha \cdot L^{g-2i+1} = 0$ (ce que l'on peut appeler la partie primitive). Définissons un accouplement sur cet espace

$$P : Z_1, Z_2 \mapsto (-1)^i \deg(Z_1 \cdot Z_2 \cdot L^{g-2i}),$$

à valeurs dans \mathbb{Q} . La conjecture standard de type Hodge prédit que cet accouplement est défini positif.

En caractéristique zéro, cette conjecture est une conséquence des relations de Hodge-Riemann. En caractéristique positive, mis à part le résultat pour les diviseurs cité plus haut, il n'y a eu aucune avancée inconditionnelle depuis la formulation de la conjecture, bien que Grothendieck ait considéré les conjectures standard comme « la tâche la plus urgente en Géométrie Algébrique » [Gro69]. J'ai démontré le premier énoncé inconditionnel sur cette conjecture [Anc21] :

Théorème 10.1.1. *La Conjecture standard de type Hodge est vraie pour les variétés abéliennes de dimension quatre définies sur un corps de caractéristique p .*

L'idée pour démontrer cet énoncé est de comparer deux \mathbb{Q} -formes quadratiques, q_1 donnée par l'accouplement P ci-dessus (produit d'intersection sur les cycles) et q_2 donnée par le cup-produit sur (un morceau convenable de) la cohomologie singulière d'une variété abélienne complexe \tilde{A} qui relève A (ce relèvement n'existe pas toujours, mais on peut faire des dévissages pour s'y ramener). On effectue donc les étapes suivantes.

- (1) On calcule $q_2 \otimes \mathbb{R}$. Ceci est effectué avec les relations de Hodge-Riemann.
- (2) On démontre que $q_1 \otimes \mathbb{Q}_\ell$ et $q_2 \otimes \mathbb{Q}_\ell$ sont isomorphes pour tout premier ℓ différent de p . C'est le théorème de changement de base propre et lisse, joint au théorème de comparaison entre cohomologie singulière et cohomologie ℓ -adique, dû à Artin.
- (3) On compare $q_1 \otimes \mathbb{Q}_p$ et $q_2 \otimes \mathbb{Q}_p$ à l'aide de la théorie de Hodge p -adique. C'est le point le plus délicat.
- (4) On écrit une formule du produit pour les symboles locaux de Hilbert de q_1 et q_2 . Grâce aux étapes précédentes le seul terme inconnu est $q_1 \otimes \mathbb{R}$, qui est bien celui que l'on voulait calculer.

Remarque 10.1.2. Un commentaire sur l'hypothèse de dimension quatre. La stratégie esquissée est générale et permet de calculer le symbole de Hilbert de $q_1 \otimes \mathbb{R}$, voir [AM25]. Ce symbole permet de donner des informations sur la signature de la forme quadratique mais en général ne la détermine pas.

Si une forme quadratique q est de dimension 2 alors elle est définie positive si et seulement si elle a un discriminant positif et elle représente un carré sur les réels. Chacune de ces propriétés peut se tester par l'étude des complétions non archimédiennes de q , comme esquissé plus haut.

En général les formes quadratiques q_1 et q_2 ci-dessus sont de dimension plus grande (par exemple pour une variété abélienne de dimension quatre cela peut aller jusqu'à 70). Il est donc nécessaire de décomposer les formes quadratiques q_1 et q_2 ci-dessus en somme orthogonale (de sous-structures de Hodge ou de motifs) pour appliquer la stratégie.

Ceci n'est pas possible pour toutes les variétés, mais il se trouve que ce l'est pour une variété abélienne de dimension quatre. Plus précisément, si A est une telle variété, on peut découper le $H^4(A)$ en plusieurs facteurs. Certains n'auront pas de classes algébriques, donc on peut les ignorer. D'autres n'auront que des produits de diviseurs ; on pourra les traiter directement. Enfin on peut montrer que ceux qui restent à étudier auront dimension deux, c'est un calcul qui n'est pas évident. Pour ceux-là on appliquera la stratégie esquissée ci-dessus.

10.2. Irrationalité et techniques p -adiques. (Avec Emiliano Ambrosi.)

Soit X une hypersurface complexe projective et lisse de dimension N et de degré d . Elle est donc définie dans l'espace projectif \mathbb{P}^{N+1} par une équation $f = 0$, où f est un polynôme homogène de degré d . On se demande si X est rationnelle, autrement dit si un ouvert de Zariski de X est isomorphe à un ouvert de Zariski de \mathbb{P}^N . C'est le cas pour $d = 2$, il suffit de fixer un point $P \in X$ et de faire passer des droites par P : puisque le degré est 2, hormis les droites tangentes, chaque droite coupera X en un et un seul point différent de P .

Cette construction ne peut pas fonctionner en degré supérieur et en fait assez peu de constructions similaires sont connues. On s'attend alors qu'une hypersurface très générale est irrationnelle pour $d \geq 3$ (et $N \geq 3$). Le meilleur résultat connu dans cette direction est dû à Schreieder [Sch19] : une hypersurface très générale est irrationnelle pour $d \geq \log_2 N + 2$.

Une des constructions de variétés irrationnelles qui a été parmi les plus influentes est due à Artin et Mumford [AM72]. Supposons qu'une variété admette une fibration en coniques $Y \rightarrow B$ telle que le discriminant soit l'union disjointe de deux diviseurs D_1 et D_2 et au-dessus de chaque D_i les fibres sont l'union de deux droites projectives échangées par la monodromie, alors le H^{2N-2} -singulier de Y a de la 2-torsion, ce qui force l'irrationalité. Cette technique a eu pendant longtemps peu d'applications aux hypersurfaces pour deux raisons : les fibrations qu'on sait construire ont discriminant connexe et, souvent, avec groupe fondamental trivial.

La révolution apportée au sujet par Voisin permet, grosso modo, de tester l'irrationalité après dégénérescence convenable [Voi15]. Maintes applications ont été données depuis, notamment Colliot-Thélène et Pirutka [CTP16] ont pu appliquer l'argument d'Artin et Mumford à $d = 4$ et $N = 3$. Dans ce cas, une hypersurface légèrement singulière admet une fibration avec les hypothèses voulues.

Pour $d = 4$ et $N \geq 3$ on pourrait imiter leur construction : on trouverait encore un discriminant avec plusieurs composantes mais elles auraient groupe fondamental trivial. L'idée de ce projet est de contourner ce problème en dégénéralant vers la caractéristique 2.

Stratégie [AA25]. Soient x, y, z_1, \dots, z_N les variables de \mathbb{P}^{N+1} et considérons f de degré $d = 4$ de la forme

$$f = ax^2 + by^2 + z_1 z_2 xy + g,$$

où a, b et g sont des polynômes uniquement en les variables z_i . Notons \tilde{X} l'éclaté de X le long de la droite définie par l'annulation des z_i . On a alors une fibration en conique $\tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^{N-1}$ induit par la projection vers les coordonnées z_i . Si on dégénère en caractéristique 2 le discriminant est particulièrement facile à calculer : au-dessus de $z_1 z_2 = 0$ on a des droites doubles et au-dessus de $g = 0$ on a l'union de deux droites. Comme le font Artin et Mumford, on peut éclater la base et modifier la fibration de sorte à ce que ces trois composantes irréductibles deviennent disjointes. (On remarquera, par contre, que ces trois composantes ont groupe fondamental trivial pour $N \geq 4$: on ne peut pas appliquer Artin–Mumford.)

Considérons une fibre F_1 au-dessus d'un point de la composante $z_1 = 0$ et une fibre F_2 au-dessus d'un point de $z_2 = 0$ et soient F'_i les fibres avec la structure

réduite. On peut considérer dans le H^{2N-2} -cristallin la classe algébrique donnée par la différence $F'_1 - F'_2$. C'est une classe de 2-torsion : contrairement à Artin-Mumford, qui le montre en utilisant la monodromie, ce fait est facile et suit de la structure double des fibres F_i .

Théorème 10.2.1. *La classe construite ci-dessus est non nulle. De plus, la torsion dans le H_{cris}^{2N-2} -cristallin détecte l'irrationalité.*

Pour remonter cette information de la caractéristique 2 à une hypersurface très général complexe, on doit suivre les arguments de dégénérescence de Voisin et en particulier contrôler les singularités de X . Ce point technique nous bloque pour l'instant et nous pouvons mener à bien que des cas en petite dimension. On espère pouvoir améliorer les applications dans un travail successif.

10.3. Périodes ramifiées et corps de définition. (Avec Dragos Fratila et Alberto Vezzani.)

Shimura a construit des exemples de courbes hyperelliptiques complexes qui sont isomorphes à leur conjuguées complexes sans qu'elles ne descendent sur \mathbb{R} et en fait sans même que la Jacobienne ne descende. Les exemples construits utilisent beaucoup de transcendants dans leur équations. Peu d'exemples analogues sur des corps de nombres sont connus, on en a surtout en genre 2 et avec des équations assez compliquées (travaux de Maistre et al.). Dans [AFV25] nous construisons des exemples assez simples en genre grand.

Théorème 10.3.1. *Pour tout genre g congru à 1 modulo 4 et tout nombre premier p ne divisant pas $g + 1$, il existe une infinité de $a \in \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ tels que la courbe hyperelliptique C_a d'équation affine $y^2 = x^{2g+2} - a$ soit isomorphe à sa conjuguée mais elle ne descend pas sur \mathbb{Q} et plus précisément il n'y a aucune variété abélienne A sur \mathbb{Q} telle que $A_{\mathbb{Q}(\sqrt{p})}$ soit isogène à la Jacobienne de C_a .*

Ce résultat est obtenu grâce à une nouvelle obstruction que l'on appelle « périodes ramifiées ». (Le nom s'explique par une vague analogie que l'on pourrait voir avec les périodes classiques, cf. 10.5.1 ; ainsi que par la présence d'extensions ramifiées.)

Soit X une variété projective et lisse sur $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ et soit X_p sa réduction modulo p que l'on supposera encore lisse. On dispose d'un théorème de comparaison $H_{\text{dR}}(X) \otimes_{\mathbb{Q}(\sqrt{p})} \mathbb{Q}_p(\sqrt{p}) \cong H_{\text{cris}}(X_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(\sqrt{p})$. On peut se poser la question suivante :

(*) Est-ce qu'il existe une $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ -base de $H_{\text{dR}}(X)$ qui est envoyée, via l'identification ci-dessus, sur une \mathbb{Q}_p -base de $H_{\text{cris}}(X_p)$?

Si X descend sur \mathbb{Q} à une variété Y qui a encore bonne réduction en p la réponse est oui : on pourra prendre une \mathbb{Q} -base de $H_{\text{dR}}(Y)$. On voit donc que la réponse négative à la question (*) est une obstruction à la descente. Celle-ci est l'idée de départ de notre travail. Comme on veut une obstruction à l'existence d'une telle Y , qu'elle soit à bonne réduction ou non, il faut travailler plus ; l'obstruction que l'on obtient est plus difficile à décrire, mais de même nature.

Pour pouvoir mettre en pratique cette obstruction, il faut notamment savoir répondre à la question (*) pour des X concrets. De façon surprenante, cela n'est

pas évident, mais on a pu développer des techniques dans des cas particuliers, comme celui du Théorème 10.3.1.

10.4. Classes algébriques pour les hyper-kählers lagrangiennes. (Avec Matia Cavicchi, Robert Laterveer et Giulia Saccà.)

La conjecture standard de type Lefschetz est une autre des quatre conjectures standard de Grothendieck. Elle est de nature très différente de celle au §10.1 et, en un sens, plus classique : il s'agit ici de construire des classes algébriques, un peu comme pour la conjecture de Hodge ou de Tate.

Le point de départ de notre travail [ACLS25] est une idée récente de Voisin [Voi22] que l'on regarde dans la perspective du théorème de décomposition.

Soit L un diviseur ample sur une variété X de dimension d_X . La conjecture standard de type Lefschetz prédit que les inverses des isomorphismes de Lefschetz

$$(10.1) \quad \cup L^n : H^{d_X-n}(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^{d_X+n}(X, \mathbb{Q})$$

sont également algébriques.

Supposons que X admette un morphisme $f : X \rightarrow B$ vers une base B qui est aussi projective et lisse. Nous nous demandons jusqu'à quel point connaître la conjecture standard de type Lefschetz pour B et pour les fibres lisses de f peut aider pour montrer la conjecture standard de type Lefschetz pour X .

Le théorème de décomposition implique en particulier une décomposition¹ de structures de Hodge

$$(10.2) \quad H^n(X) = \bigoplus_{a+b=n} H^a(B, {}^pR^b f_* \mathbb{Q}).$$

Soient η un diviseur sur X qui soit relativement ample, L_B un diviseur ample sur B , β son tiré en arrière sur X et d_f la dimension de la fibre générique de f . Le théorème de décomposition fournit aussi les isomorphismes

$$(10.3) \quad \cup \eta^b : H^a(B, {}^pR^{d_f-b} f_* \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^a(B, {}^pR^{d_f+b} f_* \mathbb{Q}),$$

$$(10.4) \quad \cup \beta^a : H^{d_B-a}(B, {}^pR^b f_* \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^{d_B+a}(B, {}^pR^b f_* \mathbb{Q}).$$

La combinaison de (10.2), (10.3) et (10.4) peut suggérer que la conjecture standard de type Lefschetz pour X se ramène à montrer que les inverses des isomorphismes (10.3) et (10.4) sont algébriques. De plus, à première vue, on pourrait penser que ces inverses se ramènent uniquement à l'étude des fibres de f et de la base B . Mais il faut en fait faire attention à un certain nombre de subtilités.

- (1) Les faisceaux pervers ${}^pR^b f_* \mathbb{Q}$ dépendent aussi des fibres singulières du morphisme f , notamment il pourrait y avoir des facteurs directs de ${}^pR^b f_* \mathbb{Q}$ supportés sur le lieu singulier.
- (2) Inverser l'action de L_B sur la cohomologie de B ne suffit pas à inverser β . En effet $f^*H(B) \subset H(X)$ ne représente que le facteur $H^*(B, {}^pR^0 f_* \mathbb{Q})$ de la décomposition (10.2). C'est le point plus catastrophique.
- (3) Même si on était capables de construire des correspondances algébriques Λ_{η^b} et Λ_{β^a} qui agissaient comme les inverses de (10.3) et (10.4) il ne serait pas clair comment les mettre ensemble pour en déduire une correspondance

1. Une telle décomposition n'est pas unique en général, seulement la filtration associée l'est.

algébrique $\Lambda_n : H^{d_X+n}(X) \xrightarrow{\sim} H^{d_X-n}(X)$. Il faudrait par exemple contrôler comment Λ_{η^b} agit sur les autres degrés pervers différents de b . C'est délicat, notamment parce que les opérateurs η et β ne sont pas bigradués en général.

Dans le cas des variétés hyper-kähler qui admettent une fibration lagrangienne on peut espérer contourner ces problèmes : le théorème du support de Ngô (que l'on ne rappelle pas ici) donne une description explicite des faisceaux pervers ${}^p R^b f_* \mathbb{Q}$, un argument de Voisin permet grosso-modo de construire une deuxième fibration lagrangienne qui inverse le rôle de η et β (en réduisant le problème (2) au problème (1)), enfin Shen et Yin ont montré que les opérateurs η et β sont en fait bigradués pour les fibrations lagrangiennes.

Ces arguments nous permettent de démontrer un critère suffisant pour qu'une variété hyper-kähler satisfasse à la conjecture standard de type Lefschetz. Ce qui limite en ce moment les applications du critère ce sont les hypothèses du théorème de Ngô. Actuellement nous savons les vérifier pour les variétés de type O'Grady 10 construites par Laza–Saccà–Voisin et en déduire pour elles la conjecture standard de type Lefschetz. D'autre part il est attendu par la communauté que toutes les fibrations lagrangiennes vérifient les hypothèses du théorème de Ngô. C'est par ailleurs une question qui attire de plus en plus de chercheurs (le travail [AF24] va dans cette direction), on peut donc espérer que le champs d'applications de notre critère s'élargira rapidement.

10.5. Classes algébriques et périodes p -adiques. (Avec Dragos Fratila.) Le travail [AF25] a pour motivation la compréhension de deux « pathologies » de la géométrie arithmétique.

- (1) La conjecture de Tate pour les variétés sur un corps fini prédit le \mathbb{Q}_p -espace vectoriel engendré par les classes algébriques mais ne décrit pas le \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par ces dernières [Mil07, Aside 6.5].
- (2) Les périodes p -adiques de Fontaine ont toutes les propriétés cohomologiques que les périodes classiques (complexes) ont, mais n'ont pas les mêmes propriétés de transcendance [And90] ni la même connexion aux fonctions spéciales (logarithme, fonctions Gamma, ...).

La contribution que nous apportons dans ce travail consiste à remarquer que ces deux pathologies sont liées. Cela nous a permis notamment de construire une \mathbb{Q} -algèbre dénombrable $\mathcal{P}_p \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$, que l'on appelle « périodes p -adique à la André » et qui jouit de toutes les propriétés classiques des périodes complexes, notamment le lien entre transcendance et groupes de Galois motiviques.

Je résume ici la construction classique complexe (§10.5.1), les approches antérieures à une version p -adique (§10.5.2), puis je donne notre approche (10.5.3).

10.5.1. Périodes classiques complexes. Soit X une variété sur \mathbb{Q} (ou on pourrait choisir un autre corps de nombres). Sa cohomologie de de Rham \mathcal{C}^∞ à coefficients complexes est un \mathbb{C} -espace vectoriel qui est muni de deux \mathbb{Q} -structures. L'une est la cohomologie singulière $H_{\text{sing}}(X)$ (théorème de comparaison de de Rham) et l'autre est la cohomologie de de Rham algébrique $H_{\text{dR}}(X)$ (théorème de comparaison de Grothendieck). Les périodes complexes de X sont les coordonnées complexes d'une base d'une \mathbb{Q} -structure par rapport à l'autre. Ces coordonnées dépendent bien entendu des bases choisies, mais le \mathbb{Q} -espace qu'elles engendrent $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(X) \subset \mathbb{C}$ en est indépendant.

Par exemple si on considère $X = \mathbb{G}_m$, ces espaces ont dimension un, on a donc une seule période, c'est $2i\pi$. En effet les théorèmes de comparaisons ci-dessus passent par l'intégration de formes différentielles, et on retrouve $2i\pi$ comme l'inégrale de la forme non exacte dz/z le long du lacet non trivial qui tourne une fois autour de l'origine. D'autres exemples peuvent être donnés, on y retrouve des nombres complexes d'intérêt arithmétiques : valeurs spéciales du logarithme, de la fonction zêta, de la fonction Gamma et d'autres. D'un point de vue arithmétique c'est intéressant de borner la transcendance de ces nombres et d'en prédire la transcendance exacte. Une idée remarquablement simple et profonde de Grothendieck permet de le faire, elle se base sur la théorie des motifs et le formalisme tannakien.

Considérons tous les isomorphismes possibles $H_{\text{sing}}(X) \otimes R \cong H_{\text{dR}}(X) \otimes R$, pour toute \mathbb{Q} -algèbre R , qui satisfassent la dualité de Poincaré, la formule de Künneth et la compatibilité à l'application classe de cycle. Grothendieck montre que ce foncteur est représentable par une \mathbb{Q} -variété \mathcal{T}_X . Par construction les périodes sont les coordonnées d'un \mathbb{C} -point de \mathcal{T}_X . En particulier le degré de transcendance de $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(X)$ est borné par la dimension de \mathcal{T}_X . Grothendieck conjecture de plus que cette borne doit être optimale.

Bien entendu pour que cette borne soit utilisable il faut être en mesure de calculer la dimension de \mathcal{T}_X . Pour cela Grothendieck considère les automorphismes $H_{\text{dR}}(X) \otimes R \cong H_{\text{dR}}(X) \otimes R$ et montre que ce foncteur est représentable par un groupe $G_{\text{dR}}(X)$. L'action naturelle de $G_{\text{dR}}(X)$ sur \mathcal{T}_X fait de ce dernier un torseur. En particulier, $G_{\text{dR}}(X)$ et \mathcal{T}_X ont la même dimension. L'avantage est que le groupe algébrique $G_{\text{dR}}(X)$ peut assez souvent se décrire (moralement parce qu'il y a moins de groupes algébriques que de variétés!). Par exemple si X est une courbe elliptique alors $G_{\text{dR}}(X)$ est GL_2 dans le cas non CM et un tore de rang 2 dans le cas CM.

Ces approches ont été utilisées pour montrer des résultats arithmétiques profonds, comme le théorème de Brown sur les multizêtas [Bro12] ou le théorème d'Ayoub sur la version relative de la conjecture de Kontsevich–Zagier [Ayo15]. Ce qui est frappant c'est que ces énoncés ont une formulation élémentaire mais leur preuve est loin de l'être!

10.5.2. *Approches précédentes aux périodes p -adique.* Il y a eu plusieurs tentatives de construction d'un pendant p -adique de l'histoire précédente. Listons les brièvement. Gardons toujours une variété X sur \mathbb{Q} , disons projective et lisse et fixons un premier p de bonne réduction et appelons X_p la réduction modulo p .

Fontaine remarque que la théorie de Hodge p -adique donne en particulier un isomorphisme $H_{\text{sing}}(X) \otimes B_{\text{dR}} \cong H_{\text{dR}}(X) \otimes B_{\text{dR}}$, une fois que l'on fixe un isomorphisme $\mathbb{C} \cong \mathbb{Q}_p$. On pourra donc définir les périodes comme coordonnées d'une \mathbb{Q} -structure par rapport à l'autre. Par les arguments tannakiennes du cas complexes, ces périodes ont degré de transcendance borné par la dimension de $G_{\text{dR}}(X)$. Fontaine demande si cette borne est encore optimale. André montre que ceci n'est pas le cas [And90] et plus précisément que le degré de transcendance de ces périodes dépend de l'isomorphisme $\mathbb{C} \cong \mathbb{Q}_p$ choisi.

André lui-même propose une deuxième approche [And03]. Si X est une variété abélienne à réduction supersingulière, la cohomologie cristalline de la réduction X_p a deux \mathbb{Q} -structures. D'une part la cohomologie de de Rham de X (théorème de comparaison de Berthelot) de l'autre les classes algébriques en caractéristique p , par définition de réduction supersingulière. On peut encore écrire les coordonnées d'une \mathbb{Q} -structure par rapport à l'autre et il conjecture que leur degré de transcendance est

optimal. Ceci semble raisonnable, car lié à certaines conjectures de transcendance plus classiques. D'autre part, on aimerait disposer d'une telle construction dans un cadre plus générale (autre que des variétés abéliennes à réduction supersingulière).

Furusho et Brown [Fur07, Bro17] ont proposé de considérer l'action du Frobenius sur la cohomologie cristalline et de définir les périodes comme les coefficients de la matrice de l'action par rapport à une base rationnelle de la cohomologie de de Rham. Cette définition a l'avantage d'être générale, d'autre part, comme ils le remarquent, la borne avec la dimension de $G_{\text{dR}}(X)$ est loin d'être optimale. Par exemple les relations entre périodes données par la rationalité du polynôme caractéristique du Frobenius n'ont pas d'explications tannakiennes.

Notre approche généralise celle d'André et corrige celle de Furusho et Brown.

10.5.3. *Une nouvelle approche.* Considérons une variété projective et lisse X sur \mathbb{Q} (ou de façon plus générale sur un corps de nombres), fixons p un premier de bonne réduction et soit X_p la réduction de X modulo p . La cohomologie cristalline de X_p est un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel qui possède deux sous- \mathbb{Q} -espace vectoriels naturels. L'un est la cohomologie de de Rham de X , l'autre est $Z_p(X_p)$, l'espace des classes algébriques sur X_p à coefficients rationnels. On fera attention au fait que le premier a la même dimension que celle de la cohomologie cristalline alors que le deuxième est en général plus petit.

On peut fixer une \mathbb{Q} -base de la cohomologie de de Rham de X et écrire chaque élément de $Z_p(X_p)$ en coordonnées par rapport à cette base. Une telle coordonnée sera un nombre dans \mathbb{Q}_p que l'on appelle « période p -adique à la André ». L'ensemble des périodes p -adiques (obtenu en faisant varier la variété X) forme une \mathbb{Q} -algèbre dénombrable strictement incluse dans \mathbb{Q}_p . Dans cette algèbre on peut exhiber des valeurs spéciales de fonctions remarquables comme le logarithme p -adique ou la fonction Gamma p -adique ou les multizêtas p -adiques.

Comme dans le cas des périodes classiques, on a envie de prédire le degré de transcendance de ces périodes. Le formalisme tannakien classique ne peut pas s'appliquer (on ne dispose que d'un foncteur fibre et il n'y a pas de torseur d'isomorphismes). Une partie du travail a été de réadapter le formalisme à ce cadre.

Ainsi, inspirés par des constructions de Drinfeld sur la grassmannienne affine, on considère toutes les injections possibles $Z_p(X_p) \otimes R \hookrightarrow H_{\text{dR}}(X) \otimes R$, compatibles à un certain nombre de structures. Nous montrons que ce foncteur est représentable par un espace \mathcal{H}_X , dont l'action naturelle de $G_{\text{dR}}(X)$ est transitive, mais pas fidèle en général ! Nous déterminons également le stabilisateur d'un point bien choisi. Ceci permet donc de déterminer la dimension de \mathcal{H}_X et donc de donner des bornes à la transcendance des périodes p -adiques à la André. Remarquons par ailleurs que la dimension de \mathcal{H}_X est en général plus petite que celle de $G_{\text{dR}}(X)$; ceci permet de corriger la borne de Furusho et Brown. (Nous montrons de plus que les relations données par le polynômes caractéristiques du Frobenius ont bien une interprétation tannakienne dans notre contexte.)

Nous espérons que ce cadre tannakien puisse être utile à l'études de l'arithmétique de certains nombres p -adiques. Peut-être qu'un jour des théorèmes aussi frappants que celui d'Ayoub ou de Brown mentionnés plus haut seront montrés dans un cadre p -adique avec ces techniques.

11. PROGRAMME DE RECHERCHE

Je présente ici des questions sur lesquelles je souhaite travailler dans le futur proche. Certaines sont en continuité avec des questions que j'ai déjà regardées (§11.3,11.4), d'autres prennent de nouvelles directions (§11.1, 11.2).

11.1. Structures de Hodge non-géométriques. Dans un préprint récent de Tobias Kreutz [Tob23], que j'ai exposé à Berlin à l'occasion d'une conférence en sa mémoire, l'auteur revisite une vieille question : construire une structure de Hodge polarisée qui ne soit pas le facteur direct de la cohomologie d'une variété (on dira, structures de Hodge non-géométriques). Un vieil argument de Mumford permet de voir que de telles structures existent. Kreutz donne les premiers candidats explicites : il construit des structures de Hodge polarisées qui, sous la conjecture des périodes de Grothendieck (cf. 10.5.1), ne sont pas géométriques. La question de trouver une structure de Hodge polarisée pour laquelle on sache montré inconditionnellement qu'elle n'est pas géométrique reste ouverte.

L'article de Kreutz montre clairement que c'est en fait une question de nature arithmétique. L'idée est la suivante : si la structure de Hodge était géométrique la variété X qui la réalise serait définissable sur un corps k de type fini. On peut ensuite borner ce degré inférieurement et supérieurement purement par théorie de Hodge. Une borne vient de l'application des périodes et la transversalité Griffiths. L'autre utilise la conjecture des périodes. Dans certains exemples ces bornes se contredisent, ce qui empêchent l'existence de X .

L'article donne très envie d'utiliser d'autres informations arithmétiques qui pourraient montrer de façon inconditionnelle qu'une telle variété X ne peut pas exister. Par exemple la réduction de X modulo des premiers pourrait être exploitée. Parmi les exemples construits par Kreutz, certains sont munis d'une polarisation qui n'a pas de vecteurs isotropes rationnels et même à coefficients dans \mathbb{Q}_p pour un p bien choisi. Si la structure de Hodge était géométrique, cette information se lirait dans la cohomologie étale p -adique de la variété X . Pour des structures de Hodge bien choisies (parmi celles de Kreutz) on peut voir, en utilisant la théorie de Hodge p -adique, que cela met des restrictions très forte à la réduction de X modulo p . Pour l'instant j'arrive à exclure tous les polygones de Newton possible sauf un : si la réduction existait elle serait supersingulière. Une idée supplémentaire pourrait exclure ce cas aussi.

11.2. Contre-exemples à la conjecture de Tate entière. (Avec Olivier Benoist.)

Olivier Benoist a exposé un travail sur de nouveaux contre-exemples à la conjecture de Hodge entière et il a également mentionné ce que l'on connaît de la conjecture de Tate entière. On s'attend à ce que toutes les variétés de dimension jusqu'à trois vérifient la conjecture de Tate entière (comme conséquence de la conjecture de Tate classique) et on a des contre-exemples en dimension au moins cinq. Le cas de dimension quatre est ouvert : on s'attend à l'existence de contre-exemples mais il n'y en a pas actuellement.

Son exposé m'a fait penser qu'une variante entière des arguments esquissés au §10.1 pourraient être utilisées pour construire de tels contre-exemples en dimension quatre. Nous nous sommes convaincus que les obstructions que l'on regarde sont vraiment nouvelles, d'autre part on ne sait pas encore les utiliser pour obtenir des contre-exemples.

Les variétés que l'on pense regarder sont des variétés qui possèdent des bons théorèmes de Torelli (notamment variétés hyper-kähler) qui permettent d'en trouver avec des propriétés cohomologiques souhaitées. L'idée serait alors de considérer une variété complexe X avec sa réduction modulo p , X_p , et considérer deux réseaux q_1 donné par le produit d'intersection sur les cycles² sur X_p et q_2 donné par le cup-produit sur (un morceau convenable de) la cohomologie singulière de X . La conjecture de Tate entière - que l'on espère contredire - nous décrit $q_1 \otimes \mathbb{Z}_\ell$ pour tout nombre premier ℓ (y compris p). D'autre part, si l'on connaît suffisamment bien la cohomologie de X , on peut décrire $q_2 \otimes \mathbb{Z}_\ell$. Enfin, on connaît également $q_1 \otimes \mathbb{R}$ et $q_2 \otimes \mathbb{R}$ par ce que l'on a expliqué au §10.1. L'idée est alors de jouer avec les différents théorèmes de comparaisons - encore une fois comme au §10.1 - pour obtenir des restrictions.

11.3. Classes algébriques et pinceaux. Ce projet naît des idées du travail présenté au §10.4. On souhaiterait appliquer le même genre de techniques à d'autres variétés que les variétés hyper-kähler en construisant des fibrations bien choisies - par exemple des fibrations de Lefschetz - qui joueraient le rôle des fibrations lagrangiennes.

Par exemple, on peut montrer le résultat suivant

Proposition 11.3.1. *Soit $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ une fibration de Lefschetz dont la fibre générique vérifie la conjecture standard de type Lefschetz (par exemple f est une fibration en surfaces). Alors il existe une décomposition*

$$(11.1) \quad H^*(X) = \bigoplus_b H(\mathbb{P}^1, {}^pR^b f_* \mathbb{Q})$$

qui est induite par des correspondances algébriques. De plus chaque facteur de la décomposition est isomorphe à son dual, par un isomorphisme induit par des correspondances algébriques.

Toute variété de dimension trois admet une fibration de Lefschetz après éclatement le long d'une courbe C . D'autre part la formule de l'éclatement montre que la conjecture standard de type Lefschetz pour X se ramène à celle pour $Bl_C(X)$. Si l'on veut étudier la conjecture standard de type Lefschetz pour une variété X de dimension trois on peut donc supposer que X admet une telle fibration. Ce qui manque à la proposition ci-dessus pour déduire cette conjecture serait alors de montrer que la décomposition

$$(11.2) \quad H^*(\mathbb{P}^1, {}^pR^b f_* \mathbb{Q}) = \bigoplus_{a=0}^2 H^a(\mathbb{P}^1, {}^pR^b f_* \mathbb{Q}),$$

est induite par des correspondances algébriques.

Inspirés par l'idée de Voisin, esquissée au §10.4, on peut essayer de construire une deuxième fibration $g : X \rightarrow \mathbb{P}^2$ telle que β soit relativement ample (ces constructions sont toujours possibles après éclatement). Pour une telle fibration on sait montrer l'existence d'une décomposition

$$(11.3) \quad H^*(X) = \bigoplus_{a=0}^2 H(\mathbb{P}^2, {}^pR^a g_* \mathbb{Q})$$

2. Contrairement à ce qui est présenté au §10.1, il faut travailler ici à coefficients entiers.

induite par des correspondances algébriques. Le problème est qu'en général la décomposition (11.3) n'induit pas la décomposition (11.2). C'est lié au fait que les actions de η et β ne sont pas bigraduées en général, problème soulevé au §10.4.

Sait-on trouver une paire de telles fibrations (f, g) telle que l'action de η et β soit bigraduée? La description de la filtration perverse par rapport à l'action de β due à De Cataldo et Migliorini peut aider? Peut-on utiliser des théorèmes motiviques plus sophistiqués, comme les cycles évanescents motiviques d'Ayoub, pour contourner ces difficultés?

11.4. La conjecture standard de type Hodge en dimension supérieure. Le but de ce projet est d'attaquer la conjecture standard de type en Hodge pour des variétés abéliennes de dimension arbitraire. Un résultat partiel a été obtenu dans [AM25].

La stratégie évoquée au §10.1 se base sur la formule du produit des symboles de Hilbert. Comme expliqué dans la Remarque 10.1.2 le symbole de Hilbert ne suffit pas en général à déterminer la signature toute entière (ce qui limite notre résultat du §10.1 à la dimension quatre).

La formule du produit s'interprète comme une suite exacte de certains groupes de cohomologie Galoisienne pour le groupe SO. On peut espérer exploiter plus de données géométriques (par exemple la multiplication complexe des variétés abéliennes sur des corps finis) pour ramener la question à des groupes de cohomologie galoisienne de groupes algébriques plus petits (des tores dans le cas de la multiplication complexe) et espérer que les groupes de cohomologies aux places locales p -adiques déterminent les informations locales à l'infini.

Une deuxième stratégie d'attaque pourrait être la suivante. Milne a démontré que la conjecture de Hodge pour les variétés abéliennes complexes implique la conjecture standard de type Hodge pour toutes les variétés abéliennes [Mil02]. Son argument se base sur des techniques tannakiennes. On pourrait espérer qu'une bonne compréhension de ses techniques en complément de celles p -adique que j'ai présentées au §10.1 pourraient donner des résultats inconditionnels. On peut par ailleurs espérer que les techniques galoisiennes et les techniques tannakiennes se combinent (les groupes tannakiens qui apparaissent chez Milne sont aussi des tores).

RÉFÉRENCES

- [AA25] Emiliano Ambrosi and Giuseppe Ancona. An Artin–Mumford criterion for conic bundles in characteristic 2. *ArXiv*, 2025.
- [ACLS25] Giuseppe Ancona, Mattia Cavicchi, Robert Laterveer, and Giulia Saccà. Relative and absolute lefschetz standard conjectures for some lagrangian fibrations. *Journal de la LMS*, 2025.
- [AF24] Giuseppe Ancona and Dragos Fratila. Ngô support theorem and polarizability of quasi-projective commutative group schemes. *EPIGA*, 2024.
- [AF25] Giuseppe Ancona and Dragos Fratila. Algebraic classes in mixed characteristic and André's p -adic periods. *Journal de l'IMJ*, 2025.
- [AFV25] Giuseppe Ancona, Dragos Fratila, and Alberto Vezzani. Ramified periods and field of definition. *ArXiv*, 2025.
- [AHPL16] Giuseppe Ancona, Annette Huber, and Simon Pepin Lehalleur. On the relative motive of a commutative group scheme. *Algebr. Geom.*, 3(2) :150–178, 2016.
- [AM72] M. Artin and D. Mumford. Some elementary examples of unirational varieties which are not rational. *Proc. London Math. Soc.* (3), 25 :75–95, 1972.

- [AM25] Giuseppe Ancona and Adriano Marmorà. The Hilbert symbol in the Hodge standard conjecture. *Commentarii Math. Helv.*, 2025.
- [Anc18] Giuseppe Ancona. Conservativity of realization functors on motives of abelian type over finite fields. *Proceedings of "Motives and Complex Multiplication"*, Fresán, Jetchev, Jossen and Pink editors, 2018.
- [Anc21] Giuseppe Ancona. Standard conjectures for abelian fourfolds. *Invent. Math.*, 223(1) :149–212, 2021.
- [And90] Yves André. p -adic Betti lattices. In *p -adic analysis (Trento, 1989)*, volume 1454 of *Lecture Notes in Math.*, pages 23–63. Springer, Berlin, 1990.
- [And03] Yves André. *Period mappings and differential equations. From \mathbb{C} to \mathbb{C}_p . Tôhoku-Hokkaidô lectures in arithmetic geometry. With appendices : A : Rapid course in p -adic analysis by F. Kato, B : An overview of the theory of p -adic uniformization by F. Kato, C : p -adic symmetric domains and Totaro's theorem by N. Tsuzuki*, volume 12. Tokyo : Mathematical Society of Japan, 2003.
- [Ayo15] Joseph Ayoub. Une version relative de la conjecture des périodes de Kontsevich-Zagier. *Ann. of Math. (2)*, 181(3) :905–992, 2015.
- [Bro12] Francis Brown. Mixed Tate motives over \mathbb{Z} . *Ann. of Math. (2)*, 175(2) :949–976, 2012.
- [Bro17] Francis Brown. Notes on motivic periods. *Commun. Number Theory Phys.*, 11(3) :557–655, 2017.
- [CTP16] Jean-Louis Colliot-Thélène and Alena Pirutka. Hypersurfaces quartiques de dimension 3 : non-rationalité stable. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 49(2) :371–397, 2016.
- [Fur07] Hidekazu Furusho. p -adic multiple zeta values. II. Tannakian interpretations. *Amer. J. Math.*, 129(4) :1105–1144, 2007.
- [Gro58] Alexander Grothendieck. Sur une note de Mattuck-Tate. *J. Reine Angew. Math.*, 200 :208–215, 1958.
- [Gro69] Alexander Grothendieck. Standard conjectures on algebraic cycles. In *Algebraic Geometry (Internat. Colloq., Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1968)*, pages 193–199. Oxford Univ. Press, London, 1969.
- [Man68] Ju. I. Manin. Correspondences, motifs and monoidal transformations. *Mat. Sb. (N.S.)*, 77 (119) :475–507, 1968.
- [Mil02] James Stuart Milne. Polarizations and Grothendieck's standard conjectures. *Ann. of Math. (2)*, 155(2) :599–610, 2002.
- [Mil07] J. Milne. The tate conjecture over finite fields. pages 1–27. 2007. Available on the author's webpage.
- [Sch19] Stefan Schreieder. Stably irrational hypersurfaces of small slopes. *J. Amer. Math. Soc.*, 32(4) :1171–1199, 2019.
- [Tob23] Kreuzt Tobias. Hodge structures not coming from geometry. *ArXiv*, 2023.
- [Voi15] Claire Voisin. Unirational threefolds with no universal codimension 2 cycle. *Invent. Math.*, 201(1) :207–237, 2015.
- [Voi22] Claire Voisin. On the Lefschetz standard conjecture for Lagrangian covered hyper-Kähler varieties. *Adv. Math.*, 396 :Paper No. 108108, 29, 2022.

IRMA, UNIVERSITÉ DE STRASBOURG 7, RUE RENÉ DESCARTES, 67000 STRASBOURG
 E-mail address: ancona@math.unistra.fr
 URL: <http://irma.math.unistra.fr/~ancona/>