DOSSIER DE CANDIDATURE AU POSTE DE MAÎTRE DE CONFÉRENCE 4348 À L'UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

GIUSEPPE ANCONA

Table des matières

1. Curriculum Vitae et Studiorum

Giuseppe ANCONA
Post-Doc
Université Zurich
Né le 12 Novembre 1984 à Bari (Italie)
Nationalité : Italienne
marié, un enfant

Loorenstrasse, 31 CH-8007 Zurich (Suisse)
giuseppe.ancona@math.uzh.ch
06 28 43 49 23
Universität Zürich
Winterthurerstr. 190 CH-8057 Zurich (Suisse)
Page web : http ://user.math.uzh.ch/ancona/

Formation :
- juillet 2015 : **Agrégation** en Mathématiques.
- septembre 2009 - novembre 2012 : **Doctorat** en Mathématiques sous la direction de J. Wildeshaus au Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications, Université Paris 13, mention très honorable.
- septembre 2006 - août 2009 : **Masters** en Mathématiques, École Normale Supérieure, Paris, mentions très bien.
- septembre 2003 - août 2006 : **Licence** en Mathématiques, Scuola Normale Superiore, Pise (Italie), mention 110 cum laude.
- juillet 2003 : **Bac S**, Lycée « Cirillo », Bari (Italie), mention 100/100.

Postes :
- septembre 2015 - août 2017 : **Post-Doctorat** à l'université de Zurich, auprès du groupe de recherche de J. Ayoub.
- janvier 2014 - avril 2014 : Junior Hausdorff Trimester Program « Algebraic Geometry », dans le groupe « méthodes p-adiques en géométrie d'Arakelov et variétés de Shimura », au Hausdorff Research Institute for Mathematics.
- septembre 2013 - août 2015 : **Post-Doctorat** à l'université de Duisburg-Essen, auprès du groupe de recherche de M. Levine.
- septembre 2012 - août 2013 : **ATER complet** au LAGA, Université Paris 13.
- septembre 2009 - août 2012 : **Allocation couplée** et **Monitorat** au sein du LAGA, Université Paris 13.

Prix et reconnaissances :
- juillet 2006 : Admis à l'École Normale Supérieure de Paris (Sélection Internationale).
- septembre 2003 : Admis à la Scuola Normale Superiore de Pise.
- mai 2002 : Médaille d'or aux Olympiades Italiennes de Mathématiques.

Publications

- Ancona, G. : *Décomposition de motifs abéliens*, Manuscripta Math. Volume 146, Issue 3 (2015), pages 307-328.
- Ancona, G., Enright-Ward S., Huber A. : *On the motive of a commutative algebraic group*, Documenta Math. 20 (2015) 807–858.
- Ancona, G. : *Degeneration of Hodge structures over Picard modular surfaces*, 18 pages, soumis.
- Ancona, G., Huber A., Pepin-Lehalleur S. : *On the relative motive of a commutative algebraic group scheme*, Algebraic Geometry 3 (2) (2016) 150-178,
- Ancona, G. : *Numerical functors on Voevodsky's motives*, 16 pages, Research in Mathematical Sciences 2016. DOI : 10.1186/s40687-016-0061-1

Organisation de séminaires et conférences :

- *RéGA*, Réseau des étudiants en Géométrie Algébrique. IHP Paris, fréquence mensuelle, 2011 - 2013.
- Workshop : Arithmetic intersection theory and Shimura varieties.
  HIM Bonn, Février 2014.
- Arbeitsgemeinschaft : Algebraization Theorems. Juillet 2016.
  See http ://webusers.imj-prg.fr/ marco.maculan/java/

Langues :

- Italien : langue maternelle.
- Français : pratique courante.
- Espagnol : bon niveau.
- Anglais : bon niveau.
- Allemand : connaissances de base.

Autres Intérêts :

- Tango argentin.
- Judo.

2. Publications

- Ancona, G. : *Décomposition de motifs abéliens*, Manuscripta Math. Volume 146, Issue 3 (2015), pages 307-328.
- Ancona, G., Enright-Ward S., Huber A. : *On the motive of a commutative algebraic group*, Documenta Math. 20 (2015) 807–858.
- Ancona, G., Huber A., Pepin-Lehalleur S. : *On the relative motive of a commutative algebraic group scheme*, Algebraic Geometry 3 (2) (2016) 150-178,
- Ancona, G. : *Numerical functors on Voevodsky's motives*, 16 pages, Research in Mathematical Sciences 2016. DOI : 10.1186/s40687-016-0061-1

Textes soumis :

- Ancona, G. : *Degeneration of Hodge structures over Picard modular surfaces*, 18 pages. Disponible sur ma page personelle.

Les textes ci-dessus sont disponibles sur ma page personnelle ainsi que sur ArXiv.

Thèse et Mémoires :

- Novembre 2012 : « Décomposition du motif d'un schéma abélien universel », thèse de doctorat de l'Université Paris XIII, sous la direction de J. Wildeshaus.
- juillet 2009 : « Sur l'irréductibilité générique du numérateur de la fonction Zeta dans une famille de courbes à large monodromie » mémoire de M2 sous la direction de F. Orgogozo (École Polytechnique).
- juin 2008 : « Construction de l'espace de module des courbes de genre g » avec Y. Brunebarbe, sous la direction de J-B. Bost (Université d'Orsay).
- juin 2007 : « Sur le groupe de l'icosaèdre » mémoire de maîtrise avec Y. Brunebarbe, sous la direction de F. Paulin (ENS - Université d'Orsay).
- mai 2006 : « Sur les corps hilbertiens » mémoire de licence sous la direction de U. Zannier (Scuola Normale Superiore), en italien.

3. Activités administratives

3.1. **Séminaire RéGA.** Avec Yohan Brunebarbe, Javier Fresán et Marco Maculan je suis créateur et organisateur du *RéGA*, Réseau des étudiants en Géométrie Algébrique. Il s'agit d'un rendez-vous mensuel, où les doctorants de la région parisienne qui travaillent autour de la géométrie algébrique peuvent discuter, le but étant d'acquérir une culture de base dans les divers sujets étudiés actuellement dans ce domaine. À chaque rencontre, un chercheur et un doctorant sont invités à faire un exposé d'une heure et demie sur un sujet de leur choix. L'accent est mis sur les motivations, l'historique et les exemples développés.

Le séminaire est maintenant en place depuis Octobre 2011 et nous avons passé le relai à des nouveaux organisateurs depuis Octobre 2013.

Le RéGA a lieu à l'IHP, et attire une trentaine de personnes rattachées à des laboratoires différents (Paris 6, Paris 7, Paris 11, Paris 13, ENS, École Polytechnique, IHÉS), principalement des doctorants mais aussi des chercheurs confirmés.

Nous avons invité à parler plusieurs doctorants, jeunes chercheurs et les professeurs A. Beauville, J-B. Bost, P. Cartier, J-L. Colliot-Thélène, J-P. Demailly, H. Esnault, L. Illusie, Y. Manin, L. Moret-Bailly, M. Nakamaye, J-P. Serre, C. Soulé, C. Voisin.

Le séminaire est financé par l'IHP (pauses-café) et par l'ANR ARIVAF (frais de transport et d'hébergement pour les invités).

Plus d'informations sont disponibles sur le site du séminaire
http ://www.math.u-psud.fr/~maculan/rega/
(un lien se trouve à partir de ma page personnelle).

3.2. **Workshop : Arithmetic intersection theory and Shimura varieties.** Avec Dennis Eriksson, Gerard Freixas, Javier Fresán, Marc-Hubert Nicole et Siddarth Sankaran j'ai organisé une conférence intutilée « Arithmetic intersection theory and Shimura varieties » qui a eu lieu à Bonn du Lundi 3 au Vendredi 7 Février 2014.

Nous avons eu une soixantaine de participants. Les orateurs ont été : F. Andreatta, M. Bertolini, A. Besser, J-B. Bost, J. Burgos, D. Disegni, W. Gubler, B. Howard, J. Kramer, K. Künnemann, M. Longo, A. von Pippich, M. Raum, M. Rapoport, D. Rössler, P. Scholze, M. Viazoska, E. Viehmann, T. Yang et D. Zagier.

L'objectif principal de la conférence était de réunir experts provenant de différent horizons de l'arithmétique, notamment la géométrie p-adique, la théorie d'Arakelov et les variétés de Shimura, le point de rencontre étant le Programme de Kudla qui vise à mettre en relation les nombres d'intersection de cycles spéciaux de variétés de Shimura avec les coefficients de Fourier de formes modulaires.

Plus d'informations sont disponibles sur le site du workshop
http ://www.him.uni-bonn.de/programs/current-trimester-program/jhtpalgebraic-geometry/workshop-arithmetic-intersection-theory-and-shimura-varieties/
(un lien se trouve à partir de ma page personnelle).

3.3. **Un « Arbeitsgemeinschaft » annuel en France.** L'Arbeitsgemeinschaft est une tradition scientifique allemande (présente notamment à Oberwolfach) qui a été proposée aussi en France, par Jean-Benoît Bost et François Loeser, entre 1995 et 2002 à Luminy (puis en 2004 par Antoine Chambert-Loir et Carlo Gasbarri). Il s'agit d'un groupe de travail condensé en une semaine qui a lieu une fois par an. Les participant votent à la fin de la semaine le sujet de l'année suivante (et un expert qui puisse aider à rédiger un programme).

Javier Fresán, Marco Maculan et moi-même, nous allons reprendre cette tradition. La première édition aura lieu du 4 au 8 Juillet 2016 sur l'île de Tatihou (Normandie). Le sujet sera *Théorèmes d'algébricité* (des résultats classiques dans l'esprit de GAGA et SGA 2, jusqu'aux développements plus récents, comme l'étude des feuilletages algébriques sur les corps de nombres) et l'expert sera Jean-Benoît Bost.

Le comité scientifique sera composé de Jean-Benoît Bost, Jérôme Poineau et Tamás Szamuely. Nous prévoyons quarante participants (principalement des étudiants en thèse ou des chercheurs en début de carrière), dont quinze orateurs. Nous prendrons en charge le séjour de tous les participants ainsi que les frais de transport des orateurs, grâce au financements de Compositio Foundation, IHP, Journal de Théorie des nombres de Bordeaux, regroupement de recherche GAGC (géométrie algébrique et complexe), regroupement de recherche GDRTDN (théorie des nombres), ANR Régulateurs, ERC TOSSIBERG.

4. Activités d'enseignement

4.1. **Enseignement en France.** J'ai enseigné à l'Institut Galilée (Université Paris 13) pendant les trois ans de monitorat et l'année d'ATER complet. J'ai surtout encadré des TD en Licence, mais aussi en Master. Je me suis occupé aussi de la préparation à l'agrégation, et j'ai assuré des cours en Licence et des Colles dans la prépa de l'institut.

Le détail est présent ci-dessous (les quatre blocs correspondent aux quatre années d'enseignements).

Analyse et Algèbre	L2	Économie et Finance	TD	36h
Analyse et Algèbre	L2	pluri-disciplinaire	Cours de rattrapage	21h
Analyse et Algèbre	L2	Économie et Finance	TD	24h
Algèbre Commutative	M2	Mathématiques	TD	20 h
Arithmétique	L2	Informatique	Cours de rattrapage	6h
Analyse	Prépa	Ingénierie	Colles	10h
Structures Algébriques	L3	Mathématiques	TD	64h
Mathématiques 1	L1	pluri-disciplinaire	Cours-TD	99h
Algèbre linéaire	L1	Mathématiques	TD	36h
Prépa-Agrég		Mathématiques	Leçons	20h

En Licence je me suis occupé de la rédaction des feuilles de TD, du contrôle continu et des partiels, ainsi que de leur correction. Dans ce cadre, j'ai participé aux réunions avec les autres enseignants et contribué à concevoir les programmes pour les années futures.

En Master je préparais un devoir maison par semaine et je corrigeais les copies rendues par les étudiants (pour après insister sur les points plus délicats en TD).

Dans la préparation à l'Agrégation, j'ai encadré des leçons mais j'ai aussi corrigé au tableau des épreuves écrites d'Agrégation des années précédentes.

4.2. **Enseigement à l'étranger.** Pendant mes deux années de Post-Doctorat à Essen j'ai assuré un cours par an en Master et j'ai aussi donné un cours à l'école doctorale. Annette Huber m'a invité à Friburg pour que je donne un cours aux étudiants en thèse. Pendant mon année à Zurich j'ai encadré un TD en Licence. Tous ces cours ont été dispensés en anglais.

Le détail est présent ci-dessous (les trois blocs correspondent aux trois années d'enseignements).

Topologie Algébrique	M1	Mathématiques	Cours et TD	24h
Introduction aux motifs	ED	Mathématiques	Cours	6h
Conjectures de Weil	ED	Mathématiques	Cours	12h
Topologie générale	L3	Mathématiques	Cours	52h
Analyse complexe	L3	Mathématiques	TD	20h

Pour le cours de Topologie Algébrique je me suis occupé de la rédaction de devoirs maison et de leurs corrections.

4.3. **Animath.** En 2012 j'ai participé à plusieures activités de l'association « Animath ». Il s'agissait d'encadrer des élèves de collège ou de lycée et de les faire travailler par groupes sur des problèmes de mathématiques « non scolaires ».

Dans ce cadre j'ai participé aux réunions avec les autres enseignants, rédigé des comptes-rendus et proposé des nouveaux problèmes.

Les activités avaient lieu à l'ENS, au lycée Henri IV ou à la BNF, et j'y ai participé pour une totalité d'environ 20 heures.

4.4. **Olympiades de Mathématiques.** J'ai encadré cinq stages de préparation aux Olympiades de Mathématiques dans les lycées de ma ville natale (Bari, Italie) entre 2004 et 2011. Chaque stage était étalé sur cinq ou six journées. Chaque séance (de 3 heures) avait un thème différent (combinatoire, géométrie plane, arithmétique...). Je commençais en donnant des exemples des techniques qu'on peut utiliser, ensuite j'encadrais leur travail en groupe, puis je m'occupais de la correction des exercices.

À chaque stage, les étudiants étaient entre vingt et trente, et j'étais aidé par un professeur du lycée. J'étais aussi chargé de choisir les exercices à leur proposer et de rédiger un polycopié qui résumait les idées traitées.

4.5. **Divers.** Pendant l'été 2000 j'ai donné deux stages de judo pour enfants (environ 30 heures au total). Depuis 2011 je remplace occasionnellement mon enseignant de tango (environ 20 heures au total).

5. Activités de recherche

Exposés dans des séminaires de recherche :

— Avril 2016 : Séminaire de Géométrie Algébrique, Amsterdam.
— Avril 2016 : Séminaire Bäle-Dijon, Bâle (Suisse).
— Avril 2016 : Séminaire de Géométrie Algébrique, Rennes.
— Mars 2016 : Séminaire de Géométrie Algébrique, Montpellier.
— Mars 2016 : Géométrie et Systèmes Dynamiques, Dijon.
— Mars 2015 : Géométrie Algébrique, Champs et Homotopie, Toulouse.
— Décembre 2014 : Séminaire de Géométrie Algébrique, Nagoya (Japon)
— Novembre 2014 : Séminaire de Théorie des nombres, Zurich (Suisse)
— Juin 2014 : Séminaire de Géométrie Algébrique, Freiburg (Allemagne)
— Mai 2014 : Séminaire de Géométrie Algébrique, Cambridge (Royaume Uni)
— Mars 2014 : Séminaire de Théorie des nombres, Besançon.
— Février 2014 : Séminaire d'Arithmétique, Bonn (Allemagne)
— Décembre 2013 : Séminaire de Géométrie Algébrique, Jussieu.
— Novembre 2013 : Séminaire de Géométrie Algébrique, Rennes.
— Octobre 2013 : Séminaire d'Arithmétique, Strasbourg.
— Juin 2013 : Séminaire de Géométrie Algébrique, Padoue (Italie).
— Février 2013 : Autour des cycles algébriques, Paris 7.
— Février 2013 : Séminaire d'arithmétique, Lyon.
— Janvier 2013 : Séminaire de théorie des nombres, Bordeaux.

Exposés dans des conférences :

— August 2016 : Conférence « Motives and Complexe Multiplication », Monte Verità (Suisse).
— July 2016 : Workshop « Algebraic K-theory and Motivic cohomology », Oberwolfach (Allemagne).
— Mai 2016 : Conférence « Regulators IV », Jussieu.
— Décember 2015 : Journées « Jeunes chercheurs », Strasbourg.
— Décembre 2014 : Workshop « Motives in Tokyo », Tokyo (Japon).
— Novembre 2014 : Conférence Géométrie Algébrique et Géométrie Complexe, Luminy.

Exposés dans des groupes de travail :

— Avril 2015 : « L'exemple de Artin et Mumford », dans « Notions de rationnalité », Essen.
— Novembre 2014 : « Conjectures de Beilinson pour les courbes modulaires », dans « Valeurs spéciales et Conjectures de Beilinson », Essen.
— Juillet 2014 : « La courbe modulaire de niveau infini est perfectoïde », dans « Perfectoïdes », Essen.
— Novembre 2013 : « Algèbres de convolution », dans « Algèbres de Hecke », Essen.

— Juillet 2013 : « Conjecture d'Artin d'après Charles », dans « La conjecture de Tate pour les surfaces K3 », Essen.
— Juillet 2013 : « Multizêtas d'après Brown », dans « Motifs de Tate mixtes », Essen
— Mars 2011 : « Preuve de Weil I », dans « Les conjectures de Weil d'après Deligne », LAGA.
— Juin 2010 : « Régulateurs classiques », dans « Régulateurs », LAGA.
— Janvier 2010 : « Surfaces de Picard », dans « Théorie de Hodge et Variétés de Shimura », LAGA.
— Novembre 2009 : « Extensions unipotentes », dans « Théorie de Hodge et Variétés de Shimura », LAGA.
— Mai 2009 : « Formule des traces », dans « Cohomologie étale », IHP.

Autres exposés mathématiques :

— Février 2014 : « Variété de Shimura et motifs, d'après Milne ». Séminaire de l'HIM, Bonn (Allemagne).
— Février 2013 : « Motifs classiques, exemples ». Séminaire « MathJeunes », ENS.
— Avril 2011 : « Représentations des groupes finis ». Séminaire des doctorants, LAGA.
— Octobre 2009 : « Les conjectures de Weil ». Séminaire des doctorants, LAGA.

Conférences :

— Décember 2015 : Journées « Jeunes chercheurs », Strasbourg.
— Décebre 2014 : Workshop « Motives in Tokyo », Tokyo (Japon)
— Février 2014 : « Arithmetic intersection theory and Shimura varieties », Bonn (Allemagne).
— Décembre 2013 : « Fundamental Groups in Arithmetic and Algebraic Geometry », Pise (Italie).
— Septembre 2013 : « Motivic Galois Groups », Budapest (Hongrie).
— Juin 2012 : « Colloque en l'honneur de Pierre Cartier pour son 80ème anniversaire », IHÉS.
— Mars 2012 : « Colloque en l'honneur de Yuri Ivanovich Manin pour son 75ème anniversaire », IHÉS.
— Janvier 2012 : « Arithmetic, Motives and Moduli Spaces », IHP.
— Septembre 2011 : « Géométrie Arithmétique et Motivique », CIRM.
— Mai 2011 : « Semaine spéciale Géométrie Algébrique », Strasbourg.
— Juillet 2010 : « Regulators III », Barcelone (Espagne).
— April 2010 : « Cohomology of Algebraic Varieties, Hodge Theory, Algebraic Cycles, Motives », IHP.
— Mai 2008 : Etats de la recherche 2008 de la Société Mathématiques de France « Variétés rationnellement connexes : aspects géométriques et arithmétiques », Strasbourg.
— Mars 2008 : « GL_2 », CIRM.
— Octobre 2007 : « Développements récents en approximation diophantienne »,CIRM.

Écoles d'été :

— Mars 2015 : « p-adic Arithmetic », Essen (Allemagne).
— Juin 2014 : « Berkovich spaces and applications », Strasbourg.
— Juin 2012 : « Around the Zilber-Pink conjectures », Jussieu.
— Juin 2011 : « Motives and Milnor conjecture », Jussieu.

Groupes de travail :

— Printemps 2015 : « Notions de rationnalité », Essen.
— Automne 2014 : « Valeurs spéciales et Conjectures de Beilinson », Essen.
— Automne 2014 : « Théorie du corps de classe en dimension supérieure », Essen.
— Printemps 2014 : « Perfectoïdes », Essen.
— Automne 2013 : « Motifs associés aux formes modulaires », Essen.
— Automne 2013 : « Algèbres de Hecke », Essen.
— Printemps 2013 : « La conjecture de Tate pour les surfaces K3 », Essen.
— Printemps 2013 : « Motifs de Tate mixtes », Essen
— Printemps 2012 : « Cohomologie cristalline », LAGA.
— Novembre 2011 : « Rencontre ARIVAF - Conjecture de Mumford-Tate », IHP.
— Mai 2011 : « Rencontre ARIVAF - cohomologie étale », IHP.
— Année 2011 : « Les conjectures de Weil d'après Deligne », LAGA.
— Été 2010 : « Régulateurs », LAGA.
— Printemps 2010 : « Motifs de Beilinson », LAGA.
— Hiver 2010 : « Théorie de Hodge et Variétés de Shimura », LAGA.
— Printemps 2009 : « Cohomologie étale », IHP.

Cours avancés suivis :

— Automne 2015 : « Topologie feuillétée et motifs », J. Ayoub, Zurich (Suisse).
— Hiver 2014 : « Espaces de Berkovich », J. Poineau, Bonn (Allemagne).
— Hiver 2014 : « Variétés de Shimura », M-H. Nicole, Bonn (Allemagne).
— Été 2013 : « Modular forms », S. Sasaki, Essen (Allemagne).
— Printemps 2013 : « Systèmes locaux ℓ-adiques sur une variété sur un corps fini », P. Deligne, IHÉS.
— Printemps 2013 : « Conjecture de monodromie-poids », B. Stroh, LAGA.
— Printemps 2013 : « Surfaces K3 », F. Charles, Orsay.
— Printemps 2012 : « Motifs de variétés projectives homogènes », N. Karpenko, Jussieu.
— Printemps 2012 : « Multizêtas et groupe fondamental », F. Brown, Jussieu.
— Printemps 2011 : « Variétés de Shimura », C. Cornut, Jussieu.
— Automne 2009 : « Complexes motiviques », F. Déglise, LAGA.
— Printemps 2009 : « Géométrie algébrique réelle et géométrie tropicale », E. Brugallé et J. Risler, Jussieu.
— Printemps 2009 : « Variétés abéliennes », M. Hindry, Jussieu.
— Automne 2008 : « Courbes elliptiques », M. Hindry, Jussieu.
— Printemps 2008 : « Théorie géométriques des invariants », J.-B. Bost, Orsay.
— Automne 2007 : « Géométrie Algébrique », D. Harari, Orsay.
— Automne 2007 : « Théorie des nombres », J.-M. Fontaine et P. Colmez, Orsay.

6. Résumé des travaux

Mon domaine de recherche est la Géométrie Algébrique et Arithmétique. J'étudie la cohomologie, les cycles algébriques et le motif de certaines variétés algébriques, notamment, variétés abéliannes, schémas en groupes et variétés de Shimura. Je m'intéresse aussi aux applications de ce type d'étude à l'arithmétique.

Je présente ici les questions sur lesquelles j'ai travaillé jusqu'à présent.

Dans 6.1 je résume les résultats de [Anc2], il s'agit de certaines généralisations de mes résultats de thèse [Anc1]. La section 6.2 présente un travail en commun avec Stephen Enright-Ward et Annette Huber [AEH] et sa version relative obtenue avec Annette Huber et Simon Pepin Lehalleur [AHP].

Les sections 6.1 et 6.2 peuvent être un peu abstraites, des conséquences concrètes sont tirées aux 6.1.4 et 6.2.8.

La section 6.3 présente mon résultat plus récent [Anc4]. La dernière section 6.4 résume le contenu de la prépublication [Anc3].

6.1. **Motif de Chow de variétés abéliennes.** Considérons une variété projective et lisse sur le corps des nombres complexes. Nous nous intéressons à l'application *classe de cycle*, des groupes de Chow aux groupes de cohomologie de Betti. La Conjecture de Hodge prédit l'image de cette application et la conjecture de Bloch-Beilinson-Murre prédit l'existence de certaines structures sur le noyau.

Soit A une variété abélienne complexe, exprimons ces conjectures en utilisant le langage des motifs de Chow. Fixons un naturel i et soit $\mathfrak{h}^i(A) \in \mathrm{CHM}(\mathbb{C})_{\mathbb{Q}}$ le motif de Chow construit dans [DM] dont la *réalisation* est la structure de Hodge $H^i(A,\mathbb{Q})$. Le foncteur de réalisation induit un morphisme d'algèbres [1]

$$\mathrm{End}_{\mathrm{CHM}(\mathbb{C})_{\mathbb{Q}}}(h^i(A)) \xrightarrow{Real} \mathrm{End}_{\mathrm{HS}}(H^i(A,\mathbb{Q})).$$

La conjecture de Hodge prévoit que ce morphisme soit surjectif et la conjecture de Bloch-Beilinson-Murre prévoit qu'il soit injectif. Même dans le cas des variétés abéliennes, ces conjectures ne sont pas connues en toute généralité et en fait très peu est connu pour la deuxième.

Le but de [Anc2] est d'exhiber une sous-$\mathbb{Q}$-algèbre de $\mathrm{End}_{\mathrm{CHM}(\mathbb{C})_{\mathbb{Q}}}(h^i(A))$ telle que la restriction de la réalization à cette algèbre soit injective. Évidemment ce résultat est intéressant si l'image de cette algèbre via la réalisation est « assez grande » dans $\mathrm{End}_{\mathrm{HS}}(H^i(A,\mathbb{Q}))$. Nous déterminons explicitement cette image et démontrons que dans « beaucoup » de cas elle coïncide avec $\mathrm{End}_{\mathrm{HS}}(H^i(A,\mathbb{Q}))$.

Donnons plus de détails, nous travaillons maintenant avec une variété abélienne A définie sur un corps quelconque k. Soit $H^1(A,F)$ son premier groupe de cohomologie, pour une cohomologie de Weil quelconque, où $F=\mathbb{Q},\mathbb{Q}_\ell,\ldots$ désigne le corps des coefficients. Soit $\mathrm{Lef}(A) \subset \mathrm{GL}(H^1(A,F))$ son groupe de Lefschetz, c'est-à-dire le sous-groupe de $\mathrm{GL}(H^1(A,F))$ des applications linéaires qui commutent aux endomorphismes de A et qui respectent l'accouplement induit par une polarisation.

Définition 6.1.1. Notons $\mathcal{B}_n \subseteq \mathrm{End}_{\mathrm{CHM}(k)_{\mathbb{Q}}}(\mathfrak{h}^1(A)^{\otimes n})$ la sous-$\mathbb{Q}$-algèbre engendrée par le groupe des permutations $\mathcal{S}_n$, les morphismes $\mathrm{End}(\mathfrak{h}^1(A)) \otimes \mathrm{Id}_{\mathfrak{h}^1(A)^{\otimes n-1}}$ et les morphismes $\big(\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}(-1),\mathfrak{h}^1(A)^{\otimes 2}) \circ \mathrm{Hom}(\mathfrak{h}^1(A)^{\otimes 2},\mathbb{Q}(-1))\big) \otimes \mathrm{Id}_{\mathfrak{h}^1(A)^{\otimes n-2}}$. Ici $\mathbb{Q}(-1)$ est le motif de Lefschetz.

1. Ce morphisme d'algèbres est construit à partir de l'application classe de cycle.

Théorème 6.1.2. *La réalisation induit un isomorphisme d'algèbres*

$$R : \mathcal{B}_n \otimes_{\mathbb{Q}} F \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathrm{Lef}(A)}(H^1(A,F)^{\otimes n}).$$

Ceci fournit en particulier des $\mathbb{Q}$*-algèbres* $\mathcal{C}_n \subseteq \mathrm{End}_{\mathrm{CHM}(k)_{\mathbb{Q}}}(\mathfrak{h}^n(A))$ *telles que la réalisation induit un isomorphisme d'algèbres*

$$R : \mathcal{C}_n \otimes_{\mathbb{Q}} F \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathrm{Lef}(A)}(H^n(A,F)).$$

Le deuxième énoncé découle du premier parce que pour une variété abélienne on dispose d'un isomorphisme canonique $\wedge^n H^1(A,F) \cong H^n(A,F)$ et l'énoncé analogue est vrai dans $\mathrm{CHM}(k)_{\mathbb{Q}}$ [Kün2].

Pour le premier on étend les scalaires de F à sa clôture algébrique. Le groupe de Lefschetz devient alors un produit de groupes classiques et la théorie classique des invariants [DCP] nous fournit une liste explicite de générateurs et relations de l'algèbre $\mathrm{End}_{\mathrm{Lef}(A)}(H^1(A,F)^{\otimes n})$. La surjectivité vient du fait que tous les générateurs ont une préimage dans $\mathcal{B}_n \otimes_{\mathbb{Q}} F$. Ceci est en fait facile : la définition de $\mathcal{B}_n$ a été donnée en s'inspirant de cette liste de générateurs. Pour l'injectivité il faut démontrer que la liste de relations cohomologiques est aussi vérifiée dans l'algèbre de cycles $\mathcal{B}_n$. Ceci est plus délicat et se base notamment sur les travaux de Beauville [Beau], Deninger-Murre [DM] et Künnemann [Kün], [Kün2].

La remarque qui suit donne des limites du résultat et aussi des cas où il est optimal.

Remarque 6.1.3. Soit A une variété abélienne complexe et travaillons avec la cohomologie de Betti. Nous avons l'inclusion

$$\mathrm{End}_{\mathrm{Lef}(A)}(H^1(A,\mathbb{Q})^{\otimes n}) \subseteq \mathrm{End}_{\mathrm{HS}}(H^1(A,\mathbb{Q})^{\otimes n}).$$

Grâce aux travaux de Hazama [Haz], Murty [Mur] et al., cette inclusion est en fait une égalité pour tout n, sous différentes condition sur A, notamment quand A est *générique*, ou bien de dimension impaire et son anneau des endomorphismes est un ordre dans un corps totalement réel, ou encore quand A est à multiplication complexe et de dimension première.

En revanche, si l'anneau des endomorphismes de A est un ordre dans un corps de quaternions qui ne se déploye pas à l'infini, l'inclusion est stricte.

Une conséquence du théorème précédent est le résultat suivant qui répond à une question de C. Voisin (et qui a été récemment résolue par B. Moonen [Moo] avec des méthodes différentes).

Corollaire 6.1.4. *Si un cycle d'une variété abélienne peut être écrit comme combinaison linéaire d'intersections de diviseurs symétriques, alors il est numériquement trivial si et seulement s'il est rationnellement trivial.*

Ce résultat entraîne la conjecture de Bloch-Beilinson-Murre pour la sous-algèbre de $\mathrm{CH}^*(A)_{\mathbb{Q}}$ engendrée par les diviseurs.

Remarque 6.1.5. Les résultats précédents ont des analogues relatifs. Ceci permet notamment de retrouver les résultats principaux de ma thèse sur le motif d'un schéma abélien universel [Anc1].

Ces résultats ont récemment été appliqués par S. Morel et J. Suh pour prouver la conjecture standard des signes pour les variétés de Shimura de type PEL [MS].

6.2. **Motif de Voevodsky de groupes algébriques commutatifs.**

6.2.1. Une question classique autour des motifs est de montrer que le motif $M(X)$ d'une variété X s'écrit comme somme directe de motifs $M(X) = \bigoplus_i \mathfrak{h}^i(X)$ avec la propriété que $\mathfrak{h}^i(X)$ se *réalise* dans le groupe $H^i(X)$ pour toute cohomologie de Weil H^* (Betti, ℓ-adique, ...). Ceci est connu essentiellement pour les courbes, les surfaces [Murre] et les variétés abéliennes [2] [DM].

6.2.2. Le résultat principal de [AEH] montre qu'il existe une décomposition canonique

$$M(G) = \bigoplus_i \mathfrak{h}^i(G)$$

quand G est une variété semiabélienne (et plus en général un groupe algébrique commutatif). Deuxièmement nous montrons qu'il y a un isomorphisme canonique

$$\mathfrak{h}^i(G) = \mathrm{Sym}^i\, \mathfrak{h}^1(G) \ .$$

Ceci se réalise dans l'isomorphisme classique $H^i(G) = \wedge^i H^1(G)$, valable pour toute cohomologie de Weil (la puissance symétrique se réalise dans la puissance alternée par la regle des signes de Koszul).

6.2.3. Dans le cas spécial où G est une variété abélienne, la décomposition a été montrée dans [DM], et la formule $\mathfrak{h}^i(G) = \mathrm{Sym}^i\, \mathfrak{h}^1(G)$ dans [Kün2]. Dans loc. cit. l'ingrédient principal est la transformée de Fourier pour les groupes de Chow d'une variété abélienne, due à Beauville [Beau].

Cette transformée, ne peut pas exister pour les variétés semiabéliennes. Notre approche se base sur l'utilisation d'une théorie motivique plus flexible, celle des complexes motiviques à la Voevodsky [Voe] [3] (voir 6.2.4), et sur la théorie des motifs de dimension finie à la Kimura (voir 6.2.6). À noter que la notion de motif de dimension finie n'avait toujours été appliquée qu'aux motifs purs (c'est-à-dire aux variétés projectives et lisses).

6.2.4. Donnons une idée de la preuve. Dans la catégorie des complexes motiviques le motif $M(X)$ d'une variété X est construit à partir du préfaisceau en groupes abéliens qui associe à un schéma lisse S les combinaisons linéaires formelles de morphismes multivalués de S vers X.

Quand $X = G$ nous disposons d'un autre motif, qu'on note $M_1(G)$, construit à partir du préfaisceau en groupes abéliens qui associe à S les morphismes de S vers G (noter que la structure de groupe de G rend ce préfaisceau un préfaisceau en groupes abéliens). De plus, on dispose d'un morphisme $\alpha_G : M(G) \to M_1(G)$ induit par le morphisme de préfaisceaux en groupe abélien qui associe à une fonction multivaluée la fonction obtenue en sommant les valeurs.

2. Si on se limite à travailler modulo équivalence homologique, cette question devient plus simple et dans ce cas elle est connue aussi pour toute variété projective et lisse définie sur un corps fini [KM].
3. Cette catégorie n'était pas construite quand [DM] et [Kün2] ont été rédigés.

Posons $\alpha_G^n = \mathrm{Sym}^n \alpha_G \circ \Delta_G^n : M(G) \to \mathrm{Sym}^n M_1(G)$, où $\Delta_G^n : G \to G^n$ est l'inclusion diagonale (c'est essentiellement étendre α_G par cup-produit). Il suffit alors de montrer le résultat suivant.

Théorème 6.2.5. *Le motif* $\mathrm{Sym}^n M_1(G)$ *est nul pour* n *assez grand. De plus, l'application*

$$\phi_G = \bigoplus_n \alpha_G^n : M(G) \longrightarrow \bigoplus_{n=0} \mathrm{Sym}^n M_1(G)$$

est un isomorphisme.

Une difficulté pour montrer ce théorème vient du fait qu'on ne possède pas, a priori, de morphisme naturel dans l'autre direction.

6.2.6. Toute variété semiabélienne s'écrit canoniquement comme extension d'une variété abélienne par un tore. Le théorème se démontre par récurrence sur la dimension du tore. Un dévissage facile montre qu'on peut supposer le tore deployé et alors on peut écrire une suite exacte

$$0 \to \mathbb{G}_m \to G \to H \to 1$$

et supposer l'énoncé vrai pour H.

L'hypothèse $\mathrm{Sym}^n M_1(H) = 0$ entraîne $\mathrm{Sym}^{n+1} M_1(G) = 0$. En revanche le fait que ϕ_H est un isomorphisme entraîne seulement qu'il existe un isomorphisme entre $M(G)$ et $\bigoplus_{n=0} \mathrm{Sym}^n M_1(G)$, ce qui ne suffit pas a priori à continuer la récurrence. D'autre part cela a deux conséquences. Premierèment, le motif $M(G)$ est de dimension finie (au sens de Kimura [Kim]). Deuxièmement, on possède un morphisme non-trivial de $\bigoplus_{n=0} \mathrm{Sym}^n M_1(G)$ vers $M(G)$.

Ensuite nous modifions ce morphisme pour obtenir une application ψ_G avec la propriété que les réalisations de ψ_G et ϕ_G sont des isomorphismes, une inverse de l'autre. La théorie de Kimura permet alors de conclure que ϕ_G est un isomorphisme (a priori ψ_G ne sera pas son inverse).

6.2.7. Généralisations. Les résultats qui précédent ont été généralisés au cas relatif, c'est-à-dire pour G un S-schéma en groupes commutatifs lisse. Ici S est une base assez générale (disons un schéma de type fini sur un corps ou un anneau de valuation discrète). Ceci est démontré dans [AHP] par un dévissage délicat qui permet de se réduire au cas où S est le spectre d'un corps (qui est donc résolu par [AEH]).

Cette généralisation s'applique à des situations géométriques intéressantes comme le modèle de Néron d'une variété abélienne ou l'ouvert de lissité d'une compactification toroïdale d'un schéma abélien universel.

6.2.8. Conséquences. Une conséquence immédiate de 6.2.7, pour S régulier, est que le i-ème groupe de Chow $CH^i(G)_{\mathbb{Q}}$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$ se décompose sous l'action de la multiplication par n

$$n_G : G \longrightarrow G,$$

en une somme finie de sous-espaces propres (et les valeurs propres sont des entiers, puissances explicites de n). Ceci généralise la décomposition des groupes de Chow des variétés abéliennes, due à Beauville [Beau].

D'autres applications du Théorème 6.2.5 ont été récemment trouvés par R. Sugiyama [Sugi], notamment à la décomposition de la cohomologie motivique de G. Il démontre aussi que les résultats de Bloch [Blo] sur l'annulation du produit de Pontryagin de 0-cycles de degré zéro se généralisent des variétés abéliennes aux variétés semiabéliennes.

A. Huber et G. Kings utilisent 6.2.7 pour construire le polylogatithme motivique associé à G [HK]. Même les cas classiques (G groupe multiplicatif ou G schéma abélien) sont éclaircis par cette approche.

6.3. **Motifs numériques et motifs mixtes.** Pour comprendre les cycles algébriques sur les variétés projectives et lisses définies sur un corps k, le foncteur

$$\mathrm{num} : \mathrm{CHM}(k) \longrightarrow \mathrm{NUM}(k),$$

des motifs de Chow sur k aux motifs numériques s'est avéré être un outil important, une des raison étant que, contrairement à $\mathrm{CHM}(k)$, la catégorie $\mathrm{NUM}(k)$ est semisimple [Jan92].

Des exemples d'applications de ce foncteur sont la preuve de la conjecture de Bloch pour les surfaces dominées par un produit de courbes [Kim], la preuve que l'équivalence rationnelle et numérique coïncident pour un produit de courbes elliptiques sur un corps finis [Kahn], et la preuve de la conjecture de Bloch-Beilinson pour un produit de courbes elliptiques (sur des corps particuliers) [Jan07].

Les propriétés principales de num sont les suivantes.

(1) Le foncteur num est plein (par construction),
(2) Le noyau de num est le plus grand idéal tensoriel de $\mathrm{CHM}(k)$ [AK, Lemme 7.1.1],
(3) Le foncteur num est conservatif sur les motifs de Chow provenant des variétés abéliennes [Kim].

En gardant à l'esprit les résultats cités auparavant, on voudrait donc disposer, pour étudier les cycles algébriques sur les k-variétés lisses mais pas forcement projectives, d'un analogue mixte de ce foncteur, qui étendrait num de $\mathrm{CHM}(k)$ à toute la catégorie triangulée $\mathrm{DM}(k)$ des motifs (géométriques) mixtes, définie par Voevodsky.

Il y a au moins deux candidats naturels. Le premier est le foncteur quotient

$$p : \mathrm{DM}(k) \longrightarrow \mathrm{DM}(k)/\mathcal{N},$$

où $\mathcal{N}$ est le plus grand idéal tensoriel de $\mathrm{DM}(k)$. Le deuxième est le foncteur triangulé

$$\pi : \mathrm{DM}(k) \longrightarrow D^b(\mathrm{NUM}(k)),$$

défini par Bondarko en utilisant le fait que chaque motif mixte est une extension successive de motifs de Chow (on peut donc appliquer num à chacun de ces motifs de Chow).

Le but de [Anc4] est de comparer ces deux définitions. Il se trouve qu'elles sont très différentes, notamment π n'est pas un foncteur plein, mais il est conservatif sur les motifs mixtes provenant des variétés abéliennes, en revanche p n'est pas consevatif (même sur les motifs mixtes provenant des variétés abéliennes), mais il est plein (par construction). En un sens donc ces foncteurs divisent en deux les bonnes propriétés du foncteur num.

6.4. **Variations de structures de Hodge au-dessus de variétés de Shimura.** Le but de [Anc3] est comprendre comment certaines variations de structures de Hodge d'intérêt géométrique au-dessus des Surfaces modulaires de Picard dégénérent au bord de la compactification de Baily-Borel. Plus précisément nous calculons les poids et les types de la dégénérescence en fonction de données combinatoires de la variation de départ.

6.4.1. Surfaces de Picard. Soit S une Surface modulaire de Picard. C'est une variété de Shimura de type PEL : elle paramètre les variétés abéliennes complexes de dimension 3 munies d'une action d'un ordre fixé d'un corps quadratique imaginaire (et avec d'autres structures supplémentaires).

Soit S^* la compactification Baily-Borel de S. Le bord $S^* - S$ est un nombre fini de points. Notons

$$j : S \hookrightarrow S^*$$

l'immersion ouverte canonique, et

$$i : P \hookrightarrow S^*$$

l'inclusion d'un point fixé de $S^* - S$.

6.4.2. Foncteur « construction canonique ». Soit G le groupe de la donnée de Shimura sous-jacente à S, c'est une $\mathbb{Q}$-forme de $\mathrm{GL}_3 \times \mathbb{G}_m$. Comme pour toute variété de Shimura, nous disposons d'un foncteur

$$\mu_S : \mathrm{Rep}_G \to \mathrm{VHS}(S(\mathbb{C})),$$

dit *construction canonique*, des représentations de G vers les variations de $\mathbb{Q}$-structures de Hodge au-dessus de S.

Notre but est de calculer le poids de la structure de Hodge $i^* R^k j_* \mu_S(V)$ (pour tout $V \in \mathrm{Rep}_G$ et tout naturel k).

L'exemple principal est le suivant. Soient A le schéma abélien universel au-dessus de S et

$$f^r : A^r \longrightarrow S$$

le r-ième produit fibré de A sur S. Alors, pour tous p, r, les variation de structures de Hodge $R^p f^r_* \mathbb{Q}_{A^r}$ sont dans l'image du foncteur μ_S.

Théorème 6.4.3. *Si $p > 6r$ alors le faisceau $R^p f_* \mathbb{Q}_{A^r}$ est nul. Si $p \leq 6r$ alors :*

1. *la $\mathbb{Q}$-structure de Hodge $i^* R^0 j_* R^p f^r_* \mathbb{Q}_{A^r}$ est de poids $\{p - j\}_{c_p \leq j \leq C_p}$,*
2. *la $\mathbb{Q}$-structure de Hodge $i^* R^1 j_* R^p f^r_* \mathbb{Q}_{A^r}$ est de poids $\{p + 1 - j\}_{0 \leq j \leq M_p}$,*
3. *la $\mathbb{Q}$-structure de Hodge $i^* R^2 j_* R^p f^r_* \mathbb{Q}_{A^r}$ est de poids $\{p + 3 + j\}_{0 \leq j \leq M_p}$,*
4. *la $\mathbb{Q}$-structure de Hodge $i^* R^3 j_* R^p f^r_* \mathbb{Q}_{A^r}$ est de poids $\{p + 4 + j\}_{c_p \leq j \leq C_p}$,*
5. *la $\mathbb{Q}$-structure de Hodge $i^* R^k j_* R^p f^r_* \mathbb{Q}_{A^r}$ est nulle pour $k \geq 4$,*

où $c_p = 1$ si $p = 1, 6r - 1$ et 0 autrement, $C_p = \min\{p, 2r, |6r - p|\}$ et $M_p = p$ si $p \leq r$, $M_p = r + [\frac{p-r}{2}]$ si $r < p \leq 3r$, $M_p = r + [\frac{5r-p}{2}]$ si $3r < p \leq 5r$, et $M_p = 6r - p$ si $p > 5r$.

Pour calculer le poids de $i^*R^kj_*\mu_S(V)$ pour un $V \in \mathrm{Rep}_G$ général, nous pouvons étendre les scalaires de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{C}$, puis décomposer $V_\mathbb{C}$ en sous-représentations irréductibles et, en utilisant le fait que les foncteurs $i^*R^kj_*\mu_{S,\mathbb{C}}$ sont additifs, ramener le problème aux représentations irréductibles de $G_\mathbb{C}$.

Dans notre cas il y a un isomorphisme de $\mathbb{C}$-groupes algébriques

$$G_\mathbb{C} \cong \mathrm{GL}_3 \times \mathbb{G}_m,$$

en particulier (après avoir choisi un Borel et un tore maximal), le poids maximal d'une représentation irréductible correspond à une liste d'entiers (a, b, c, d) vérifiant $a \geq b \geq c$.

Théorème 6.4.4. *Soit F_λ une représentation irreducible de $G_\mathbb{C}$ de poids maximal $\lambda = (a, b, c, d)$, alors :*

(1) *$i^*R^0j_*\mu_{S,\mathbb{C}}(F_\lambda)$ est de poids $-2a - b - 2d$,*
(2) *$i^*R^1j_*\mu_{S,\mathbb{C}}(F_\lambda)$ est de poids $-a - 2b - 2d + 1$ et $-2a - c - 2d + 1$,*
(3) *$i^*R^2j_*\mu_{S,\mathbb{C}}(F_\lambda)$ est de poids $-a - 2c - 2d + 3$ et $-2b - c - 2d + 3$,*
(4) *$i^*R^3j_*\mu_{S,\mathbb{C}}(F_\lambda)$ est de poids $-b - 2c - 2d + 4$,*
(5) *le faisceau $i^*R^kj_*\mu_{S,\mathbb{C}}(F_\lambda)$ est nul pour $k \geq 4$.*

6.4.5. Donnons une idée de la preuve. Considérons les trois étapes qui suivent. Premièrement on restreint F_λ au sous-groupe parabolique Q_P de G qui correspond au point P. Deuxièmement on calcule les groupes de *cohomologie de Hochschild* du radical unipotent R_P de Q_P à coefficients dans F_λ ; ceci donne des représentations du groupe Q_P/R_P. Troisièmement on calcule les groupes de cohomologie abstraite d'un certain groupe arithmétique à coefficients dans les Q_P/R_P-représentations obtenues dans la deuxième étape.

Ce dernier calcul nous fournit des représentations du groupe H_P, le groupe de la donnée de Shimura sous-jacent à la strate $\overline{P}$ du bord à laquelle P appartient (un nombre fini de points dans notre cas). Grâce à [BuW], ces H_P-représentations sont reliées à $i^*R^kj_*\mu_{S,\mathbb{C}}(F_\lambda)$ par la construction canonique $\mu_{\overline{P}}$ attachée à la variété de Shimura $\overline{P}$.

Le résultat de [BuW] est en fait valable pour toute variété de Shimura. Dans le cas des Surfaces de Picard les groupes qui apparaîssent sont assez simples pour pourvoir mener tous les calcules de cohomologie des groupes ci-dessus explicitement, ainsi que pour pouvoir comprendre la construction canonique $\mu_{\overline{P}}$.

Remarque 6.4.6. Ce résultat fait partie d'un programme pour la construction de motifs associés aux formes modulaires (en généralisant le résultat de [Sch] pour les formes modulaires classiques). Pour plus de détails, voir le programme de recherche.

7. Programme de recherche

Je présente ici des questions sur lesquelles je souhaite travailler dans le futur proche (je me refère dans ce texte à certaines notions introduites dans la Section 6 « Résumé des travaux » ; j'ai essayé de rendre cette dépendance minimale).

Un premier projet est celui de construire un motif de Chow dit *intérieur* attaché à des variétés de Shimura. Ceci généraliserait un travail de A. Scholl [Sch] et aurait des applications aux formes modulaires (et aux représentations galoisiennes associées).

La présentation de ce projet est articulée en trois paragraphes : le premier évoque les motivations générales du sujet (§7.1.1), le second énonce plus précisément le problème (§7.1.2), et le dernier propose une stratégie d'attaque pour le résoudre, en anticipant les possibles difficultés (§7.1.3).

Dans une deuxième partie je présente des questions autour des cycles algébriques sur les variétés abéliennes, qui suivent la philosophie des conjectures de Bloch-Beilinson-Murre. L'ingrédient essentiel est la nouvelle description du motif d'un schéma en groupes commutatifs de [AEH] et [AHP]. Je donnerai d'abord le cadre (§7.2.1-7.2.5) pour en suite proposer des outils (§7.2.6-7.2.10).

La troisième section contient un nouveau projet de recherche auquel j'ai commencé à m'intéresser depuis les journées en l'honneur de Claire Voisin qui ont eu lieu à Zurich en Novembre dernier. Il s'agit encore de questions autour des conjectures de Bloch-Beilinson-Murre, mais sur des objets géométriques pour moi relativement nouveaux : les variétés hyperkählériennes. Les groupes de Chow de ces variétés ont l'air d'avoir des propriétés remarquables et des fortes analogies avec les groupes de Chow des variétés abéliennes. Plusieurs méthodes qui ont été pour moi fructueuses dans le cadre des variétés abéliennes pourraient s'appliquer ici. Pour ce faire, j'interagis à Zurich avec plusieurs experts des variétés hyperkählériennes (notamment Grezgorz Kaputska).

La quatrième section présente un projet en cours (avec Omid Amini et Javier Fresán). Nous souhaitons étudier le motif (et les périodes) des variétés associées aux graphes, dans l'esprit de [BB].

La dernière section contient un travail en cours autour de la conjecture standard de type Hodgepour les variétés abéliennes en caractéristique positive.

7.1. **Motifs associés aux formes modulaires.**

7.1.1. Motivation. Dans [Sch], A. Scholl construit pour toute forme modulaire nouvelle f de niveau $N \geq 3$, de poids k, et propre sous l'action de l'algèbre de Hecke, un motif *pur*[4] $G(f)$, dont les *réalisations* ℓ-adiques sont les représentations de Galois associées à f par P. Deligne [Del]. L'intérêt d'une telle construction est tout d'abord philosophique, mais A. Scholl en déduit aussi des propriétés de bonne réduction pour les représentations de Galois associées à f. De plus, le motif $G(f)$ peut être utilisé pour l'interprétation à la Beilinson des valeurs spéciales de la fonction L associée à f. On souhaite donc disposer d'analogues de ces motifs pour des formes modulaires attachées à d'autres variétés de Shimura.

4. C'est-à-dire un facteur direct du motif d'une variété projective et lisse.

Rappelons la méthode de A. Scholl. On construit d'abord le motif pur $M(N,k)$, qui sera la somme directe des $G(f)$ pour N et k fixés. Pour ce faire, on considère $X(N)$, la courbe modulaire qui paramètre les courbes elliptiques avec une N-structure de niveau, et $A(N)$, le schéma elliptique universel au-dessus. Soit $A(N)^{k-2}$ le $(k-2)$-ème produit fibré de $A(N)$ sur $X(N)$. C'est une variété lisse et non-compacte. On peut canoniquement construire une compactification lisse $\overline{A(N)^{k-2}}$. A. Scholl construit alors $M(N,k)$ comme un facteur direct du motif de $\overline{A(N)^{k-2}}$. Pour couper les $G(f)$ à partir de $M(N,k)$ on peut utiliser l'action de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}$ sur $\overline{A(N)^{k-2}}$. En effet, l'action canonique de $\mathcal{H}$ sur $A(N)$ s'étend en une action sur $\overline{A(N)^{k-2}}$ comme l'a montré P. Deligne [Del].

Or, pour des variétés de Shimura plus générales, on ne sait pas si des compactifications lisses et Hecke-équivariantes existent. Il y a donc lieu de chercher une alternative à la stratégie de A. Scholl.

J. Wildeshaus a proposé une nouvelle approche [Wild1] pour construire des motifs purs associés à d'autres variétés de Shimura et qui de plus soient munis de l'action de l'algèbre de Hecke. Ces motifs se réalisent en facteurs directs de la cohomologie intérieure [5] ; on les appelera donc facteurs direct du *motif intérieur*.

.

7.1.2. Énoncé du problème. Soit $X = S^K(G,\mathcal{X})$ une variété de Shimura de type PEL. On travaillera avec K *net*. Ceci implique en particulier que X est lisse. Ici G est un groupe algébrique sur $\mathbb{Q}$ provenant de la donnée PEL. Soit A le schéma abélien universel au-dessus, et pour $n \geq 1$, soit A^n le n-ème produit fibré de A sur X. Le morphisme $f : A^n \to X$ est défini au-dessus d'un corps de nombres (plongé dans $\mathbb{C}$), le *corps réflexe* $E = E(G,\mathcal{X})$. L'objectif est de construire des facteurs canoniques du motif intérieur de la variété lisse et non-compacte A^n. Ceci se fait en trois étapes.

(a) Regardons A^n comme variété sur X et considérons sa cohomologie relative $\bigoplus_i R^i f_* \mathbb{Q}_{A^n}$: c'est une variation de structure de Hodge sur $X(\mathbb{C})$. Considérons ses sous-variatons de structures de Hodge qui sont dans l'image de la construction canonique (§6.4.2)

$$\mu_S : \mathrm{Rep}_G \to \mathrm{VHS}(X(\mathbb{C})).$$

Pour chacune on étudie comment les structures de Hodge dégénérent au bord de la compactification (de Baily-Borel) de X, et plus précisement il faut comprendre le poids de cette dégénérescence (dans l'esprit du Théorème 6.4.4).

(b) Continuons à voir A^n au-dessus de X. La réalisation de son motif de Chow relatif $M_X(A^n) \in \mathrm{CHM}(X)_{\mathbb{Q}}$ est $\bigoplus_i R^i f_* \mathbb{Q}_{A^n}$. Il faut alors décomposer $M_X(A^n)$ en facteurs directs de sorte que ils se réalisent dans les sous-variatons de structures de Hodge de $\bigoplus_i R^i f_* \mathbb{Q}_{A^n}$ étudiées dans (a).

(c) Voyons maintenant A^n comme variété sur E. Son *motif bord* $\partial M(A^n)$ [Wild4] appartient à $\mathrm{DM}(E)$, la catégorie tringulée des motifs mixtes sur E, construite par Voevodsky [Voe]. Il mesure le défaut de compacité de A^n. Chaque facteur motivique construit dans (b) induit un facteur direct de $\partial M(A^n)$. On étudie les poids de ces facteurs. Ici c'est dans le sens des *structures de poids*, dues à Bondarko [Bon]. C'est

5. La cohomologie intérieure d'une variété est par définition l'image de la flèche canonique de la cohomologie à support compact vers la cohomologie sans support. C'est une structure de Hodge (ou une représentation de Galois) pure. Par exemple, le motif $M(N,k)$ se réalise dans un facteur direct de la cohomologie intérieure de $A(N)^{k-2}$.

une structure sur la catégorie triangulée de Voevodsky qui « reflète » les filtrations de poids en cohomologie. Par exemple, les motifs des variétés projectives et lisses sont concentrés en un poids (zéro).

Le résultat principal de [Wild1] affirme que si un facteur du motif bord *évite les poids* 0 *et* -1, alors on obtient canoniquement un facteur direct du motif intérieur, muni de plus de l'action de l'algèbre de Hecke. La condition d'évitement des poids ne peut pas être vérifiée par tous les facteurs du motif bord. L'étude dans (a) sert à savoir quels facteurs sont susceptibles de vérifier cette condition (en effet dans (a) on étudie les poids des réalisations de ces facteurs).

7.1.3. Stratégie et difficultés. (a) Pour calculer la dégénérescence on peut utiliser [BuW]. Dans [Anc3] j'ai mené les calculs explicitement dans le cas des surfaces modulaires de Picard (Théorème 6.4.4). On peut probablement espérer pouvoir le faire au moins pour d'autres cas concrets.

(b) La question est résolue entièrement par ma thèse [Anc1] pour toute variété PEL. Comme expliqué dans §7.1.2(c) ceci induit des facteurs du motif bord. D'après [Anc3], dans le cas de Picard la « majorité » de ces facteurs sont susceptibles d'éviter le poids 0 et -1 (plus précisement le sont tous ceux qui correpondent aux G-représentations dont les sous-représentations irréductibles se trouvent strictement à l'intérieur de la chambre de Weyl). On peut espérer un tel résultat pour d'autres variétés PEL.

(c) Pour déduire ce point il s'agit de démontrer le critère de conservativité suivant : si un motif évite des poids en cohomologie (c'est-à-dire après réalisation) alors il évite ces poids déjà comme motif. Si un tel énoncé semble hors de portée en toute généralités, on peut envisager de le démontrer pour les motifs provenant de la géométrie des variétés de Shimura.

Dans [Wild2] ce critère est démontré pour X une variété de Hilbert-Blumenthal et dans [Wild5] le cas des surfaces de Picard est établi. Dans les deux cas on étudie la géométrie des compactifications toroïdales de A. En général le bord d'une telle compactification est obtenu par un procédé combinatoire qui fait intervenir d'autres variétés de Shimura pures, des variétés abéliennes et des tores. Ce qui est très spécial au cas de Hilbert-Blumenthal (respectivement aux surfaces de Picard) est que dans ce bord il n'y a que des tores qui apparaissent (respectivement des courbes elliptiques). En particulier la conservativité pour les motifs qui interviennent dans le bord peut se déduire de celle des motifs d'Artin-Tate (respectivement des travaux de Kimura [Kim]).

7.2. **Cycles algébriques sur les variétés abéliennes.**

7.2.1. Soit A une variété abélienne complexe de dimension g ; notons $[n]$ le morphisme de multiplication par n. Considérons le groupe de Chow $\mathrm{CH}^i(A) = \mathrm{CH}^i(A)_{\mathbb{Q}}$ et le groupe de cohomologie $H^k(A) = H^k(A, \mathbb{Q})$ avec sa $\mathbb{Q}$-structure de Hodge [6]. Considérons l'application classe de cycle

$$\mathrm{CH}^i(A) \xrightarrow{cl_i} H^{2i}(A)(i).$$

6. Les questions qui suivent valent sur des bases plus générales que $\mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ et pour d'autres cohomologies. Dans le cadre qu'on suit on confond l'équivalence homologique et numérique car elles coïncident d'après [Lie].

On souhaiterait disposer d'une description géométrique du noyau de cette flèche et d'un supplémentaire canonique. Pour $i=1$ chaque diviseur D s'écrit canoniquement comme somme d'un diviseur symétrique D_s et d'un diviseur anti-symétrique D_a. En regardant l'action de $[-1]$ on déduit que $cl_1(D_a)=0$, d'autre part on peut démontrer que l'application classe de cycle est injective sur les diviseurs symétriques.

Pour i quelconque on dispose d'une décomposition due à A. Beauville [Beau] $\mathrm{CH}^i(A)=\oplus_{0\leq j\leq g}\mathrm{CH}^i_j(A)$; où par définition $[n]$ agit sur $\mathrm{CH}^i_j(A)$ comme $n^{i+j}\cdot\mathrm{Id}$.

En particulier on a $\ker cl_i \supseteq \oplus_{j\neq i}\mathrm{CH}^i_j(A)$. Depuis la fin de ma thèse je m'intéresse à la conjecture suivante (due à Beauville lui-même ; c'est un cas particulier de la conjecture de Bloch-Beilinson-Murre sur l'existence d'une filtration pour les groupes de Chow).

Conjecture 7.2.2. *Pour toute variété abélienne A et tout entier $0\leq i\leq g$ on a l'égalité*

$$\ker cl_i = \oplus_{j\neq i}\mathrm{CH}^i_j(A).$$

Cette conjecture est connue pour $i=0,1,g-1,g$, d'après Beauville.

7.2.3. Dans [Kahn], B. Kahn démontre que, pour une variété abélienne sur un corps fini, la conjecture de Tate implique la conjecture de Bloch-Beilinson-Murre. L'intérêt d'un tel énoncé est que la première conjecture était connue dans plus de cas que la deuxième. On aimerait disposer d'un énoncé analogue sur $\mathbb{C}$, de la forme « si la conjecture de Hodge est vraie pour A alors la Conjecture 7.2.2 l'est aussi ». Il est probable qu'un tel énoncé soit trop optimiste, un des premiers cas à étudier serait $i=2$ et A générique, ou avec groupe de Mumford-Tate $\mathrm{MT}(A)\subset\mathrm{GL}(H^1(A))$ « facile ».

7.2.4. Je propose ici une reformulation de la question en termes motiviques. D'après [DM, Kün2] on dispose d'une décomposition du motif de A dans la catégorie $\mathrm{CHM}(\mathrm{Spec}(\mathbb{C}))_{\mathbb{Q}}$ des motifs de Chow

$$M(A)=\bigoplus_{i=0}^{2g}\mathfrak{h}^i(A)=\bigoplus_{i=0}^{2g}\mathrm{Sym}^i\,\mathfrak{h}^1(A)\ ,$$

avec la propriété que $\mathfrak{h}^i(A)\cong\mathrm{Sym}^i\,\mathfrak{h}^1(A)$ se *réalise* [7] dans la structure de Hodge [8] $H^i(A)\cong\wedge^i H^1(A)$.

On voit facilement que la conjecture suivante est équivalente [9] à la Conjecture 7.2.2.

Conjecture 7.2.5. *Pour toute variété abélienne A et tout entier i, le morphisme d'algèbres*

$$\mathrm{End}_{\mathrm{CHM}(\mathrm{Spec}(\mathbb{C}))_{\mathbb{Q}}}(\mathfrak{h}^1(A)^{\otimes i})\xrightarrow{Real}\mathrm{End}_{\mathrm{HS}}(H^1(A)^{\otimes i})$$

induit par la réalisation est un isomorphisme.

---

7. La réalisation est essentiellement l'application classe de cycle.

8. la puissance symétique devient en cohomologie puissance alternée à cause de la règle des signes de Koszul.

9. Plus précisément la Conjecture 7.2.5 pour i et A donnés implique la Conjecture 7.2.2 pour i et A et la Conjecture 7.2.2 pour i et A^{2i} implique la Conjecture 7.2.5 pour i et A

Je propose ici trois ingrédients pour essayer d'attaquer cette conjecture. Le plus intéressent, et complètement nouveau, est le dernier.

7.2.6. Théorie des invariants. Quand le groupe de Mumford-Tate $\mathrm{MT}(A)$ est un produit de groupes classiques on dispose d'une liste explicite de générateurs et relations de l'algèbre $\mathrm{End}_{\mathrm{HS}}(H^1(A)^{\otimes i})$, donnés respectivement par le premier et le deuxième théorème fondamental de la Théorie des invariants [DCP]. Si le premier théorème fondamental a été beaucoup utilisé pour la conjecture de Hodge [Haz, Mur, Mil], le deuxième ne semble pas avoir été expoité pour la conjecture de Bloch-Beilinson-Murre.

Dans [Anc1, Anc2] il m'a permis de démontrer la Conjecture 7.2.2 pour les cycles qui s'écrivent comme intersection de diviseurs.

7.2.7. Théorie de Kimura [Kim]**.** Via les motifs de dimension finie [Kim] on peut démontrer le lemme suivant.

Lemme 7.2.8. *Pour A et i fixés, les quatres énoncés suivant sont équivalents.*

(1) La Conjecture 7.2.5 *est vraie.*

(2) L'algèbre $\mathrm{End}_{\mathrm{CHM}(\mathrm{Spec}(\mathbb{C}))_{\mathbb{Q}}}(\mathfrak{h}^1(A)^{\otimes i})$ *est semisimple.*

(3) L'algèbre $\mathrm{End}_{\mathrm{CHM}(\mathrm{Spec}(\mathbb{C}))_{\mathbb{Q}}}(\mathfrak{h}^1(A)^{\otimes i})$ *n'a pas d'ideaux non-triviaux avec que des éléments nilpotents.*

(4) Il existe une anti-involution $(\cdot)^*$ *de l'algèbre* $\mathrm{End}_{\mathrm{CHM}(\mathrm{Spec}(\mathbb{C}))_{\mathbb{Q}}}(\mathfrak{h}^1(A)^{\otimes i})$ *telle que si $f \neq 0$ alors $f \cdot f^* \neq 0$.*

L'avantage des autres formulations de la conjecture est qu'elles ne font pas intervenir la réalisation (ou l'application classe de cycle). Notons aussi qu'il y a des candidats explicites à une telle anti-involution, par example on pourra utiliser l'isomorphisme $\mathfrak{h}^1(A)^\vee \cong \mathfrak{h}^1(A^\vee)(1)$ induit par le fibré de Poincaré (pour $i = 1$ on a que $\mathrm{End}_{\mathrm{CHM}(\mathrm{Spec}(\mathbb{C}))_{\mathbb{Q}}}(\mathfrak{h}^1(A)) = \mathrm{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et l'involution contruite est celle de Rosati).

7.2.9. Complexes motiviques et schémas en groupes [Voe, AEH, AHP]**.** La catégorie des complexes motiviques de Voevodsky est construite à partir de préfaisceaux sur les variétés lisses à valeurs dans les groupes abéliens. Par exemple le motif $M(X)$ d'une variété X est construit à partir du préfaisceau qui associe à un schéma lisse (connexe) S les combinaisons linéaires formelles des fermés de $S \times X$ finis sur S.

Quand $X = G$ est un schéma en groupes abélien nous disposons d'un autre motif, qu'on note $M_1(G)$, construit à partir du préfaisceau qui associe à S les morphismes de S vers G (le foncteur des points de G). Dans [AEH] nous démontrons qu'il y a un isomorphisme canonique

$$M_1(A) \cong \mathfrak{h}^1(A),$$

pour toute variété abélienne A (voir aussi le Théorème 6.2.5). Ceci permet de traduire la Conjecture 7.2.5 (et se reformulations au 7.2.8) en une question sur ce préfaisceau et ses produits tensoriels (ces derniers peuvent être calculés à l'aide de [AHP, Appendix D]).

Remarque 7.2.10. Ce n'est pas clair a priori si cette reformulation soit plus attaquable, notons qu'en tout cas ce n'est pas un simple changement de point de vue (comme le passage de la Conjecture 7.2.2 à la Conjecture 7.2.5), mais une vraie traduction du problème, faisant intervenir des nouveaux objets.

Bien entendu cette traduction pourrait être utile dans d'autres questions autour des cycles algébriques sur les variétés abéliennes (Conjectures de Hodge, Conjecture de Tate,...). J.-B. Bost m'a récemment fait remarquer que l'on pourrait ainsi approcher la Conjecture des périodes de Grothendieck. Dans [Bost], il démontre que la Conjecture des périodes de Grothendieck en codimension 1 et pour toutes variétés projectives et lisses sur $\overline{\mathbb{Q}}$ se réduit à une conjecture « similaire » pour les schémas en groupes commutatifs [10] sur une courbe (voir §7.5 de loc. cit. et les commentaires qui le suivent).

Notons que pour tout schéma en groupes commutatifs $G \to S$ on dispose d'après [AHP] d'une description de son motif

$$M(G) \cong \bigoplus_{n=0} \operatorname{Sym}^n M_1(G)$$

où $M_1(G)$ est construit comme dans §7.2.9 (voir aussi §6.2.7).

7.3. Anneaux de Chow de variétés hyperkählériennes.

Le résultat que nous avons rappelé au §6.2.8, montre que l'anneau de Chow d'un schéma en groupes commutatifs est bigradué. Une graduation est donnée par la codimension (et celle-ci existe pour toutes les variétés algébriques). La deuxième est liée à l'action du morphisme de multiplication par n et peut être interprétée comme une manifestation dans les cycles algébriques de la graduation de la cohomologie (en suivant la philosophie de Bloch-Beilinson-Murre). Cette deuxième graduation n'est pas attendue exister pour toutes les variétés algébriques (elle est remplacée par une filtration).

Des travaux récents de Beauville et Voisin [Bea, BV, V1, V2] montrent que cette deuxième graduation peut être attendue aussi pour les variétés hyperkählériennes et de plus elle devrait vérifier des conjectures analogues à celles discutées dans la section précédente (voir notamment la Conjecture 7.2.2).

Cette conjecture, tant pour les variétés abéliennes que pour les hyperkählériennes est probablement très difficile en toute généralité. Voisin et Beauville ont proposé des versions plus faibles, qui se limitent, par exemple, à la compréhension de l'algèbre engendrée par les diviseurs. Ces questions sont comprises pour les variétés abéliennes (voir le Corollaire 6.1.4) et sont certainement plus attaquables pour les hyperkählériennes.

En résumant, deux questions s'ouvrent :

(1) Peut-on démontrer l'analogue du 6.2.8 pour les variétés hyperkählériennes ?
(2) Peut-on démontrer pour ces variétés l'analogue du Corollaire 6.1.4 ?

Non seulement les énoncés sont analogues au cas des variétés abéliennes, mais les méthodes pourraient être proches. En effet les variétés abéliennes (et les groupes algébriques commutatifs) apparaissent naturellement de deux façons (très différentes) dans l'étude des variétés hyperkählériennes.

10. Le cas des schémas abéliens n'est pas suffisant.

La première façon a lieu seulement pour certaines hyperkählériennes, dites lagrangiennes (elles sont denses dans l'espace de module). Une hyperkählérienne lagrangienne X est de dimension $2n$ et admet une fibration vers une base (souvent $\mathbb{P}^n$) avec des fibres de dimension n. Les fibres lisses sont des vériétés abéliennes. Les fibres singulières génériques ont le lieu de lissité qui est un groupe algébriques commutatifs.

Ceci veut dire que quitte à jeter un fermé de codimension au moins 2 (et après quelques modifications géométriques mineures), X se retrouve dans un contexte géométrique où l'on peut appliquer 6.2.8. La bonne nouvelle est que, pour cet ouvert de X, la décomposition qu'on a grâce à 6.2.8 est déjà celle qu'on cherche à obtenir dans la question (1) ci-dessus. La mauvaise nouvelle est que le fermé qu'on a jeté a, a priori, de l'information nécessaire pour recouvrir l'anneau de Chow de X tout entier. Cette méthode sera donc intéressante pour des variétés hyperkählériennes qui admettent beaucoup de fibrations lagrangiennes (nous pensons que n devraient suffire). Des exemples de telles variétés existent, au moins en petite dimension.

La deuxième façon, la construction de Kuga-Satake [KS], a lieu pour toutes les variétés hyperkählériennes, mais ce n'est pas une construction géométrique (a priori). Elle est obtenue par un argument qui est purement d'algèbre linéaire [11] et permet d'associer à une variété hyperkählérienne X une variété abélienne A, telle que le $H^2(X)$ soit contrôlé per le $H^1(A)$.

Comme cette construction n'est pas géométrique on ne pourra pas obtenir la question (2) ci-dessus directement du Corollaire 6.1.4, mais on pourra s'inspirer de la méthode. Le groupe de Lefschetz $\mathrm{Lef}(A)$ (défini dans 6.1) agit via la correspondance de Kuga-Satake sur le $H^2(X)$. On vérifie que les classes des diviseurs dans le $H^2(X)$ sont invariantes par l'action de $\mathrm{Lef}(A)$. On pourra donc procéder comme dans la preuve de 6.1.2 et utiliser la théorie des invariants ce qui devrait permettre de réduire le problème à devoir vérifier une liste finie et explicite de relations dans l'anneau de Chow de X. Comme dans le cas des variétés abéliennes, ces relations seront lié à la notion de motif de dimension finie à la Kimura [Kim]. Dans le cas des variété abéliennes, elles étaient connues, et reposaient sur des résultats délicats, notamment [Kün2]. Dans le cas des variétés hyperkählériennes, on pourra utiliser les avancées récentes de Ayoub [Ay1, Ay2].

7.4. **Motifs et périodes associés aux graphes.** Considérons un graphe fini et connexe G. Soient $S(G)$ et $A(G)$ les ensembles de ses sommets et de ses arrêtes.

Définition 7.4.1. (1) Un sous-graphe $T \subset G$ est un *arbre maximal* si T est connexe et simplement connexe et $S(T) = S(G)$.

(2) Le premier polynôme de Symanzik de G est

$$\Psi_G = \sum_{T \subset G} \prod_{e \notin A(T)} X_e,$$

la somme est sur tous les arbres maximaux T de G.

(3) Le polynôme Ψ_G définit une variété affine sur $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ qu'on notera Y_G.

11. Pour donner un goût de cette construction, quand X est une surface, A a dimension 2^{20}.

7.4.2. Kontsevich [Kon] (motivé par des questions physiques autour des amplitudes de Feynman) avait conjecturé que la fonction de comptage des points $Y_G(\mathbb{F}_q)$ soit un polynôme en q. Parallèlement, tout période de $Y_G(\mathbb{C})$ devrait être une combinaison linéaire de multizêtas.

Belkale et Brosnan [BB] montrent que les variétés de la forme Y_G engendrent le groupe de Grothendieck $K_0(\mathrm{Var}(\mathbb{Z}))$. Ceci montre que la conjecture de Kontsevich sur le comptage des points est (largement) fausse. En effet l'application qui associe à chaque variété sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ sa fonction de comptage des points se factorise par $K_0(\mathrm{Var}(\mathbb{Z}))$. Le résultat de Belkale et Brosnan montre donc que les fonctions $Y_G(\mathbb{F}_q)$ sont en fait aussi génériques que possibles.

7.4.3. D'autre part [BB] ne permet pas de contredire la partie de la conjecture de Kontsevich autour des périodes : l'application qui associe à chaque variété ses périodes ne se factorise pas par $K_0(\mathrm{Var}(\mathbb{Z}))$.

Un contre exemple explicite à cette conjecture a été récemment trouvé par Brown et Doryn [BD]. Cependant on aimerai disposer d'un résultat du type « les périodes des variétés Y_G sont aussi génériques que possibles ».

7.4.4. Maintenant qu'on dispose de la catégorie $\mathrm{DM}(\mathbb{Z})$ des motifs sur $\mathbb{Z}$ (d'après les travaux de Ayoub, Cisinski et Déglise) on peut essayer de démontrer que les motifs des variétés Y_G engendrent $\mathrm{DM}(\mathbb{Z})$. Ceci impliquerait en particulier la conséquence sur les périodes voulue au §7.4.3 (car l'application qui associe à chaque variété ses périodes se factorise par $\mathrm{DM}(\mathbb{Z})$).

La stratégie générale de Belkale et Brosnan semble s'appliquer à ce problème aussi, mais dans plusieurs parties des subtilités techniques appraraîssent.

7.5. **Les conjectures standard pour les variétés abéliennes.** Dans [Gro], Grothendieck démontre un résultat (qu'il attribue à Segre) qui décrit la signature du produit d'intersection des diviseurs sur une surface. Quelques années plus tard, il formule une conjecture (qui fait partie du corpus des conjectures standards) qui souhaiterait généraliser ce résultat aux variétés de dimension plus grande (et aux cycles de codimension quelconque). Nous la rappelons ici.

Soit k un corps de base, X une variété projective et lisse sur k de dimension g et L une section hyperplane. Considérons les cycles algébriques de codimension i (à coefficients rationnels) tels que leur classe cohomologique appartienne à la partie primitive de la cohomologie ℓ-adique $H^{2i,\mathrm{prim}}_{\ell}(X)$. Considérons sur ces cycles l'équivalence numérique et soit $V^i_{\ell}(X)$ l'espace quotient [12]. Pour $2i \leq g$ définissons un accouplement sur cet espace

$$Z_1, Z_2 \mapsto (-1)^i \deg(Z_1 \cdot Z_2 \cdot L^{g-2i}),$$

à valeurs dans $\mathbb{Q}$.

La conjecture standard de type Hodge prédit que cet accouplement soit défini positif.

En caractéristique zéro, cette conjecture est une conséquence du Théorème de l'Indice de Hodge. En caractéristique positive, mis à part le résultat de Grothendieck pour les diviseurs cité plus haut, on dispose seulement du résultat suivant.

12. Cet espace dépend a priori du nombre primer ℓ. Nous nous intéresserons au cas des variétés abéliennes, où il est en fait indépendant de ℓ.

Théorème 7.5.1. *(Milne,* [Mil02]*) Soit $X = A$ une variété abélienne et définissons $D^i(A) \subset V^i(A)$ comme l'espace des cycles qui s'écrivent comme intersection de diviseurs. Alors la restriction de l'accouplement ci-dessus à $D^i(A)$ est définie positive.*

Définissons $E^i(A) \subset V^i(A)$ comme l'orthogonal de $D^i(A)$ (les cycles "exotiques"). Rien n'est connu sur la signature de l'accouplement restreint à $E^i(A)$.

Dans un travail en cours, nous démontrons que l'accouplement restreint à $E^i(A)$ n'est pas défini négatif, si A est une variété abélienne simple et de dimension impair. Nous démontrons en fait une formule du produit sur la signature de l'accouplement, et cette formule donne des informations intéressantes seulement dans le cas de la dimension impair.

Nous espérons pouvoir pousser plus loin ces résultats dans un futur proche. Les techniques que nous utilisons sont fortement inspiré du travail de Clozel [Clo99].

Références

[Anc1] Ancona, G. : *Décomposition du motif d'un schéma abélien universel*, Thèse de doctorat Université Paris XIII, 60 pages.

[Anc2] Ancona, G. : *Décomposition de motifs abéliens*, Manuscripta Math. Volume 146, Issue 3 (2015), pages 307-328.

[Anc3] Ancona, G. : *Degeneration of Hodge structures over Picard modular surfaces*, 18 pages.

[Anc4] Ancona, G. : *Numerical functors on Voevodsky's motives*, 16 pages., à paraître dans Research in Mathematical sciences.

[AEH] Ancona, G., Enright-Ward S., Huber A. : *On the motive of a commutative algebraic group*, 52 pages.

[AHP] Ancona, G., Huber A., Pepin-Lehalleur S. : *On the relative motive of a commutative algebraic scheme*, 34 pages, sousmis.

[And] André, Y. : *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*, Panoramas et Synthèses (17), 2004.

[AK] André, Y. et Kahn, B. : *Nilpotence, radicaux et structures monoïdales*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 108, 2002, 107-291.

[Ay1] Ayoub, J. : *Motives and algebraic cycles : a selection of conjectures and open questions* disponible sur la page personelle de l'auteur.

[Ay2] Ayoub, J. : *Cohomologie feuilletée et théorie de Galois différentielle supérieure*, disponible sur la page personelle de l'auteur.

[Beau] Beauville, A. : *Sur l'anneau de Chow d'une variété abélienne*, Math. Ann. 273 (1986), 647-651.

[Bea] Beauville, A. : *On the splitting of the Bloch-Beilinson filtration*, in Algebraic cycles and motives (vol. 2), London Math. Soc. Lecture Notes 344, 38-53 ; Cambridge University Press (2007).

[BV] Beauville, A. et Voisin, C. : *On the Chow ring of a K3 surface*, J. Algebraic Geometry 13 (2004), pp. 417-426.

[BB] Belkale, P. et Brosnan, P. : *Matroids, motives and a conjecture of Kontsevich*, Duke Math. Journal, Vol. 116 (2003), 147-188.

[Blo] Bloch, S. : *Some elementary theorems about algebraic cycles on abelian varieties*, Invent. Math. 37 (1976), 215-228.

[Bon] Bondarko, M. : *Weight structures vs. t-structures ; weight filtrations, spectral sequences, and complexes (for motives and in general)*, J. K-theory 6 (2010), 387-504.

[Bost] Bost, J.-B. : *Algebraization, transcendence, and D-group schemes*, Preprint, 47 pages, 2012.

[BD] Brown, F. et Doryn, D. : *Framings for graph hypersurfaces*, Preprint, 27 pages, 2013.

[BuW] Burgos, J-I. and Wildeshaus, J. : *Hodge modules on Shimura varieties and their higher direct images in the Baily-Borel compactification*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 37(3), 2004, 363–413.

[Chev] Chevalley, C. : *Une démonstration d'un théorème sur les groupes algébriques*, J. Math. Pures Appl. (9), 39 :307–317, 1960.

[CD] Cisinski, D.-C. et Déglise, F. : *Triangulated categories of mixed motives*. Preprint : http ://arxiv.org/abs/0912.2110, 2009.

[Clo99] Laurent Clozel. Equivalence numérique et équivalence cohomologique pour les variétés abéliennes sur les corps finis. *Ann. of Math. (2)*, 150(1) :151–163, 1999.

[Del] Deligne, P. : *Formes modulaires et représentations ℓ-adiques*, Sém. Bourbaki, Exposé 355, Lect. Notes Math. 179, Springer-Verlag (1969), 139–172.

[DM] Deninger, C. et Murre, J. : *Motivic decomposition of abelian schemes and the Fourier transform*, J. Reine Angew. Math., 1991, 201–219.

[DCP] de Concini, C. and Procesi, C. : *A characteristic free approach to invariant theory*, Advances in Math., (21), 1976, 330–354.

[Gro] , Grothendieck, A. : *Sur une note de Mattuck-Tate*, J. Reine Angew. Math. (200), 208–215.

[Haz] Hazama, F. : *Algebraic cycles on certain abelian varieties and powers of special surfaces*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math., 31(3), 1985, 487–520.

[HK] Huber, A. et Kings, G. : *Motivic polylog for families of semiabelian varieties*, in preparation, 2015.

[Jan92] Uwe Jannsen. Motives, numerical equivalence, and semi-simplicity. *Invent. Math.*, 107(3) :447–452, 1992.

[Jan07] Uwe Jannsen. On finite-dimensional motives and Murre's conjecture. In *Algebraic cycles and motives. Vol. 2*, volume 344 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 112–142. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.

[Kle68] Steven Kleiman. Algebraic cycles and the Weil conjectures. In *Dix esposés sur la cohomologie des schémas*, pages 359–386. North-Holland, Amsterdam, 1968.

[Kle94] Steven Kleiman. The standard conjectures. In *Motives (Seattle, WA, 1991)*, volume 55 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 3–20. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[Lie68] David I. Lieberman. Numerical and homological equivalence of algebraic cycles on Hodge manifolds. *Amer. J. Math.*, 90 :366–374, 1968.

[Mil01] James Stuart Milne. The Tate conjecture for certain abelian varieties over finite fields. *Acta Arith.*, 100(2) :135–166, 2001.

[Mil02] James Stuart Milne. Polarizations and Grothendieck's standard conjectures. *Ann. of Math. (2)*, 155(2) :599–610, 2002.

[MS] Morel, S. et Suh, J. : *The standard sign conjecture on algebraic cycles : the case of Shimura varieties*, Arxiv 2014.

[Lie] Lieberman, D-I. : *Numerical and homological equivalence of algebraic cycles on Hodge manifolds*, Amer. J. Math., 90, 1986, 366–374.

[LZ] Lehrer, G. et Zhang, R. : *The second fundamental theorem of invariant theory for the orthogonal group*, Ann. of Math., 176, 2012, 2031–2054.

[Kahn] Kahn, B. : *Équivalence rationnelle et numérique sur certaines variétés de type abélien sur un corps fini*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 36 (2003), 977–2002.

[KM] Katz, N. et Messing, W. : *Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields*, Invent. Math. (23), 37(3), 1974, 73–77.

[Kim] Kimura, S-I. : *Chow groups are finite dimensional, in some sense*, Math. Ann. (331), 2005, 173–201.

[Kon] Kontsevich, M. : *Operads and motives in deformation quantization*, Lett. Math. Phys., 48(1), 1999, 35–72.

[KS] Kuga, M. et Satake, I. : *Abelian varieties attached to polarized K3 surfaces*, Math. Ann. (196), 1967, 563–636.

[Kün] Künnemann, K. : *A Lefschetz decomposition for Chow motives of abelian schemes*, Invent. Math., 113(1), 1993, 85–102.

[Kün2] Künnemann, K. : *On the Chow motive of an abelian scheme*, dans Motives (Seattle, WA, 1991) Proc. Sympos. Pure Math., 55, 1994, 189–205.

[Mil] Milne, J-S. : *Lefschetz classes on abelian varieties*, Duke Math. J., 96, 1999, 639–675.

[Moo] Moonen, B. : *On the motive of an abelian scheme with non-trivial endomorphisms*, Arxiv ; http ://arxiv.org/pdf/1110.4264.pdf, 2012.

[Murre] Murre, J. P. : *On the motive of an algebraic surface*, J. Reine Angew. Math., 409, 1990, 190–204.

[Mur] Murty, V-K. : *Exceptional Hodge classes on certain abelian varieties*, Math. Ann., 268(2), 1984, 197–206.

[O'S] O'Sullivan, P. : *Algebraic cycles on an abelian variety*, J. Reine Angew. Math. 654, 2011, 1–81.

[SR72] Neantro Saavedra Rivano. *Catégories Tannakiennes.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 265. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

[Sch] Scholl, A-J. : *Motives for modular forms*, Invent. Math. **100** (1990), 419–430.

[Sugi] Sugiyama, R. : *Motivic homology of semiabelian varieties*, arxiv : 1312.7215, 27 pages.

[Voe] Voevodsky, V. : *Triangulated categories of motives over a field*, Ann. of Math. Stud. **143** (2000), 188–238.

[V1] Voisin, C. : *On the Chow ring of certain algebraic hyper-Kähler manifold*, Pure Appl. Math. Q. 4 (2008), no. 3, part 2, 613-649.

[V2] Voisin, C. : *Remarks and questions on coisotropic subvarieties and zero cycles of hyper-Kähler varieties*, K3 Surfaces and Their Moduli, Progress in Math, Proceedings of the Schiermonnikoog conference 2014, Birkhäuser.

[Wild1] Wildeshaus, J. : *Chow motives without projectivity*, Compos. Math. 145 (2009), 1196-1226.

[Wild2] Wildeshaus, J. : *On the Interior Motive of certain Shimura Varieties : the Case of Hilbert-Blumenthal varieties*, International Mathematics Research Notices (10), 2012, 2321–2355.

[Wild3] Wildeshaus, J. : *On the boundary motive of a Shimura variety*, Compos. Math. **143** (2007), 959–985.

[Wild4] Wildeshaus, J. : *The boundary motive : definition and basic properties*, Compos. Math. **143** (2006), 631–656.

[Wild5] Wildeshaus, J. : *On the Interior Motive of certain Shimura Varieties : the Case of Picard surfaces*, preprint 2014, 30 pages.

Zurich University, Institut für Mathematik Winterthurerstr. 190, CH-8057 Zurich (Suisse)

E-mail address: giuseppe.ancona@math.uzh.ch

URL: http://user.math.uzh.ch/ancona/