

GPS : une précision toute relativiste

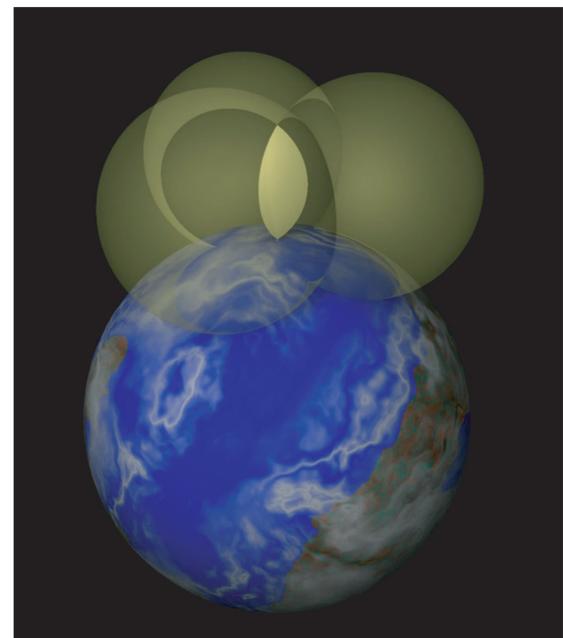


Un satellite du système GPS (vue d'artiste)

Le système GPS de positionnement par satellite permet de connaître sa position avec une précision de quelques mètres. Le principe est simple. Un ensemble de 24 satellites équipés d'horloges atomiques est en orbite autour de la Terre à 20184 km d'altitude. Chaque satellite émet en permanence des signaux, diffusant ainsi sa position et l'heure qu'indique son horloge au moment de l'émission.

En général, le récepteur ne connaît pas l'heure avec suffisamment de précision : une erreur d'un millionième de seconde (dérive journalière des meilleures horloges à quartz) induit une incertitude de 300 m sur la mesure de distance, et donc sur le calcul de la position. La réception des signaux d'un quatrième satellite permet cependant de caler l'horloge du récepteur avec précision. La constellation des 24 satellites est conçue de sorte que chaque récepteur capte presque toujours les signaux d'au moins quatre satellites.

Au sol, un récepteur ayant connaissance de l'heure exacte peut calculer le temps que le signal a mis pour arriver (quelques centièmes de seconde). Il en déduit sa distance au satellite, sachant que le signal se propage à la vitesse de la lumière. Captant les signaux d'au moins trois satellites, le récepteur peut alors déterminer les trois coordonnées (longitude, latitude, altitude) caractérisant sa position.



Connaître sa distance à trois satellites de positions connues, c'est savoir qu'on est sur trois sphères. Or en général, trois sphères ont exactement deux points communs.

Le système GPS est une formidable prouesse technologique. Il a fallu construire des satellites embarquant des horloges atomiques à haute performance et les placer avec précision sur orbite. Les satellites sont surveillés en permanence par cinq stations de contrôle pour rester parfaitement synchronisés : des instructions leur sont régulièrement envoyées pour qu'ils recalibrent leur horloge.

Le champ de gravitation de la Terre ne fait pas que nous attirer à elle : il fait aussi retarder les horloges, et ce d'autant plus que l'horloge est à basse altitude. C'est une conséquence de la théorie de la relativité générale d'Albert Einstein, elle-même basée sur les recherches fondamentales du mathématicien Bernhard Riemann au milieu du XIXe siècle. Deux horloges atomiques identiques, l'une au sol, l'autre embarquée à bord d'un satellite GPS, battent ainsi à des fréquences légèrement différentes. En l'absence de correction, ce phénomène cause une dérive quotidienne de 38,5 millionnièmes de seconde. Sa prise en compte est indispensable pour maintenir le système synchronisé.

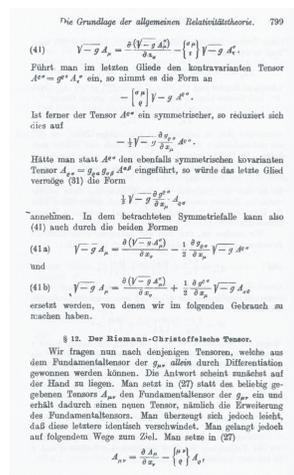
Le potentiel gravitationnel de la Terre

$$V = -\frac{GM_T}{r} \left(1 - J_2 \frac{R_T^2}{r^2} P_2(\cos \theta) \right)$$

s'obtient en ajoutant au terme newtonien habituel une correction quadrupolaire pour tenir compte de l'aplatissement de la Terre. Les équations d'Einstein conduisent alors à l'expression

$$-ds^2 = - \left(1 + \frac{2V}{c^2} \right) (c dt)^2 + \left(1 - \frac{2V}{c^2} \right) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

pour le carré de l'élément d'univers. Cette formule explique qu'une horloge placée dans le champ de gravitation voit sa fréquence ralentie d'un facteur $\sqrt{1 + \frac{2V}{c^2}}$.



Page extraite de l'article "Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie" d'Einstein (1916). On peut lire le début du §12 intitulé "Der Riemann-Christoffelsche Tensor".

De plus, l'orbite d'un satellite n'est pas parfaitement circulaire : son altitude et sa vitesse varient périodiquement. La relativité générale prédit que l'horloge du satellite subit de ce fait des variations d'une vingtaine de milliardièmes de seconde. Cet écart cause une erreur de plusieurs mètres sur le calcul de la position quand le récepteur ne le prend pas en compte.

Phénomène	Ecart en temps	Ecart en distance
Bruit de la mesure	1 ns	30 cm
Incertitude sur la position du satellite		30 cm
Dérive d'une horloge atomique embarquée	5 ns / jour	1,50 m
Retard du signal dû à la traversée de l'atmosphère	1 ns ou 10 ns	30 cm ou 3 m
Corrections relativistes pour orbites non-circulaires	20 ns	6 m
Dérive d'une horloge à quartz	1 µs / jour	300 m
Avance des horloges embarquées causée par l'action du champ gravitationnel en relativité générale	38,5 µs / jour	1,16 km