

# Foncteurs et catégories dérivés

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Généralités sur les catégories</b>	<b>6</b>
2.1	Catégories additives . . . . .	6
2.2	Catégories abéliennes . . . . .	7
2.3	Plénitude, fidélité, adjonction, propriétés universelles . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Catégories triangulées</b>	<b>12</b>
3.1	Axiomes de Verdier . . . . .	12
3.2	Suite exacte longue des Ext et applications . . . . .	14
3.3	Le diagramme $3 \times 3$ dans les catégories triangulées . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Catégorie d'homotopie et invariant d'homotopie</b>	<b>19</b>
4.1	Complexes et homotopie . . . . .	19
4.2	Invariant d'homotopie d'une suite exacte scindée par chaînes . . . . .	20
4.3	Cône d'application . . . . .	21
4.4	Triangles distingués dans la catégorie homotopique . . . . .	24
4.5	Homotopie et homologie . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Localisation de catégories</b>	<b>29</b>
5.1	Construction générale . . . . .	29
5.2	Localisation d'une catégorie triangulée . . . . .	31

<b>6</b>	<b>Catégorie dérivée d'une catégorie abélienne</b>	<b>33</b>
6.1	Inversion des quasi-isomorphismes . . . . .	34
6.2	Homomorphisme caractéristique d'une suite exacte courte de complexes . . . . .	35
6.3	Homomorphisme caractéristique d'une suite exacte de longueur finie . . . . .	37
<b>7</b>	<b>Catégories dérivées bornées</b>	<b>38</b>
7.1	Foncteurs de troncation . . . . .	38
7.2	Troncation et catégorie dérivée . . . . .	39
7.3	Sous-catégories $D^{[m,n]}(\mathcal{A})$ . . . . .	40
7.4	Sous-catégories $D^+(\mathcal{A}), D^-(\mathcal{A}), D^b(\mathcal{A})$ . . . . .	41
<b>8</b>	<b>Extensions à la Yoneda</b>	<b>42</b>
8.1	Classe caractéristique d'une suite exacte de longueur finie . . . . .	42
8.2	Produit de Yoneda . . . . .	45
8.3	Classe caractéristique et homomorphisme caractéristique . . . . .	47
<b>9</b>	<b>Résolutions injectives et catégorie dérivée <math>D^+(\mathcal{A})</math></b>	<b>49</b>
9.1	Lemmes préparatoires . . . . .	49
9.2	Une équivalence de catégories . . . . .	51
<b>10</b>	<b>Foncteurs dérivés</b>	<b>53</b>
10.1	Suites liées de foncteurs . . . . .	53
10.2	Le théorème d'acyclicité de Leray . . . . .	54
10.3	Théorie de Grothendieck et Verdier . . . . .	56
10.4	Définition de Deligne . . . . .	57
10.5	Le foncteur $R\text{Hom}$ . . . . .	59

## 1 Introduction

Les théories de l'homotopie et de l'homologie ont pour but principal de décrire des obstructions à des déformations. Cette mission est particulièrement visible en topologie algébrique, mais on la retrouve également en algèbre, et jusqu'en théorie des représentations. Par exemple, si  $M$  est une représentation d'un carquois  $Q$ , alors la dimension de l'espace  $\text{Ext}_{kQ}^1(M, M)$  (un objet de nature homologique) est égale à la codimension de l'orbite correspondant à la classe

d'isomorphisme de  $M$  dans l'espace des représentations du carquois (pour le vecteur-dimension adéquat).

La base du formalisme de l'algèbre homologique consiste à associer, à un complexe  $X = (X^\bullet, \partial^\bullet)$  de groupes abéliens, ses groupes d'homologie  $H^n(X) = \ker \partial^n / \text{im } \partial^{n-1}$ . La caractéristique clé de cette construction est qu'une suite exacte courte de complexes fournit une suite exacte longue en cohomologie. Le lecteur pourra penser aux suites exactes longues apparaissant pour la cohomologie relative en topologie algébrique, aux suites exactes longues induites par les suites exactes courtes de faisceaux en théorie des faisceaux, ou à tous les exemples contenus dans le livre de Cartan et Eilenberg [4] (cohomologie des groupes, des algèbres de Lie, des algèbres associatives, groupes Ext et Tor, ...)

Ce dernier ouvrage a unifié toutes les théories homologiques définies précédemment au cas par cas, grâce à la notion de foncteur dérivé. Dans ce nouveau cadre conceptuel, le  $n$ -ième groupe de cohomologie  $H^n(G, M)$  d'un groupe  $G$  à valeurs dans un  $G$ -module  $M$  se voit comme la valeur en  $M$  du  $n$ -ième foncteur dérivé du foncteur des invariants sous  $G$ . Autre exemple : le  $n$ -ième groupe de cohomologie  $H^n(X, \mathcal{F})$  d'un espace topologique  $X$  à coefficients dans un faisceau  $\mathcal{F}$  est la valeur en  $\mathcal{F}$  du  $n$ -ième foncteur dérivé du foncteur des sections globales. On pourra ici remarquer que dans ces deux exemples, le foncteur qu'on dérive est représentable. De fait, on peut écrire  $H^n(G, M) = \text{Ext}_{\mathbf{Z}G}^n(\mathbf{Z}, M)$ , où  $\mathbf{Z}$  est le  $G$ -module trivial, et  $H^n(X, \mathcal{F}) = \text{Ext}_{\text{Fais}(X)}^n(\mathbf{Z}, \mathcal{F})$ , où  $\mathbf{Z}$  est le faisceau localement constant.

Rappelons la problématique générale. On considère un foncteur additif  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  exact à gauche entre deux catégories abéliennes. Étant donnée une suite exacte courte

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \rightarrow 0$$

dans  $\mathcal{A}$ , comment compléter la suite

$$0 \rightarrow F(L) \xrightarrow{F(u)} F(M) \xrightarrow{F(v)} F(N)$$

en une suite exacte longue dans  $\mathcal{B}$ ? Cartan et Eilenberg répondent en définissant une suite  $(R^n F)_{n \in \mathbf{N}}$  de foncteurs additifs tels que  $R^0 F = F$  et en construisant des homomorphismes de liaison  $\delta^n$  de sorte que la suite

$$\dots \rightarrow R^{n-1} F(N) \xrightarrow{\delta^{n-1}} R^n F(L) \xrightarrow{R^n F(u)} R^n F(M) \xrightarrow{R^n F(v)} R^n F(N) \xrightarrow{\delta^n} R^{n+1} F(L) \rightarrow \dots$$

soit exacte.

L'objet  $R^n F(M)$  est défini en prenant une résolution injective de  $M$ , c'est-à-dire un couple  $(J, \zeta)$  formé d'un complexe  $J = (J^n, \partial_J^n)_{n \geq 0}$  à termes injectifs et d'un homomorphisme  $\zeta : M \rightarrow J^0$ , le tout étant tel que la suite

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{\zeta} J^0 \xrightarrow{\partial_J^0} J^1 \xrightarrow{\partial_J^1} J^2 \rightarrow \dots$$

soit exacte. L'existence de  $(J, \zeta)$  est assurée si  $\mathcal{A}$  a assez d'injectifs, et on a alors unicité à unique équivalence d'homotopie près. On définit alors  $R^n F(M)$  comme le  $n$ -ième objet d'homologie du complexe  $F(J) = (F(J^n), F(\partial_J^n))$ ; ainsi l'objet  $R^n F(M)$  de  $\mathcal{B}$  est unique à unique isomorphisme près, ce qui est au fond le mieux qu'on puisse espérer dans un cadre

aussi général<sup>1</sup> : dans une catégorie abélienne, noyaux et conoyaux d'un homomorphisme ne sont pas mieux lotis, puisque définis par une propriété universelle.

Cette contrainte ne gêne pas pour donner un caractère fonctoriel à  $R^n F$  : en effet, un homomorphisme  $u : L \rightarrow M$  dans  $\mathcal{A}$  se relève de façon unique à homotopie près en un homomorphisme  $f : I \rightarrow J$  entre des résolutions  $(I, \varepsilon)$  et  $(J, \zeta)$  de  $L$  et  $M$ , et ainsi  $H^n(f) : H^n(I) \rightarrow H^n(J)$  ne dépend pas du choix opéré pour  $f$ . On peut alors définir  $R^n F(u) = H^n(f)$ .

La définition des homomorphismes de liaison  $\delta^n$  est plus subtile. En effet, il faut dans ce cas montrer qu'on peut construire des résolutions injectives des trois objets  $L, M, N$  d'une suite exacte courte de façon à obtenir un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{v} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \varepsilon \downarrow & & \zeta \downarrow & & \eta \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{f} & J & \xrightarrow{g} & K & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

et qu'on a unicité, au sens où tout choix d'autres résolutions  $(I', \varepsilon'), (J', \zeta'), (K', \eta')$  peut être inséré dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{f} & J & \xrightarrow{g} & K & \longrightarrow & 0 \\ & & i \downarrow & & j \downarrow & & k \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & I' & \xrightarrow{f'} & J' & \xrightarrow{g'} & K' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales sont des équivalences d'homotopie. L'exigence de stricte commutativité, nécessaire pour pouvoir appliquer le lemme du serpent, tranche avec le fait que les flèches ne sont uniques qu'à homotopie près. Le même problème survient lors de l'étude de la naturalité de l'homomorphisme de liaison par rapport aux homomorphismes de suites exactes courtes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{v} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & L' & \xrightarrow{u'} & M' & \xrightarrow{v'} & N' & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

On aimerait avoir plus de prise sur ces homomorphismes de liaison, et notamment comprendre comment ils dépendent de la suite exacte courte  $0 \rightarrow L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \rightarrow 0$ . Plus précisément, depuis les travaux de Baer, on sait mettre une structure de groupe abélien sur l'ensemble  $\text{Ext}^1(N, L)$  des classes d'équivalence d'extensions de  $N$  par  $L$ . Peut-être est-il possible de regarder l'homomorphisme de liaison  $\delta^n$  comme induit par la classe  $w \in \text{Ext}^1(N, L)$  de la suite exacte courte ? La réponse à cette question rhétorique est positive. Par exemple dans le cas où le foncteur  $F$  est représentable, disons  $F = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(T, ?)$ , l'homomorphisme de liaison  $\delta_n : \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(T, N) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+1}(T, L)$  est la multiplication à gauche par  $w$  pour le produit de Yoneda. Nous verrons au terme de cet exposé qu'on peut étendre la functorialité des  $R^n F$

1. Dans des situations concrètes, le choix d'une résolution privilégiée permet de donner un sens plus précis aux groupes de cohomologie. Reprenant le premier exemple cité plus haut, le choix de la résolution projective standard pour le  $\mathbf{Z}G$ -module trivial amène une définition concrète pour le groupe  $H^n(G, M) = \text{Ext}_{\mathbf{Z}G}^n(\mathbf{Z}, M)$ .

par rapport aux homomorphismes de  $\mathcal{A}$  en une functorialité par rapport à tous les groupes d'extensions. Une méthode pour faire cela est de plonger  $\mathcal{A}$  dans sa catégorie dérivée bornée  $D^b(\mathcal{A})$  : cette dernière est définie de sorte que  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(N, L) = \text{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(N, L[1])$ . Il suffit alors d'étendre les  $R^n F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  en un foncteur  $RF$  défini sur  $D^b(\mathcal{A})$ .

Il reste à passer de l'idée à l'acte. La première étape est de concevoir une méthode donnant algébriquement (sans chasse dans un diagramme) l'homomorphisme de liaison. Pour cela, on associe un invariant d'homotopie  $w$  à chaque suite exacte courte de complexes scindée par chaînes  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$ . Cet invariant  $w$  est une classe d'homotopie d'homomorphismes de complexes de  $Z$  dans  $X[1]$ , ce qui s'écrit  $w \in [Z, X[1]]$ . La définition précise est donnée dans le paragraphe 4.2; les points importants sont que  $H^n(w)$  est l'homomorphisme de liaison  $H^n(Z) \rightarrow H^{n+1}(X)$  et que la définition est compatible avec l'image par un foncteur additif. Reprenant notre foncteur additif  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  et notre diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{v} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \varepsilon \downarrow & & \zeta \downarrow & & \eta \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{f} & J & \xrightarrow{g} & K & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

appelant  $h \in [K, I[1]]$  l'invariant d'homotopie de la seconde ligne (qui est bien scindée par chaînes, puisque le complexe  $I$  est à termes injectifs), nous obtenons que  $F(h)$  est l'invariant d'homotopie de la suite  $F(I) \xrightarrow{F(f)} F(J) \xrightarrow{F(g)} F(K)$  et donc que  $H^n(F(h))$  est l'homomorphisme de liaison de  $R^n F(N) = H^n(F(K))$  dans  $R^{n+1} F(L) = H^{n+1}(F(I))$ .

La deuxième étape consiste à comparer la classe  $w \in \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(N, L)$  définie par la première ligne du diagramme ci-dessus avec l'invariant d'homotopie  $h$  défini par la seconde ligne. Pour cela, on associe une classe caractéristique à chaque suite exacte courte de complexes. Celle-ci est la classe d'extension si les complexes sont concentrés en degré zéro (cas de la première ligne) et est l'invariant d'homotopie si la suite exacte est scindée par chaînes (cas de la seconde ligne). Il suffira alors de montrer la naturalité de cette classe caractéristique par rapport aux homomorphismes de suites exactes courtes de complexes pour pouvoir conclure que  $h$  est induit par  $w$ . Cette classe caractéristique est construite dans la section 6.2 : c'est la composée d'une classe d'homotopie d'homomorphismes de complexes et de l'inverse formel d'un quasi-isomorphisme. Cette construction mène directement à la définition de la catégorie dérivée.

La mise en musique de toutes ces idées s'appuie sur la notion de catégorie triangulée. Le principe est de regarder, plutôt que simplement une suite exacte de complexes  $0 \rightarrow X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \rightarrow 0$ , tout le triangle  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ , où  $w$  est l'homomorphisme caractéristique. On met ainsi  $u$ ,  $v$  et  $w$  sur un même plan; revenant à notre motivation concernant les foncteurs dérivés, cela revient à mettre les homomorphismes de liaison au même niveau que les autres flèches dans les suites exactes longues. Mais cet égalitarisme a une autre conséquence : si on donne le même statut à  $u$  et  $v$  qu'à  $w$ , alors il faut accepter de ne les définir qu'à homotopie près et donc se placer dans la catégorie  $K(\mathcal{A})$  des complexes à homotopie près. (Cela tombe en fait assez bien, puisque les résolutions injectives ne sont uniquement définies qu'à équivalence d'homotopie près.) On perd alors la notion de suite exacte de complexes et on détruit le procédé de construction de  $w$ . Regarder le triangle est donc aussi le moyen de ne pas perdre  $w$  dans le processus.

Le but de ces notes est de présenter cette théorie, telle qu'elle a été mise au point par Grothendieck et Verdier dans les années 1960. Nous insisterons sur la construction des triangles distingués dans la catégorie homotopique  $K(\mathcal{A})$  et dans la catégorie dérivée  $D(\mathcal{A})$ . La présentation des extensions à la Yoneda nous permettra de comprendre pourquoi la catégorie dérivée  $D(\mathcal{A})$  est un cadre naturel (au sens mathématique du mot) pour parler des groupes d'extension de  $\mathcal{A}$  ; c'est évidemment important pour pouvoir formuler une functorialité vis-à-vis de ceux-ci, et non plus seulement vis-à-vis des seuls homomorphismes. Enfin nous reviendrons sur la notion de foncteur dérivé ; nous verrons en particulier quelques résultats sur la dérivation des foncteurs composés, obtenus sans faire appel à une suite spectrale.

Ces notes ne recèlent aucun résultat personnel, récent ou inédit. Ma principale source d'inspiration a été les chapitres I et XI du livre d'Iversen [8]. Pour prolonger ce texte, je suggère la lecture des références [2], [10] et [6].

Je remercie Simon Riche d'avoir pris le temps de relire ces notes et de m'avoir proposé une liste de corrections.

## 2 Généralités sur les catégories

Le but de cette section est de rassembler des choses probablement connues de mes lecteurs. En conséquence, je conseille de ne pas la lire immédiatement, sous peine de s'ennuyer fermement. Rendez-vous donc à la page 12 pour l'étude des catégories triangulées.

### 2.1 Catégories additives

On considère une catégorie pour laquelle tous les  $\text{Hom}$  sont des groupes abéliens et où la composition des homomorphismes est bilinéaire.

Un objet zéro est un objet pour lequel tous les groupes  $\text{Hom}$  partant ou arrivant à cet objet sont réduits à un élément. S'il existe, un tel objet est unique à isomorphisme près et est noté  $0$ .

Une somme directe de deux objets  $A$  et  $C$  est un objet  $B$  muni d'homomorphismes

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{i} \\ \xleftarrow{p} \end{array} B \begin{array}{c} \xrightarrow{q} \\ \xleftarrow{j} \end{array} C$$

tels que  $pi = 1$ ,  $qj = 1$ ,  $pj = 0$ ,  $qi = 0$ ,  $ip + jq = 1$ . Si elle existe, une telle structure est unique à unique isomorphisme près.

Une catégorie est dite additive si tous les  $\text{Hom}$  sont des groupes abéliens, si la composition des homomorphismes est bilinéaire, s'il y a un objet zéro et si on peut toujours faire des sommes directes finies.

Un foncteur  $F$  entre deux catégories additives est dit additif si chaque application  $f \mapsto F(f)$  de  $\text{Hom}(A, B)$  dans  $\text{Hom}(F(A), F(B))$  est un homomorphisme de groupes. Un foncteur additif préserve l'objet  $0$  et les sommes directes finies.

**Proposition 1.** *Donnons-nous deux homomorphismes composables  $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{q} C$ . Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour tout objet  $T$ , la suite induite de groupes abéliens*

$$0 \rightarrow \text{Hom}(T, A) \rightarrow \text{Hom}(T, B) \rightarrow \text{Hom}(T, C) \rightarrow 0$$

*est exacte.*

(ii) *Pour tout objet  $T$ , la suite induite de groupes abéliens*

$$0 \rightarrow \text{Hom}(C, T) \rightarrow \text{Hom}(B, T) \rightarrow \text{Hom}(A, T) \rightarrow 0$$

*est exacte.*

(iii) *Il existe des homomorphismes  $p$  et  $j$  tels que  $pi = 1$ ,  $qj = 1$ ,  $pj = 0$ ,  $qi = 0$ ,  $ip + jq = 1$ .*

Un diagramme  $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{q} C$  est appelé suite exacte scindée quand les assertions équivalentes de la proposition 1 sont vraies. Un foncteur additif préserve les suites exactes scindées.

## 2.2 Catégories abéliennes

On se place dans une catégorie additive  $\mathcal{A}$ .

Soit  $f : A \rightarrow B$  un homomorphisme.

- Un noyau de  $f$  est un homomorphisme  $i : K \rightarrow A$  tel que tout homomorphisme  $g : X \rightarrow A$  vérifiant  $fg = 0$  se factorise de façon unique à travers  $i$ . Autrement dit, on demande que pour tout objet  $X$ , la suite  $K \xrightarrow{i} A \xrightarrow{f} B$  induise une suite exacte de groupes abéliens  $0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, K) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, B)$ . Si  $f$  a un noyau, celui-ci est unique à unique isomorphisme près.
- Un conoyau de  $f$  est un homomorphisme  $p : B \rightarrow C$  induisant une suite exacte de groupes abéliens  $0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(B, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X)$  pour tout objet  $X$ . Si  $f$  a un conoyau, celui-ci est unique à unique isomorphisme près.
- Si  $f$  a un noyau  $i : K \rightarrow A$  et un conoyau  $p : B \rightarrow C$ , on appelle coimage de  $f$  tout conoyau de  $i$  et on appelle image de  $f$  tout noyau de  $p$ .

Supposons que chaque homomorphisme  $f : A \rightarrow B$  ait un noyau et un conoyau, et donc une image et une coimage. On a alors une factorisation canonique

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow & \nearrow \\ & \text{coim } f \xrightarrow{\bar{f}} \text{im } f & \end{array}$$

Une catégorie abélienne est une catégorie additive où tous les homomorphismes ont un noyau et un conoyau, et où tous les homomorphismes  $\bar{f}$  apparaissant dans les factorisations canoniques sont des isomorphismes.

*Exemple 2.* Un monomorphisme est un homomorphisme  $f : A \rightarrow B$  induisant, pour chaque objet  $X$ , une application injective de  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, A)$  dans  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, B)$ . Par définition, le noyau d'un homomorphisme est un monomorphisme. Réciproquement, si  $f : A \rightarrow B$  est un monomorphisme, alors il est sa propre image (et est donc un noyau, à savoir celui de l'homomorphisme  $B \rightarrow \text{coker } f$ ). La preuve de ce point utilise le dernier axiome des catégories abéliennes : si  $f$  est un monomorphisme, alors  $0$  est un noyau de  $f$ , donc la coimage de  $f$  est  $A$  (plus exactement, est l'homomorphisme  $A \xrightarrow{1} A$ ), et donc l'image de  $f$  est  $A$ . De manière duale, on parle d'épimorphisme.

Un foncteur additif covariant entre deux catégories abéliennes est dit exact s'il préserve les noyaux et les conoyaux des homomorphismes. S'il ne préserve que les noyaux (respectivement, les conoyaux), il est dit exact à gauche (respectivement, à droite).

On se place dans une catégorie abélienne.

Une suite  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$  est dite exacte si  $\ker g = \text{im } f$ , c'est-à-dire si  $\text{coker } f = \text{coim } g$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\
 & \searrow & \nearrow & & \\
 & \text{im } f & & & \text{coker } f
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\
 & \searrow & \nearrow & & \\
 & \ker g & & & \text{coim } g
 \end{array}$$

*Exemples 3.*

- (1) Un foncteur exact entre deux catégories abéliennes préserve les suites exactes.
- (2) Tout homomorphisme  $f : A \rightarrow B$  s'inscrit dans une suite exacte  $0 \rightarrow \ker f \rightarrow A \xrightarrow{f} B \rightarrow \text{coker } f \rightarrow 0$ .
- (3) Une suite  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$  est exacte si et seulement si  $f : A \rightarrow B$  est un noyau de  $g$ , donc si et seulement si pour tout objet  $X$ , la suite induite de groupes abéliens  $0 \rightarrow \text{Hom}(X, A) \rightarrow \text{Hom}(X, B) \rightarrow \text{Hom}(X, C)$  est exacte.
- (4) Une suite  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$  est exacte si et seulement si  $g : B \rightarrow C$  est un conoyau de  $f$ , donc si et seulement si pour tout objet  $X$ , la suite induite de groupes abéliens  $0 \rightarrow \text{Hom}(C, X) \rightarrow \text{Hom}(B, X) \rightarrow \text{Hom}(A, X)$  est exacte.

**Lemme du serpent 4.** *Supposons disposer d'un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & & & 0 \\
 & & & & & & & & \downarrow \\
 A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\
 a \downarrow & & b \downarrow & & c \downarrow & & d \downarrow & & e \downarrow \\
 A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' \\
 & & & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & & & 0
 \end{array}$$



à lignes et à colonnes exactes. Alors il existe un unique homomorphisme  $\delta : \ker d \rightarrow \text{coker } b$  faisant commuter

$$\begin{array}{ccc} & C \xrightarrow{c} C' & \\ \swarrow & & \searrow \\ \ker(C \rightarrow D') & & \text{coker}(B \rightarrow C') \\ \searrow & \delta & \swarrow \\ & \ker d \xrightarrow{\delta} \text{coker } b & \end{array}$$

En outre, le diagramme se complète en

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \ker b & \longrightarrow & \ker c & \longrightarrow & \ker d & \longrightarrow & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & & \text{coker } b & \longrightarrow & \text{coker } c & \longrightarrow & \text{coker } d & & & & \end{array}$$

où la suite  $\ker b \rightarrow \ker c \rightarrow \ker d \xrightarrow{\delta} \text{coker } b \rightarrow \text{coker } c \rightarrow \text{coker } d$  est exacte.

### Cas particuliers 5.

(i) Un diagramme  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$  donne lieu à une suite exacte

$$0 \rightarrow \ker f \rightarrow \ker gf \rightarrow \ker g \rightarrow \text{coker } f \rightarrow \text{coker } gf \rightarrow \text{coker } g \rightarrow 0.$$

(ii) (Lemme des cinq) Dans un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\ a \downarrow & & b \downarrow & & c \downarrow & & d \downarrow & & e \downarrow \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' \end{array}$$

si  $a, b, d$  et  $e$  sont des isomorphismes, alors  $c$  est un isomorphisme.

Un diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ k \downarrow & & \downarrow l \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array} \quad (*)$$

est dit cartésien s'il est commutatif et si tout diagramme commutatif comme ci-dessous peut être complété de façon unique par la flèche en pointillé.

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \swarrow & & \searrow \\ & A \xrightarrow{f} B & \\ & \downarrow k \quad \downarrow l & \\ & C \xrightarrow{g} D & \end{array}$$

Autrement dit, le diagramme (\*) est cartésien si l'homomorphisme  $\begin{pmatrix} f \\ k \end{pmatrix} : A \rightarrow B \oplus C$  est un noyau de l'homomorphisme  $(g - l) : B \oplus C \rightarrow D$ , c'est-à-dire si la suite

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\begin{pmatrix} f \\ k \end{pmatrix}} B \oplus C \xrightarrow{(g - l)} D$$

est exacte.

Dualement, le diagramme (\*) est dit cocartésien si la suite

$$A \xrightarrow{\begin{pmatrix} f \\ k \end{pmatrix}} B \oplus C \xrightarrow{(g - l)} D \rightarrow 0$$

est exacte.

**Proposition 6.** *Si le diagramme (\*) est cartésien (respectivement, cocartésien), alors il peut être complété comme ci-dessous à gauche (respectivement, à droite), où toutes les lignes et toutes les colonnes sont exactes et où  $L$  est le conoyau de l'homomorphisme  $(g - l)$  (respectivement,  $K$  est le noyau de l'homomorphisme  $\begin{pmatrix} f \\ k \end{pmatrix}$ ).*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \ker k & \xrightarrow{\cong} & \ker l & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 \ker f & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \twoheadrightarrow & \operatorname{coker} f \\
 \downarrow \cong & & \downarrow k & & \downarrow l & & \downarrow \\
 \ker g & \longrightarrow & C & \xrightarrow{g} & D & \twoheadrightarrow & \operatorname{coker} g \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \operatorname{coker} k & \longrightarrow & \operatorname{coker} l & \twoheadrightarrow & L
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccccc}
 & K & \longrightarrow & \ker k & \longrightarrow & \ker l & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \ker f & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \twoheadrightarrow & \operatorname{coker} f \\
 \downarrow & & \downarrow k & & \downarrow l & & \downarrow \cong \\
 \ker g & \longrightarrow & C & \xrightarrow{g} & D & \twoheadrightarrow & \operatorname{coker} g \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \operatorname{coker} k & \xrightarrow{\cong} & \operatorname{coker} l & & 
 \end{array}$$

Étant donné les deux homomorphismes  $g$  et  $l$  dans le diagramme (\*), il existe un triplet  $(A, f, k)$ , unique à unique isomorphisme près, rendant (\*) cartésien ; ce triplet est appelé le pull-back de  $g$  et  $l$ . Dualement, étant donné les deux homomorphismes  $f$  et  $k$ , il existe un triplet  $(D, g, l)$ , unique à unique isomorphisme près, rendant (\*) cocartésien ; ce triplet est appelé le push-forward de  $f$  et  $k$ .

### 2.3 Plénitude, fidélité, adjonction, propriétés universelles

Une catégorie est dite essentiellement petite si l'on peut parler de l'ensemble des classes d'isomorphismes de ses objets. Il est parfois nécessaire de se restreindre aux catégories essentiellement petites pour éviter des problèmes de théorie des ensembles : c'est par exemple le cas quand on veut utiliser le lemme de Yoneda (voir ci-dessous) ou localiser des catégories (voir la section 5). La catégorie de tous les modules sur un anneau  $A$  n'est pas essentiellement petite ; en revanche, la catégorie des modules « engendré en cardinal plus petit que ... » l'est.

Soit  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un foncteur entre deux catégories. On dit que  $F$  est fidèle (respectivement, plein) s'il est injectif (respectivement, surjectif) sur les homomorphismes. On appelle image

essentielle de  $F$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{B}$  formée de tous les objets isomorphes dans  $\mathcal{B}$  à un objet de la forme  $F(X)$ , avec  $X \in \mathcal{A}$ . On dit que  $F$  est essentiellement surjectif si son image essentielle est toute la catégorie  $\mathcal{B}$ .

Respectant l'identité et la composition des homomorphismes,  $F$  préserve les isomorphismes. Il s'ensuit que si  $X$  et  $Y$  sont deux objets isomorphes de  $\mathcal{A}$ , alors  $F(X)$  et  $F(Y)$  sont deux objets isomorphes de  $\mathcal{B}$ . Supposons que  $F$  soit plein et fidèle. Alors un homomorphisme  $u : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{A}$  est un isomorphisme dès que  $F(u) : F(X) \rightarrow F(Y)$  en est un. Dans ce cas  $F$  sépare donc les classes d'isomorphisme de  $\mathcal{A}$  : si deux objets  $X$  et  $Y$  de  $\mathcal{A}$  ne sont pas isomorphes, alors leurs images  $F(X)$  et  $F(Y)$  dans  $\mathcal{B}$  ne le sont pas non plus.

Si  $F$  est plein et fidèle, alors il réalise une équivalence de catégories entre  $\mathcal{A}$  et son image essentielle. En particulier,  $F$  est une équivalence de catégories si et seulement si  $F$  est plein, fidèle et essentiellement surjectif.

Soit  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  une équivalence de catégories. Pour chaque objet  $Y$  de  $\mathcal{B}$ , choisissons un couple  $(X_Y, c_Y)$  formé d'un objet  $X_Y$  de  $\mathcal{A}$  et d'un isomorphisme  $c_Y : Y \rightarrow F(X_Y)$  dans  $\mathcal{B}$ . On peut alors définir une équivalence de catégories  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  réciproque de  $F$  : pour un objet  $Y$ , on pose  $G(Y) = X_Y$  ; pour un homomorphisme  $u : Y \rightarrow Y'$ , on définit  $G(u)$  par la condition  $F(G(u)) \circ c_Y = c_{Y'} \circ u$ .

Deux foncteurs  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  et  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  sont dits adjoints l'un de l'autre ( $F$  est adjoint à gauche de  $G$ ,  $G$  est adjoint à droite de  $F$ ) si l'on se donne des isomorphismes  $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(FX, Y) \cong \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, GY)$  naturels en  $X \in \mathcal{A}$  et en  $Y \in \mathcal{B}$ . La donnée de cette collection d'isomorphismes est équivalente à celle de deux transformations naturelles  $\eta : \text{id}_{\mathcal{A}} \rightarrow GF$  et  $\varepsilon : FG \rightarrow \text{id}_{\mathcal{B}}$ , appelées respectivement unité et coïunité. (Pour un objet  $X$  de  $\mathcal{A}$  et un objet  $Y$  de  $\mathcal{B}$ , les homomorphismes  $\eta_X : X \rightarrow GF(X)$  et  $\varepsilon_Y : FG(Y) \rightarrow Y$  sont appelés morphismes d'adjonction.) Pour que deux transformations naturelles  $\eta : \text{id}_{\mathcal{A}} \rightarrow GF$  et  $\varepsilon : FG \rightarrow \text{id}_{\mathcal{B}}$  fassent de  $(F, G)$  une paire de foncteurs adjoints, il faut et il suffit que

$$F \xrightarrow{F\eta} FGF \xrightarrow{\varepsilon F} F \quad \text{et} \quad G \xrightarrow{\eta G} GFG \xrightarrow{G\varepsilon} G$$

soient les identités de  $F$  et  $G$ , respectivement. L'unité  $\eta$  (respectivement, la coïunité  $\varepsilon$ ) est un isomorphisme de foncteurs si et seulement si  $F$  (respectivement  $G$ ) est plein et fidèle.

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie essentiellement petite. Un problème universel dans  $\mathcal{C}$ , c'est la donnée d'un ensemble  $E_T$  pour chaque objet  $T \in \mathcal{C}$ . Résoudre ce problème, c'est trouver un objet  $X$  et, pour chaque  $T$ , une bijection entre l'ensemble  $E_T$  et  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, T)$ . Si un problème universel a une solution, celle-ci est unique à unique isomorphisme près. Précisons cette idée. Soient  $Ens$  la catégorie des ensembles,  $\mathcal{C}^{\text{ini}}$  la catégorie des foncteurs de  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  dans  $Ens$  et  $\mathcal{C}^{\text{fin}}$  l'opposée de la catégorie des foncteurs de  $\mathcal{C}$  dans  $Ens$ . Avec ces notations, le lemme de Yoneda affirme que le foncteur  $X \rightarrow \text{Hom}(\cdot, X)$  est une équivalence de catégories de  $\mathcal{C}$  sur une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}^{\text{ini}}$  et que le foncteur  $X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot)$  est une équivalence de catégories de  $\mathcal{C}$  sur une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}^{\text{fin}}$ . Revenant à la notion de problème universel, nous pouvons interpréter la donnée des ensembles  $E_T$  comme un objet  $E$  de  $\mathcal{C}^{\text{fin}}$  et voyons que le problème a une solution si et seulement si  $E$  est dans l'image essentielle du plongement de Yoneda. L'unicité à unique isomorphisme près de la solution est alors une conséquence directe de la pleine fidélité du foncteur de Yoneda  $X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot)$ .

### 3 Catégories triangulées

#### 3.1 Axiomes de Verdier

On se place dans une catégorie additive, munie d'un automorphisme  $\Sigma$  appelé suspension.

Un triangle est un hexuplet  $(X, Y, Z, u, v, w)$  d'objets et d'homomorphismes dans la situation

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X, \quad \text{qu'on représente habituellement par la figure } \begin{array}{ccc} & Z & \\ \swarrow w & & \searrow v \\ X & \xrightarrow{u} & Y \end{array}$$

Deux triangles sont dits isomorphes si les objets composant ces triangles peuvent être mis en isomorphisme de façon compatible avec les flèches composant le triangle.

Une catégorie triangulée est une catégorie additive munie d'une suspension et d'une classe de triangles appelés distingués satisfaisant aux axiomes de Verdier :

**TR0** Chaque triangle isomorphe à un triangle distingué est distingué.

**TR1** Chaque homomorphisme  $u : X \rightarrow Y$  peut être inscrit dans un triangle distingué. Pour chaque objet  $X$ , la suite  $0 \rightarrow X \xrightarrow{1} X \rightarrow \Sigma 0$  est un triangle distingué.

**TR2** Si l'un des deux triangles ci-dessous est distingué, alors l'autre l'est aussi.

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X \qquad Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma u} \Sigma Y$$

**TR3** Dans le diagramme ci-dessous, si les deux lignes sont des triangles distingués et si  $y$  et  $z$  sont des homomorphismes faisant commuter le carré central, alors il existe un homomorphisme  $x$  (en général pas unique) faisant commuter les deux autres carrés du diagramme.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & \Sigma X \\ \downarrow x & & \downarrow y & & \downarrow z & & \downarrow \Sigma x \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & \Sigma X' \end{array}$$

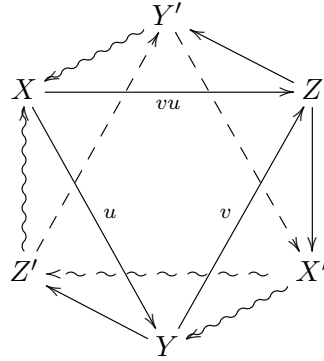
**TR4** (Axiome de l'octaèdre) Chaque couple d'homomorphismes  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$  peut être inscrit dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{x} & Z' & \longrightarrow & \Sigma X \\ \parallel & & \downarrow v & & \downarrow & & \parallel \\ X & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & \Sigma X \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \Sigma u \\ & & X' & \xlongequal{\quad} & X' & \xrightarrow{y} & \Sigma Y \\ & & \downarrow y & & \downarrow & & \\ & & \Sigma Y & \xrightarrow{\Sigma x} & \Sigma Z' & & \end{array}$$

dans lequel les deux premières lignes et les deux colonnes du milieu sont des triangles distingués.

La première demande dans l'axiome **TR1** est clairement redondante avec l'axiome **TR4**; on pourrait donc la supprimer. La maintenir est simplement un moyen de mieux la mettre en évidence.

Le diagramme de l'axiome **TR4** se réécrit sous la forme d'un octaèdre



dans lequel les triangles  $XYZ'$ ,  $YZX'$ ,  $XZY'$  et  $Z'Y'X'$  sont distingués, les triangles  $XYZ$ ,  $X'Y'Z'$ ,  $Z'Y'X$  et  $ZY'X'$  sont commutatifs, et les carrés  $Y'XX'Y$  et  $YZZ'Y'$  sont commutatifs.

Les axiomes de Verdier sont auto-duaux : la catégorie opposée d'une catégorie triangulée est aussi triangulée. De fait, il suffit de changer la suspension en son inverse en gardant les mêmes triangles.

Changer les signes de deux homomorphismes composant un triangle distingué laisse un nouveau triangle, lui aussi distingué ; pour le voir, il suffit d'appliquer l'axiome **TR0** au diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & \Sigma X \\
 1 \downarrow & & -1 \downarrow & & 1 \downarrow & & \downarrow 1 \\
 X & \xrightarrow{-u} & Y & \xrightarrow{-v} & Z & \xrightarrow{w} & \Sigma X'
 \end{array}$$

L'axiome **TR3** ne requiert pas l'unicité de l'homomorphisme  $x$ . De fait, exiger l'unicité imposerait à tous les groupes d'homomorphismes d'être nuls, car aucune contrainte ne pèse sur la flèche  $x$  dans un diagramme de la forme

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{1} & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \Sigma X \\
 \downarrow x & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \Sigma x \\
 X' & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \Sigma X' & \xrightarrow{1} & \Sigma X'
 \end{array}$$

Dans la même veine, il peut exister plusieurs triangles distingués  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$  avec les mêmes  $X, Y, Z, u, v$ , mais avec des  $w$  différents.

Ce manque de rigidité rend la théorie des catégories triangulées assez pauvre. Par comparaison, dans une catégorie abélienne, ce sont les propriétés d'unicité de factorisation à travers le noyau et le conoyau qui permettent de démontrer le lemme du serpent, ouvrant la voie à toute l'algèbre homologique. On pressent ainsi qu'il sera nécessaire d'ajouter d'autres structures à une catégorie triangulée pour obtenir des résultats intéressants.

Nous comprendrons plus loin qu'un triangle représente essentiellement une suite exacte courte. Dans ce contexte, l'axiome **TR4** modélise l'associativité dans une situation de filtration à deux crans. De fait, deux inclusions  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$  livrent quatre suites exactes courtes.

$$\begin{array}{cc} 0 \rightarrow X \xrightarrow{u} Y \rightarrow Y/X \rightarrow 0 & 0 \rightarrow X \xrightarrow{vu} Z \rightarrow Z/X \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow Y \xrightarrow{v} Z \rightarrow Z/Y \rightarrow 0 & 0 \rightarrow Y/X \rightarrow Z/X \rightarrow Z/Y \rightarrow 0 \end{array}$$

Posant  $Z' = Y/X$ ,  $Y' = Z/X$  et  $X' = Z/Y$ , on retrouve les quatre triangles distingués de l'octaèdre, avec les relations de commutativité demandées.

### 3.2 Suite exacte longue des Ext et applications

Les catégories triangulées sont une axiomatique permettant d'abstraire certaines méthodes d'algèbre homologique, ainsi que nous le verrons plus loin avec les exemples des catégories d'homotopie et des catégories dérivées. D'un autre côté, le calcul des groupes d'homologie est souvent basé sur l'utilisation d'une suite exacte longue, une notion spécifique aux catégories abéliennes. La nécessité de faire le pont mérite d'être soulignée par une définition.

Un foncteur cohomologique d'une catégorie triangulée  $\mathcal{D}$  dans une catégorie abélienne  $\mathcal{B}$  est un foncteur additif  $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$  tel que pour chaque triangle distingué  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$  de  $\mathcal{D}$ , la suite

$$F(X) \xrightarrow{F(u)} F(Y) \xrightarrow{F(v)} F(Z)$$

est exacte. En faisant tourner le triangle avec l'axiome **TR2**, on en déduit que la suite longue

$$\dots \rightarrow F(\Sigma^{n-1}Z) \rightarrow F(\Sigma^n X) \rightarrow F(\Sigma^n Y) \rightarrow F(\Sigma^n Z) \rightarrow F(\Sigma^{n+1}X) \rightarrow \dots$$

est exacte. On notera que les homomorphismes dans cette dernière sont donnés par les homomorphismes dans le triangle (avec un signe  $(-1)^n$  apparaissant lors de la rotation du triangle).

La proposition suivante affirme que sur une catégorie triangulée, les foncteurs représentables sont cohomologiques. Pour éviter des redites, nous nous plaçons désormais dans une catégorie triangulée  $\mathcal{D}$ , fixée jusqu'à la fin de la section 3. Notons  $Ab$  la catégorie des groupes abéliens.

**Théorème 7.** *Pour chaque objet  $T$  de  $\mathcal{D}$ , les foncteurs*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(T, ?) : \mathcal{D} \rightarrow Ab \quad \text{et} \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(?, T) : \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \rightarrow Ab$$

*sont cohomologiques.*

*Preuve.* Soient  $T$  un objet et  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$  un triangle distingué de  $\mathcal{D}$ . On veut prouver que la suite  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(T, X) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(T, Y) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(T, Z)$  est exacte. En complétant par l'axiome **TR3** le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & \Sigma X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Z & \xrightarrow{1} & Z & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

on constate que  $vu = 0$ . L'homomorphisme composé

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(T, X) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(T, Y) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(T, Z)$$

est donc nul. Soit maintenant  $g : T \rightarrow Y$  tel que  $vg = 0$ . En complétant le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} T & \xrightarrow{1} & T & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \Sigma T \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ f \downarrow & & g \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & \Sigma X, \end{array}$$

on trouve  $f : T \rightarrow X$  tel que  $g = uf$ . Cela montre l'exactitude voulue.  $\square$

En particulier, la composée de deux homomorphismes consécutifs dans un triangle distingué est nulle.

Le théorème 7 affirme qu'un triangle distingué  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$  induit, pour chaque objet  $T$ , deux suites exactes longues

$$\begin{aligned} \cdots &\rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(T, \Sigma^n X) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(T, \Sigma^n Y) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(T, \Sigma^n Z) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(T, \Sigma^{n+1} X) \rightarrow \cdots \\ \cdots &\rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\Sigma^{-n} Z, T) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\Sigma^{-n} Y, T) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\Sigma^{-n} X, T) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\Sigma^{-1-n} Z, T) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Dans ces suites, il est usuel d'écrire  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{D}}^n(U, V)$  au lieu de  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(U, \Sigma^n V)$  et de changer par un signe  $(-1)^n$  les flèches issues d'un groupe  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{D}}^n$ . Cette dernière mesure est prise par souci de cohérence avec des définitions historiquement antérieures, voir la remarque 17 (2) et le paragraphe 8.3. Compte-tenu de l'isomorphisme  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\Sigma^{-n} U, V) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(U, \Sigma^n V)$  induit par  $\Sigma^n$ , on obtient en fin de compte les suites exactes

$$\begin{aligned} \cdots &\rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{D}}^{n-1}(T, Z) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{D}}^n(T, X) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{D}}^n(T, Y) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{D}}^n(T, Z) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{D}}^{n+1}(T, X) \rightarrow \cdots \\ \cdots &\rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{D}}^{n-1}(X, T) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{D}}^n(Z, T) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{D}}^n(Y, T) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{D}}^n(X, T) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{D}}^{n+1}(Z, T) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Les flèches de la première suite sont, de gauche à droite, la composition à gauche par  $\Sigma^{n-1}w$ ,  $\Sigma^n u$ ,  $\Sigma^n v$  et  $\Sigma^n w$ . Toujours de gauche à droite, les flèches de la seconde suite sont  $f \mapsto (-1)^n(\Sigma f) \circ w$ ,  $f \mapsto f \circ v$ ,  $f \mapsto f \circ u$  et  $f \mapsto (-1)^{n+1}(\Sigma f) \circ w$ .

Voyons à présent deux conséquences de notre théorème.

**Proposition 8.** *Étant donné un diagramme comme dans l'axiome **TR3**, si deux des flèches verticales sont des isomorphismes, alors il en est de même de la troisième.*

*Preuve.* Partons d'un diagramme comme dans l'axiome **TR3**, dans lequel les flèches  $x$  et  $z$  sont des isomorphismes. Le théorème 7 joint au lemme des cinq montre que  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(T, y)$  est un isomorphisme pour chaque objet  $T$ . Ceci assure que  $y$  est un isomorphisme.  $\square$

L'axiome **TR1** implique que chaque homomorphisme  $u : X \rightarrow Y$  peut être inscrit dans un triangle distingué. La proposition 8 garantit que ce triangle est unique à isomorphisme près. L'objet opposé à  $u$  dans ce triangle, bien défini à isomorphisme près, est appelé le cône de  $u$  et est noté  $\text{Con}(u)$ .

Ainsi un homomorphisme est un isomorphisme si et seulement si son cône est l'objet zéro. C'est essentiellement une reformulation de la seconde phrase dans l'axiome **TR1**, compte tenu de l'axiome **TR3** et de la proposition 8.

**Proposition 9.** *Si  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$  et  $X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} \Sigma X'$  sont deux triangles distingués, alors*

$$X \oplus X' \xrightarrow{u \oplus u'} Y \oplus Y' \xrightarrow{v \oplus v'} Z \oplus Z' \xrightarrow{w \oplus w'} \Sigma(X \oplus X')$$

*est aussi un triangle distingué.*

*Preuve.* Plaçons-nous dans les hypothèses de l'énoncé, complétons l'homomorphisme  $u \oplus u'$  en un triangle distingué  $X \oplus X' \xrightarrow{u \oplus u'} Y \oplus Y' \xrightarrow{s} P \xrightarrow{t} \Sigma(X \oplus X')$  à l'aide de l'axiome **TR1**, et choisissons des homomorphismes  $z : Z \rightarrow P$  et  $z' : Z' \rightarrow P$  à l'aide de l'axiome **TR3** de façon que les deux diagrammes

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & \Sigma X \\ \downarrow \binom{1}{0} & & \downarrow \binom{1}{0} & & \downarrow z & & \downarrow \binom{1}{0} \\ X \oplus X' & \xrightarrow{u \oplus u'} & Y \oplus Y' & \xrightarrow{s} & P & \xrightarrow{t} & \Sigma(X \oplus X') \end{array} \quad \begin{array}{ccccccc} X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & \Sigma X' \\ \downarrow \binom{0}{1} & & \downarrow \binom{0}{1} & & \downarrow z' & & \downarrow \binom{0}{1} \\ X \oplus X' & \xrightarrow{u \oplus u'} & Y \oplus Y' & \xrightarrow{s} & P & \xrightarrow{t} & \Sigma(X \oplus X') \end{array}$$

soient commutatifs. Le théorème 7 peut alors être appliqué à chaque ligne du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccccc} X \oplus X' & \xrightarrow{u \oplus u'} & Y \oplus Y' & \xrightarrow{v \oplus v'} & Z \oplus Z' & \xrightarrow{w \oplus w'} & \Sigma X \oplus \Sigma X' & \xrightarrow{-\Sigma u \oplus -\Sigma u'} & \Sigma Y \oplus \Sigma Y' \\ \downarrow 1 & & \downarrow 1 & & \downarrow (z \ z') & & \downarrow 1 & & \downarrow 1 \\ X \oplus X' & \xrightarrow{u \oplus u'} & Y \oplus Y' & \xrightarrow{s} & P & \xrightarrow{t} & \Sigma(X \oplus X') & \xrightarrow{-\Sigma(u \oplus u')} & \Sigma(Y \oplus Y') \end{array}$$

Le lemme des cinq assure alors que l'image par  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(T, ?)$  de la flèche verticale du milieu est un isomorphisme, pour n'importe quel objet  $T$ . Cela garantit que la flèche elle-même est un isomorphisme. On conclut avec l'axiome **TR0**.  $\square$



Pour tous objets  $X$  et  $Y$ , le triangle

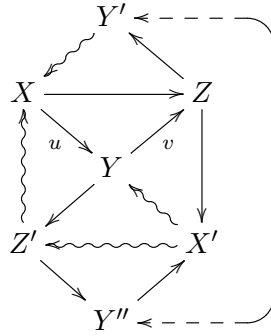
$$Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} X \oplus Y \xrightarrow{(1 \ 0)} X \xrightarrow{0} \Sigma Y$$

est donc distingué, car somme directe de  $0 \rightarrow X \xrightarrow{1} X \rightarrow 0$  et  $Y \xrightarrow{1} Y \rightarrow 0 \rightarrow \Sigma Y$ . Par rotation, on en déduit que le triangle distingué dans lequel s'inscrit l'homomorphisme nul  $X \xrightarrow{0} Y$  est

$$X \xrightarrow{0} Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \Sigma X \oplus Y \xrightarrow{(1 \ 0)} \Sigma X.$$

### 3.3 Le diagramme $3 \times 3$ dans les catégories triangulées

Pour le moment, nous ne nous sommes pas servis de l'axiome **TR4**. Avant de l'utiliser pour la première fois, il nous faut mieux cerner ce qu'il demande. La donnée de deux homomorphismes composables  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$  est équivalente à la donnée des triangles distingués  $XYZ'$  et  $X'YZ$  bâtis sur ces homomorphismes, où  $Z' = \text{Con}(u)$  et  $X' = \text{Con}(v)$ . Bref nous nous sommes donnés deux triangles distingués ayant un sommet en commun. Nous devons ensuite compléter les flèches  $X \rightarrow Z$  et  $X' \rightarrow Z'$  de façon que les triangles  $XYZ$  et  $X'YZ'$  soient commutatifs. Il nous reste à ajouter  $Y'$  et à définir les flèches qui lui sont incidentes. Procédons indirectement en construisant les triangles distingués  $XZY'$  et  $X'Z'Y''$ . Jusque là, nous n'avons procédé à aucun choix et aucune contrainte n'est apparue. Nous constatons maintenant que l'axiome **TR4** demande l'existence d'un isomorphisme entre  $Y'$  et  $Y''$  de sorte que les carrés  $ZY'Y''X'$  et  $Z'Y''Y'X$  et les pentagones  $YZY'Y''Z'$  et  $Y'Y''X'YX$  soient commutatifs.



Comme d'habitude, il n'est pas demandé d'unicité.

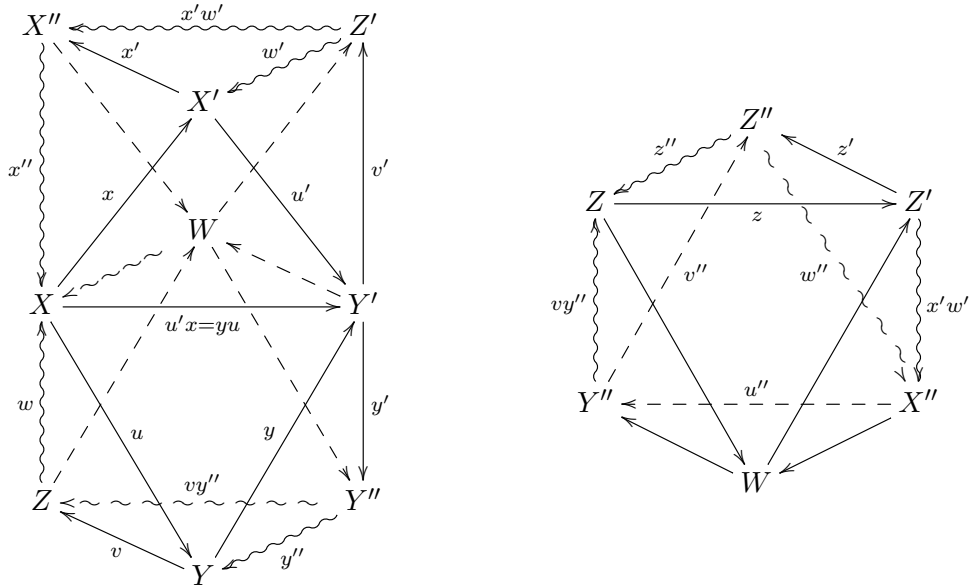
La proposition suivante ne sera utilisée qu'une seule fois, dans le paragraphe 5.2. La curieuse relation d'anticommutativité manifesterà à nouveau son existence dans la proposition 26 et la remarque 37 (voir aussi [4], chapitre III, proposition 4.1).

**Proposition 10.** *Tout carré commutatif  $XYX'Y'$  peut être complété en un diagramme*

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & \Sigma X \\
 \downarrow x & & \downarrow y & & \downarrow z & & \downarrow \Sigma x \\
 X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & \Sigma X' \\
 \downarrow x' & & \downarrow y' & & \downarrow z' & & \downarrow \Sigma x' \\
 X'' & \xrightarrow{u''} & Y'' & \xrightarrow{v''} & Z'' & \xrightarrow{w''} & \Sigma X'' \\
 \downarrow x'' & & \downarrow y'' & & \downarrow z'' & & \downarrow \Sigma x'' \\
 \Sigma X & \xrightarrow{\Sigma u} & \Sigma Y & \xrightarrow{\Sigma v} & \Sigma Z & \xrightarrow{\Sigma w} & \Sigma^2 X
 \end{array}$$

dont les trois premières lignes et les trois premières colonnes sont des triangles distingués, et dont les carrés sont commutatifs, à l'exception du carré en bas à droite qui est anticommutatif :  $(\Sigma w)z'' = -(\Sigma x'')w''$ .

*Preuve.* On empile deux octaèdres donnés par **TR4** : celui du haut,  $XX'Y'WZ'X''$ , est construit sur les homomorphismes  $X \xrightarrow{x} X' \xrightarrow{u'} Y'$ ; celui du bas,  $XY'Y''WY''Z$ , est construit sur les homomorphismes  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{y} Y'$ . Ces deux octaèdres se recollent le long du triangle distingué formé sur l'homomorphisme  $yu = u'x$  de  $X$  dans  $Y'$ . Cela nous donne tous les sommets du diagramme cherché, hormis  $Z''$ , ainsi que quatre des six triangles distingués désirés. Les deux triangles distingués  $ZWY''$  et  $X''WZ'$  ont un sommet en commun; nous pouvons donc construire un troisième octaèdre  $Y''Z'WZ'X''Z''$ , comme il a été expliqué avant l'énoncé de la proposition. Ce troisième octaèdre nous donne  $Z''$  et les deux derniers triangles distingués cherchés. Un point mérite cependant qu'on lui prête attention : les deux triangles distingués  $X''WZ'$  et  $X''Y''Z''$  sont tournés par rapport à l'axiome **TR4**. L'axiome **TR2** dit que cela change le signe des homomorphismes le long des arêtes  $X''W$  et  $X''Y''$ . Du coup, le carré  $Z''Z'X''W$  est anticommutatif. Il est alors facile de vérifier les relations de commutativité et la relation d'anticommutativité.



□

## 4 Catégorie d'homotopie et invariant d'homotopie

Pour toute cette section, on se donne une catégorie additive  $\mathcal{A}$ . Notre but est de définir la catégorie homotopique de  $\mathcal{A}$  et de la munir d'une structure de catégorie triangulée.

### 4.1 Complexes et homotopie

Un complexe d'objets de  $\mathcal{A}$  est une suite d'objets et d'homomorphismes

$$(X^\bullet, \partial_X^\bullet) : \dots \rightarrow X^{n-1} \xrightarrow{\partial_X^{n-1}} X^n \xrightarrow{\partial_X^n} X^{n+1} \xrightarrow{\partial_X^{n+1}} X^{n+2} \rightarrow \dots$$

tels que  $\partial_X^{n+1} \partial_X^n = 0$  pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ .

Un homomorphisme du complexe  $X$  dans le complexe  $Y$  est une suite d'homomorphismes  $u^\bullet$ , avec  $u^n : X^n \rightarrow Y^n$ , qui commute aux différentielles :  $\partial_Y^n u^n = u^{n+1} \partial_X^n$ .

La catégorie des complexes d'objets de  $\mathcal{A}$  est additive ; nous la noterons  $\text{Comp}(\mathcal{A})$ . Elle est abélienne si  $\mathcal{A}$  l'est.

La catégorie  $\text{Comp}(\mathcal{A})$  est munie d'un automorphisme appelé décalage (vers la gauche), dont le  $p$ -ième itéré, pour  $p \in \mathbf{Z}$ , est noté  $X \mapsto X[p]$ . Explicitement,  $X[p]$  est donné par  $X[p]^n = X^{n+p}$ , la différentielle étant  $\partial_{X[p]}^n = (-1)^p \partial_X^{n+p}$ . Le décalage ne modifie pas les homomorphismes.

À deux complexes  $X$  et  $Y$ , on associe un complexe de groupes abéliens  $\text{Homgr}(X, Y)$  en posant

$$\text{Homgr}^n(X, Y) = \prod_{p \in \mathbf{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X^p, Y^{p+n}).$$

La différentielle de  $\text{Homgr}(X, Y)$  envoie un élément  $f = (f_p)$  de  $\text{Homgr}^n(X, Y)$  sur l'élément  $\partial_{\text{Homgr}(X, Y)}^n f = ((\partial^n f)_p)$  de  $\text{Homgr}^{n+1}(X, Y)$  donné par

$$(\partial^n f)_p = \partial_Y^{p+n} f_p + (-1)^{n+1} f_{p+1} \partial_X^p.$$

On dispose d'une formule de Leibniz : soient  $Z$  un troisième complexe,  $f \in \text{Homgr}^m(X, Y)$  et  $g \in \text{Homgr}^n(Y, Z)$ . Alors  $g \circ f \in \text{Homgr}^{m+n}(X, Z)$  et

$$\partial_{\text{Homgr}(X, Z)}^{m+n}(g \circ f) = \partial_{\text{Homgr}(Y, Z)}^n(g) \circ f + (-1)^n g \circ \partial_{\text{Homgr}(X, Y)}^m(f).$$

Un homomorphisme de complexes de  $X$  dans  $Y$  est un élément appartenant au noyau de  $\partial_{\text{Homgr}(X, Y)}^0$ . Ce fait et la formule de Leibniz entraînent que  $\text{Homgr}$  est un bifoncteur de la catégorie des complexes d'objets de  $\mathcal{A}$  vers la catégorie des complexes de groupes abéliens.

Deux homomorphismes de complexes  $u$  et  $v$  de  $X$  dans  $Y$  sont dits homotopes si leur différence appartient à l'image de  $\partial_{\text{Homgr}(X, Y)}^{-1}$ . De façon plus terre-à-terre, on demande l'existence d'une collection  $s^\bullet$  d'homomorphismes de  $\mathcal{A}$ , avec  $s^n : X^n \rightarrow Y^{n-1}$ , tels que  $u^n - v^n = \partial_Y^{n-1} s^n + s^{n+1} \partial_X^n$ .

L'homotopie entre homomorphismes de complexes est une relation d'équivalence. L'ensemble des classes d'homotopie d'homomorphismes de complexes de  $X$  dans  $Y$  est généralement

noté  $[X, Y]$ ; cet ensemble n'est autre que le groupe d'homologie de degré 0 du complexe  $\text{Homgr}(X, Y)$ .

L'homotopie entre homomorphismes de complexes est compatible avec la composition des homomorphismes de complexes. Les ensembles  $[X, Y]$  peuvent donc être regardés comme les groupes d'homomorphismes d'une catégorie additive. Cette catégorie s'appelle la catégorie homotopique de  $\mathcal{A}$  et est notée  $K(\mathcal{A})$ . Ses objets sont les mêmes que ceux de  $\text{Comp}(\mathcal{A})$ , mais les homomorphismes diffèrent.

Le décalage de  $\text{Comp}(\mathcal{A})$  induit un automorphisme de  $K(\mathcal{A})$ , également appelé décalage et noté de la même façon. Le groupe des homomorphismes  $[X, Y[n]]$  coïncide avec le  $n$ -ième groupe d'homologie du complexe  $\text{Homgr}(X, Y)$ .

Il arrive souvent que deux complexes  $X$  et  $Y$  soient isomorphes dans  $K(\mathcal{A})$  sans l'être dans  $\text{Comp}(A)$ . On dit alors qu'ils sont homotopiquement équivalents. Une équivalence d'homotopie de  $X$  sur  $Y$  est donc un homomorphisme de complexes  $u : X \rightarrow Y$  tel qu'il existe un homomorphisme de complexes  $v : Y \rightarrow X$ , avec  $vu$  et  $uv$  homotopes respectivement aux identités de  $X$  et  $Y$ .

## 4.2 Invariant d'homotopie d'une suite exacte scindée par chaînes

On dit qu'une suite  $X^\bullet \xrightarrow{u^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{v^\bullet} Z^\bullet$  de complexes est exacte scindée par chaînes si pour chaque  $n$ , la suite  $X^n \xrightarrow{u^n} Y^n \xrightarrow{v^n} Z^n$  d'objets de  $\mathcal{A}$  est exacte scindée.

Dans une telle situation, on peut scinder la suite avec des sections  $s^n : Z^n \rightarrow Y^n$  et des rétractions  $r^n : Y^n \rightarrow X^n$ , avec donc  $v^n s^n = 1$ ,  $r^n s^n = 0$ ,  $r^n u^n = 1$ ,  $u^n r^n + s^n v^n = 1$ . (Les collections  $s^\bullet$  et  $r^\bullet$  ne sont pas des homomorphismes de complexes.) Puis on définit une collection d'homomorphismes  $w^n : Z^n \rightarrow X^{n+1}$  par la formule  $w^n = r^{n+1} \partial_Y^n s^n$ , où  $\partial_Y^n$  est la différentielle du complexe  $Y^\bullet$ .

**Proposition 11.** *La collection  $w^\bullet$  construite ci-dessus est un homomorphisme de complexes  $w : Z \rightarrow X[1]$ . La classe d'homotopie de cet homomorphisme ne dépend pas du choix des sections et des rétractions utilisées.*

*Preuve.* Nous omettons les exposants dans la notation. Le calcul

$$w \partial_Z - \partial_{X[1]} w = w \partial_Z v s + r u \partial_X w = (r \partial_Y s) v \partial_Y s + r \partial_Y u (r \partial_Y s) = r \partial_Y (s v + u r) \partial_Y s = r \partial_Y^2 s = 0$$

indique que  $w$  est un homomorphisme de complexes.

Un autre choix  $s'$  pour les sections et  $r'$  pour les rétractions s'obtient à partir du précédent via des formules de la forme  $s' = s + ut$  et  $r' = r - tv$ , pour une collection  $t^\bullet$  d'homomorphismes  $t^n : Z^n \rightarrow X^n$ . L'homomorphisme  $w$  est alors changé en

$$w' = r' \partial_Y s' = (r - tv) \partial_Y (s + ut) = r \partial_Y s - t \partial_Z (v s) + (ru) \partial_X t = w - (t \partial_Z + \partial_{X[1]} t),$$

manifestement homotope à  $w$ .  $\square$

Cette proposition montre qu'à toute suite exacte scindée par chaînes  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$  se trouve attaché un élément bien défini  $w \in [Z, X[1]]$ , appelé invariant d'homotopie ou homomorphisme caractéristique de la suite exacte.

**Proposition 12.** *On se donne un diagramme commutatif de complexes d'objets de  $\mathcal{A}$*

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z \\ x \downarrow & & y \downarrow & & \downarrow z \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z'. \end{array}$$

*On suppose que les lignes sont des suites exactes scindées par chaînes, dont on note  $w : Z \rightarrow X[1]$  et  $w' : Z' \rightarrow X'[1]$  les invariants d'homotopie. Alors  $x[1]w = w'z$  dans le groupe  $[Z, X'[1]]$ .*

*Preuve.* Choisissons des sections  $s^n$  et  $s'^n$  de  $v^n$  et  $v'^n$  et des rétractions  $r^n$  et  $r'^n$  de  $u^n$  et  $u'^n$  afin de pouvoir exprimer les invariants d'homotopie de nos deux suites par  $w^n = r^{n+1}\partial_Y^n s^n$  et  $w'^n = r'^{n+1}\partial_{Y'}^n s'^n$ . On définit une collection d'homomorphismes  $k^n : Z^n \rightarrow X'[1]^{n-1}$  par  $k^n = r'^n y^n s^n$ . Omettant les exposants dans la notation, nous calculons

$$w'z - k\partial_Z = (w'z - k\partial_Z)vs = w'v'ys - kv\partial_Y s = r'\partial_{Y'}s'v'ys - r'ysv\partial_Y s,$$

$$xw + \partial_{X'[1]}k = r'u'(xw - \partial_{X'}k) = r'yuw - r'\partial_{Y'}u'k = r'yur\partial_Y s - r'\partial_{Y'}u'r'ys.$$

Utilisant  $ur + sv = 1$  et  $u'r' + s'v' = 1$ , nous obtenons  $w'z - xw = k\partial_Z + \partial_{X'[1]}k$ .  $\square$

On part donc d'un diagramme strictement commutatif, et on arrive à une égalité valable seulement à homotopie près. Cela est plutôt frustrant : tant qu'à devoir manipuler des homomorphismes définis seulement à homotopie près, on aimerait que les structures qui les apportent rentrent elles aussi dans ce cadre homotopique. Mais quand l'on ne regarde  $u$  et  $v$  qu'à homotopie près, on perd la notion de suite de complexes exacte scindée par chaînes, et donc on perd l'invariant d'homotopie. Le remède proposé consiste à mettre  $w$  dans la structure et à se donner tout le triangle  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ , et pas juste  $u$  et  $v$ . Ce n'est peut être pas très glorieux, mais la notion de catégorie triangulée a été précisément introduite pour axiomatiser les propriétés essentielles de cette situation. La fin de la section 4 est consacrée à la preuve de cette affirmation.

### 4.3 Cône d'application

On appelle cône d'un homomorphisme de complexes  $u : X \rightarrow Y$  le complexe obtenu en munissant l'objet  $\mathbf{Z}$ -gradué  $\text{Con}(u) = X[1] \oplus Y$  de la différentielle  $\begin{pmatrix} -\partial_X & 0 \\ -u & \partial_Y \end{pmatrix}$ .

Le cône est défini de sorte que la suite

$$Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \text{Con}(u) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}} X[1]$$

soit exacte scindée par chaînes, et que dans le scindage naturel, l'invariant d'homotopie de cette suite soit  $-u[1] : X[1] \rightarrow Y[1]$ . Il s'agit donc de la construction réciproque de celle du paragraphe précédent.

La construction du cône est partiellement fonctorielle.

**Proposition 13.**

(i) Étant donné le diagramme à gauche ci-dessous, supposé commutatif à homotopie près, il existe un homomorphisme de complexes  $z : \text{Con}(u) \rightarrow \text{Con}(u')$  rendant commutatif le diagramme de droite.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ x \downarrow & & \downarrow y \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & \text{Con}(u) & \xrightarrow{(1 \ 0)} & X[1] \\ y \downarrow & & \downarrow z & & \downarrow x[1] \\ Y' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & \text{Con}(u') & \xrightarrow{(1 \ 0)} & X'[1] \end{array}$$

(ii) Étant donné deux diagrammes comme ci-dessus, celui de gauche étant commutatif à homotopie près et celui de droite étant strictement commutatif, si  $x$  et  $y$  sont des équivalences d'homotopie, alors il en est de même de  $z$ .

*Preuve.* Commençons par (i). Par hypothèse, il existe une collection d'homomorphismes  $t^n : X^n \rightarrow Y'^{n-1}$  tels que  $u'x - yu = t\partial_X + \partial_{Y'}t$ . Des calculs directs montrent que l'application  $z$  définie par la matrice  $\begin{pmatrix} x[1] & 0 \\ t & y \end{pmatrix}$  dans les décompositions  $\text{Con}(u) = X[1] \oplus Y$  et  $\text{Con}(u') = X'[1] \oplus Y'$  est un homomorphisme de complexes.

Plaçons-nous dans la situation décrite dans l'énoncé (ii). Il s'agit de montrer que  $z$  a un inverse à gauche et un inverse à droite, tous deux à homotopie près. À l'aide du (i), on se ramène immédiatement au cas où  $X' = X$ ,  $Y' = Y$ ,  $u' = u$ , et où  $x$  et  $y$  sont homotopes à l'identité. On écrit donc  $1 - x = \partial_X r + r\partial_X$ ,  $1 - y = \partial_Y s + s\partial_Y$ , d'où

$$ux - yu = (\partial_Y s + s\partial_Y)u - u(\partial_X r + r\partial_X) = \partial_Y(su - ur) + (su - ur)\partial_X.$$

L'énoncé affirme que  $z$  s'écrit sous la forme  $\begin{pmatrix} x[1] & 0 \\ t & y \end{pmatrix}$ . Comme  $z$  est un homomorphisme de complexes,  $t' = su - ur - t$  vérifie  $\partial_Y t' = -t'\partial_X$ ; autrement dit,  $t' : X[1] \rightarrow Y$  est un homomorphisme de complexes. On vérifie alors que  $z' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t' & 1 \end{pmatrix}$  est un inverse de  $z$  à homotopie près :

$$1 - z'z = \partial_{\text{Con}(u)} \begin{pmatrix} -r & 0 \\ -t'r & s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r & 0 \\ -t'r & s \end{pmatrix} \partial_{\text{Con}(u)}$$

et

$$1 - zz' = \partial_{\text{Con}(u)} \begin{pmatrix} -r & 0 \\ st' & s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r & 0 \\ st' & s \end{pmatrix} \partial_{\text{Con}(u)}.$$

□

Il n'y a en revanche pas unicité de  $z$ , même à homotopie près ; d'ailleurs dans la construction, on peut ajouter à  $t$  n'importe quel homomorphisme de complexes de  $X[1]$  dans  $Y$ . Par ailleurs, le cas particulier  $X' = X$  et  $Y' = Y$  montre que si  $u' : X \rightarrow Y$  est homotope à  $u$ , alors  $\text{Con}(u')$  est homotopiquement équivalent à  $\text{Con}(u)$ .

La proposition suivante précise les liens entre suites exactes scindées par chaînes et cônes.

**Proposition 14.** Soit  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$  une suite de complexes exacte scindée par chaînes. Donnons-nous un scindage de cette suite par des sections  $s^n$  des  $v^n$  et des rétractions  $r^n$  des  $u^n$ . Soit  $w = r\partial_Y s$  l'invariant d'homotopie calculé avec ce scindage. Alors les diagrammes

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Con}(-v[-1]) & & Y & & \text{Con}(u) & & X[1] & & \text{Con}(w) \\
(r \ -w[-1]) \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} (u \\ 0) \end{array} & & \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} (v \\ r) \end{array} & & (0 \ v) \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} (w \\ s) \end{array} & & (-r \ w) \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} (-u[1] \\ 0) \end{array} & & (-s \ -u[1]) \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} (-v[1] \\ -r) \end{array} \\
X & & \text{Con}(-w[-1]) & & Z & & \text{Con}(v) & & Y[1]
\end{array}$$

définissent des paires d'équivalences d'homotopie mutuellement inverses, qui s'insèrent dans un diagramme commutatif à homotopie près :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\text{Con}(-v[-1]) & \xrightarrow{(1 \ 0)} & Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & \text{Con}(u) & \xrightarrow{(1 \ 0)} & X[1] & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & \text{Con}(w) \\
\updownarrow & \nearrow u & \updownarrow & \searrow v & \updownarrow & \nearrow w & \updownarrow & \searrow -u[1] & \updownarrow \\
X & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & \text{Con}(-w[-1]) & \xrightarrow{(1 \ 0)} & Z & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & \text{Con}(v) & \xrightarrow{(1 \ 0)} & Y[1].
\end{array}$$

*Preuve.* Les calculs prouvant les assertions contenues dans cet énoncé sont tous faciles, semblables à ceux effectués dans la preuve des propositions 11 et 12. La seule difficulté est de trouver les homotopies :

$$\text{id}_{\text{Con}(u)} - \begin{pmatrix} w \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & v \end{pmatrix} = \partial_{\text{Con}(u)} \begin{pmatrix} 0 & -r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_{\text{Con}(u)}$$

et

$$\text{id}_{\text{Con}(v)} - \begin{pmatrix} -u \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r & w \end{pmatrix} = \partial_{\text{Con}(v)} \begin{pmatrix} 0 & -s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_{\text{Con}(v)}.$$

□

**Proposition 15.** Un homomorphisme de complexes est une équivalence d'homotopie si et seulement si son cône est homotopiquement équivalent à zéro. Un homomorphisme de complexes est homotope à zéro si et seulement s'il se factorise à travers un complexe homotopiquement équivalent à zéro.

*Preuve.* Commençons par une observation : pour tout complexe  $X$ , le cône  $\text{Con}(1_X)$  de l'identité de  $X$  est homotopiquement équivalent à zéro. Ce fait provient de l'égalité

$$\text{id}_{\text{Con}(1_X)} = \partial_{\text{Con}(1_X)} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_{\text{Con}(1_X)}.$$

Considérons maintenant un homomorphisme de complexes  $u : X \rightarrow Y$ .

Supposons que  $u$  soit une équivalence d'homotopie. En appliquant la proposition 13 avec  $X' = Y' = Y$ ,  $x = u$  et  $u' = y = 1_Y$ , on voit que  $\text{Con}(u)$  est homotopiquement équivalent à  $\text{Con}(1_Y)$ , donc homotopiquement équivalent à zéro.

Réciproquement, supposons que  $\text{Con}(u)$  soit homotopiquement équivalent à zéro. Alors il existe  $s : \text{Con}(u) \rightarrow \text{Con}(u)[-1]$  telle que  $\partial_{\text{Con}(u)}s + s\partial_{\text{Con}(u)}$  est l'identité de  $\text{Con}(u)$ . Écrivant  $s$  sous forme d'une matrice  $\begin{pmatrix} x & -v \\ y & z \end{pmatrix}$  en rapport avec la décomposition  $\text{Con}(u) = X[1] \oplus Y$ , nous obtenons que  $v : Y \rightarrow X$  est un homomorphisme de complexes inverse de  $u$  à homotopie près.

Supposons que  $u$  soit homotope à 0. Nous pouvons donc écrire  $u = \partial_Y s + s\partial_X$  pour un certain  $s : X \rightarrow Y$ . Alors  $u$  se factorise en produit de deux homomorphismes de complexes

$$X \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \text{Con}(1_X) \xrightarrow{(-s \ u)} Y$$

à travers le cône de l'identité de  $X$ , lequel est homotopiquement équivalent à zéro. (Un calcul analogue montre que  $u$  se factorise également à travers le cône de l'identité de  $Y[-1]$ .)

Réciproquement, si  $u$  se factorise à travers un complexe homotopiquement équivalent à zéro, alors  $u$  se factorise à travers l'objet 0 de  $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ , donc  $u = 0$  dans cette catégorie.  $\square$

#### 4.4 Triangles distingués dans la catégorie homotopique

La catégorie  $\mathbf{K}(\mathcal{A})$  est additive et munie de la suspension  $X \mapsto X[1]$ . On peut donc parler de triangles.

On appelle triangle distingué tout triangle de la forme  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$  pour lequel il existe une suite de complexes  $X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z'$  exacte scindée par chaînes, d'invariant d'homotopie disons  $w'$ , et un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\ \downarrow x & & \downarrow y & & \downarrow z & & \downarrow x[1] \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & X'[1] \end{array}$$

dans lequel les carrés sont commutatifs à homotopie près et les flèches verticales sont des équivalences d'homotopie. Il convient de regarder ce diagramme dans  $\mathbf{K}(\mathcal{A})$  : il y est commutatif et les flèches verticales sont des isomorphismes. Observons cependant que la condition pour les homomorphismes de complexes  $u'$  et  $v'$  de former une suite exacte scindée n'est pas préservée par homotopie.

Vérifions que la classe des triangles distingués de  $\mathbf{K}(\mathcal{A})$  satisfait aux axiomes de Verdier.

**TR0** et **TR1** sont banals.

Examinons **TR2**. Soit  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$  une suite de complexes exacte scindée par chaînes. La proposition 14 montre que le triangle  $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1]$  est homotopiquement équivalent au triangle  $Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \text{Con}(u) \xrightarrow{(1 \ 0)} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1]$ . Ce dernier triangle est distingué, en vertu de l'observation effectuée au début du paragraphe 4.3. Cela montre le sens direct dans l'axiome **TR2**. La réciproque se montre de manière similaire.

Avant de poursuivre l'examen des axiomes de Verdier, montrons la caractérisation suivante des triangles distingués.



**Proposition 16.** Dans  $K(\mathcal{A})$ , un triangle  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$  est distingué si et seulement s'il existe une équivalence d'homotopie  $z : Z \rightarrow \text{Con}(u)$  rendant le diagramme ci-dessous commutatif à homotopie près.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow z & & \parallel \\ X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & \text{Con}(u) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}} & X[1] \end{array}$$

*Preuve.* Dans le cas où  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$  est une suite de complexes exacte scindée par chaînes et où  $w$  est l'invariant d'homotopie, l'existence de  $z$  découle immédiatement de la proposition 14. On en déduit la nécessité de la condition proposée grâce à la proposition 13.

Le triangle sur la ligne du bas du diagramme de l'énoncé est distingué, puisqu'il est la rotation d'un triangle construit à partir d'une suite exacte scindée par chaînes. (Nous utilisons ici l'axiome **TR2**, déjà établi.) L'existence de  $z$  est donc une condition suffisante pour que le triangle sur la première ligne soit distingué.  $\square$

Grâce à cette proposition, la vérification de l'axiome **TR3** se réduit à l'examen de la situation

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & \text{Con}(u) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}} & X[1] \\ x \downarrow & & y \downarrow & & z \downarrow & & \downarrow x[1] \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & \text{Con}(u') & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}} & X[1]' \end{array}$$

La proposition 13 (i) donne exactement le résultat désiré.

Penchons-nous sur l'axiome **TR4** et prenons deux homomorphismes de complexes composables  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$ . Posant  $Z' = \text{Con}(u)$ ,  $Y' = \text{Con}(vu)$  et  $X' = \text{Con}(v)$ , nous bâtissons les triangles distingués

$$X \xrightarrow{u} Y \rightarrow Z' \rightarrow X[1], \quad X \xrightarrow{vu} Z \rightarrow Y' \rightarrow X[1] \quad \text{et} \quad Y \xrightarrow{v} Z \rightarrow X' \rightarrow Y[1].$$

Dans l'octaèdre, il nous faut encore définir les flèches reliant les sommets du triangle  $Z'Y'X'$  :

$$\text{Con}(u) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}} \text{Con}(vu) \xrightarrow{\begin{pmatrix} u[1] & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \text{Con}(v) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \text{Con}(u)[1].$$

Le cône du premier homomorphisme de ce triangle est  $X[2] \oplus Y[1] \oplus X[1] \oplus Z$ , muni de la différentielle  $\begin{pmatrix} \partial_X & 0 & 0 & 0 \\ u & -\partial_Y & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\partial_X & 0 \\ 0 & -v & -vu & \partial_Z \end{pmatrix}$ . Il est homotopiquement équivalent au complexe  $\text{Con}(v) = Y[1] \oplus Z$ , une équivalence étant

$$X[2] \oplus Y[1] \oplus X[1] \oplus Z \xrightleftharpoons{\begin{pmatrix} 0 & 1 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} Y[1] \oplus Z \xleftarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Le critère de la proposition 16 permet alors de montrer que le triangle  $Z'Y'X'$  est distingué. On conclut la preuve de **TR4** en contrôlant la commutativité des triangles  $X'YZ'$ ,  $Z'Y'X$  et  $ZY'X'$  et des carrés  $Y'XX'Y$  et  $YZZ'Y'$ .

*Remarques 17.*

- (1) On peut vérifier que l'octaèdre ainsi construit contient deux triangles distingués en plus de ceux prescrits par l'axiome **TR4**, à savoir  $Y \rightarrow Y' \rightarrow X[1] \oplus X' \rightarrow Y[1]$  et  $Y \rightarrow Z \oplus Z' \rightarrow Y' \rightarrow Y[1]$ . L'homomorphisme de  $Y$  dans  $Y'$  du premier triangle s'obtient en suivant les côtés du carré commutatif  $YZZ'Y'$ ; l'homomorphisme de  $Y'$  dans  $Y[1]$  du second triangle se lit en suivant les côtés de  $Y'XX'Y$ . Ces triangles distingués sont parfois appelés suites de Mayer-Vietoris.
- (2) Nous avons vu au paragraphe 3.2 que dans une catégorie triangulée, la donnée d'un triangle distingué  $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow \Sigma X$  induisait des suites exactes longues

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow \text{Ext}^{n-1}(T, Z) \rightarrow \text{Ext}^n(T, X) \rightarrow \text{Ext}^n(T, Y) \rightarrow \text{Ext}^n(T, Z) \rightarrow \text{Ext}^{n+1}(T, X) \rightarrow \dots \\ \dots &\rightarrow \text{Ext}^{n-1}(X, T) \rightarrow \text{Ext}^n(Z, T) \rightarrow \text{Ext}^n(Y, T) \rightarrow \text{Ext}^n(X, T) \rightarrow \text{Ext}^{n+1}(Z, T) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

pour tout objet  $T$ . Il en sera notamment ainsi dans la catégorie  $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ . Toutefois ce résultat se démontre directement dans le cas d'un triangle standard  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ , formé en ajoutant l'invariant d'homotopie à une suite exacte scindée par chaînes. En effet, on déduit par functorialité deux suites de complexes de groupes abéliens.

$$\begin{aligned} \text{Homgr}(T, X) &\rightarrow \text{Homgr}(T, Y) \rightarrow \text{Homgr}(T, Z) \\ \text{Homgr}(Z, T) &\rightarrow \text{Homgr}(Y, T) \rightarrow \text{Homgr}(X, T) \end{aligned}$$

Le scindage par chaînes de la suite  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$  induit des scindages par chaînes de ces suites. L'invariant d'homotopie de la première suite est l'homomorphisme  $f \mapsto w \circ f$  de  $\text{Homgr}(T, Z)$  dans  $\text{Homgr}(T, X)[1]$ ; l'invariant d'homotopie de la seconde est l'homomorphisme de  $\text{Homgr}(X, T)$  dans  $\text{Homgr}(Z, T)[1]$  donné par  $f \mapsto (-1)^{1+\deg f} f \circ w$  si  $f$  est homogène. Passant à l'homologie à l'aide de la proposition 18, on parvient aux deux suites exactes longues

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow [T, X[n]] \xrightarrow{[1, u[n]]} [T, Y[n]] \xrightarrow{[1, v[n]]} [T, Z[n]] \xrightarrow{[1, w[n]]} [T, X[n+1]] \rightarrow \dots \\ \dots &\rightarrow [Z, T[n]] \xrightarrow{[v, 1]} [Y, T[n]] \xrightarrow{[u, 1]} [X, T[n]] \xrightarrow{(-1)^{n+1}[w, 1]} [Z, T[n+1]] \rightarrow \dots \end{aligned}$$

## 4.5 Homotopie et homologie

Dans ce paragraphe, on fait l'hypothèse additionnelle que  $\mathcal{A}$  est abélienne.

L'importance de l'invariant d'homotopie vient de ce qu'il détermine les homomorphismes de liaison en homologie. Rappelons brièvement les définitions de base.

L'homologie  $H^n(P)$  en degré  $n$  d'un complexe

$$(P^\bullet, \partial_P^\bullet) : \quad \dots \rightarrow P^{n-1} \xrightarrow{\partial_P^{n-1}} P^n \xrightarrow{\partial_P^n} P^{n+1} \xrightarrow{\partial_P^{n+1}} P^{n+2} \rightarrow \dots$$

est l'image du noyau  $Z^n(P)$  de  $\partial_P^n$  dans le conoyau  $'Z^n(P)$  de  $\partial_P^{n-1}$ .

$$\begin{array}{ccc}
 & P^n & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 Z^n(P) & & 'Z^n(P) \\
 \searrow & & \swarrow \\
 & H^n(P) &
 \end{array}$$

Cette construction est fonctorielle : un homomorphisme de complexes  $u : P \rightarrow Q$  fournit un homomorphisme  $H^n(u) : H^n(P) \rightarrow H^n(Q)$ .

L'homomorphisme  $H^n(u)$  ne dépend que de la classe d'homotopie de  $u$ . Cela entraîne que  $H^n$  est un foncteur de la catégorie homotopique  $K(\mathcal{A})$  dans  $\mathcal{A}$ .

Une caractéristique essentielle de l'homologie est de fournir une suite exacte longue à partir de chaque suite exacte courte de complexes. Plus précisément, considérons une suite  $P^\bullet \xrightarrow{u} Q^\bullet \xrightarrow{v} R^\bullet$  de complexes telle que pour chaque  $n \in \mathbf{Z}$ , la suite  $0 \rightarrow P^n \xrightarrow{u^n} Q^n \xrightarrow{v^n} R^n \rightarrow 0$  est exacte. (Cela revient à dire que dans la catégorie abélienne  $\text{Comp}(\mathcal{A})$ , la suite  $0 \rightarrow P \xrightarrow{u} Q \xrightarrow{v} R \rightarrow 0$  est exacte.) On peut alors appliquer le lemme du serpent afin de définir un homomorphisme de liaison  $\delta^n : H^n(R) \rightarrow H^{n+1}(P)$  et obtenir une suite exacte longue.

$$\begin{array}{ccccccc}
 H^n(P) & \longrightarrow & H^n(Q) & \longrightarrow & H^n(R) & \longrightarrow & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 'Z^n(P) & \longrightarrow & 'Z^n(Q) & \longrightarrow & 'Z^n(R) & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & Z^{n+1}(P) & \longrightarrow & Z^{n+1}(Q) & \longrightarrow & Z^{n+1}(R) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & \longrightarrow & H^{n+1}(P) & \longrightarrow & H^{n+1}(Q) & \longrightarrow & H^{n+1}(R)
 \end{array} \quad (*)$$

L'homomorphisme de liaison est naturel : étant donné un diagramme commutatif de complexes à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & R & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow p & & \downarrow q & & \downarrow r & & \\
 0 & \longrightarrow & P' & \longrightarrow & Q' & \longrightarrow & R' & \longrightarrow & 0,
 \end{array}$$

si  $\delta^n$  (respectivement,  $\delta'^n$ ) est l'homomorphisme de liaison en degré  $n$  associé à la ligne du haut (respectivement, du bas), alors  $\delta'^n H^n(r) = H^{n+1}(p) \delta^n$ .

**Proposition 18.** *Dans la situation décrite ci-dessus, supposons que la suite exacte  $0 \rightarrow P \xrightarrow{u} Q \xrightarrow{v} R \rightarrow 0$  soit scindée par chaînes. Soit  $w : R \rightarrow P[1]$  son invariant d'homotopie. Alors  $\delta^n = H^n(w)$ .*

*Preuve.* Notons  $L$  le noyau de  $\partial_R^n v^n : Q^n \rightarrow R^{n+1}$  et  $'L$  le conoyau de  $u^{n+1} \partial_P^n : P^n \rightarrow Q^{n+1}$ . Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
& & Q^n & \xrightarrow{v^n} & R^n & \xrightarrow{w^n} & P^{n+1} \hookrightarrow Q^{n+1} \\
& \nearrow & & & \downarrow & & \downarrow \\
L & \xrightarrow{\quad} & Z^n(R) & \xrightarrow{Z^n(w)} & Z^{n+1}(P) & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & & \nearrow & 'Z^n(R) & \xrightarrow{'Z^n(w)} & 'Z^{n+1}(P) \xrightarrow{\quad} 'L \\
& & & & \downarrow & & \downarrow \\
& & H^n(R) & \xrightarrow{H^n(w)} & H^{n+1}(P) & & 
\end{array}$$

commute. Par ailleurs, l'homomorphisme de liaison  $\delta^n$  peut être caractérisé comme étant la flèche de  $H^n(R)$  dans  $H^{n+1}(P)$  faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & L & \xrightarrow{\quad} & H^n(R) \\
& & & & \downarrow & & \downarrow \\
& & & & & & \downarrow \\
'Z^n(P) & \xleftarrow{\quad} & P^n \hookrightarrow Q^n & \xrightarrow{v^n} & R^n & \xrightarrow{\quad} & 'Z^n(R) \\
& & \downarrow \partial_P^n & \swarrow \partial_Q^n & \downarrow \partial_R^n & & \downarrow \\
Z^{n+1}(P) \hookrightarrow P^{n+1} & \xrightarrow{\quad} & Q^{n+1} & \xrightarrow{u^{n+1}} & R^{n+1} & \xleftarrow{\quad} & Z^{n+1}(R) \\
& & \downarrow & \swarrow \partial_Q^n & \downarrow & & \downarrow \\
& & H^{n+1}(P) \hookrightarrow 'L & & & & 
\end{array}$$

Pour définir l'invariant d'homotopie  $w$ , nous avons utilisé des sections  $s^n$  de  $v^n$  et des rétractions  $r^n$  de  $u^n$ . La définition  $w = r \partial_Q s$  conduit à

$$\begin{aligned}
\partial_Q - uwv &= (ur + sv) \partial_Q (ur + sv) - ur \partial_Q sv \\
&= ur \partial_Q ur + sv \partial_Q sv + sv \partial_Q ur \\
&= ur u \partial_P r + s \partial_R v s v + s v u \partial_P r \\
&= u \partial_P r + s \partial_R v ;
\end{aligned}$$

comme  $L$  est le noyau de  $\partial_R^n v^n$  et  $'L$  est le conoyau de  $u^{n+1} \partial_P^n$ , les deux homomorphismes

$$L \hookrightarrow Q^n \xrightarrow{\partial_Q^n} Q^{n+1} \twoheadrightarrow 'L \quad \text{et} \quad L \hookrightarrow Q^n \xrightarrow{v^n} R^n \xrightarrow{w^n} P^{n+1} \xrightarrow{u^{n+1}} Q^{n+1} \twoheadrightarrow 'L$$

sont égaux. Nous pouvons donc rapprocher les deux diagrammes commutatifs et conclure.  $\square$

En observant qu'une équivalence d'homotopie induit un isomorphisme en homologie, on obtient :

**Corollaire 19.** *Un triangle distingué de  $K(\mathcal{A})$*

$$P \xrightarrow{u} Q \xrightarrow{v} R \xrightarrow{w} P[1]$$

*induit une suite exacte longue en cohomologie*

$$\dots \rightarrow H^{n-1}(R) \xrightarrow{H^{n-1}(w)} H^n(P) \xrightarrow{H^n(u)} H^n(Q) \xrightarrow{H^n(v)} H^n(R) \xrightarrow{H^n(h)} H^{n+1}(P) \rightarrow \dots$$

Autrement dit, le foncteur  $H^0 : K(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$  est un foncteur cohomologique.

Résumons la situation. À une suite exacte courte  $0 \rightarrow X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \rightarrow 0$  de complexes d'objets de  $\mathcal{A}$ , nous avons associé au paragraphe 4.2 son invariant d'homotopie  $w : Z \rightarrow X[1]$  : c'est un homomorphisme de la catégorie  $K(\mathcal{A})$  qui induit l'homomorphisme de liaison en homologie. L'hypothèse de base dans la construction est que la suite exacte de complexes soit scindée par chaînes ; nous voudrions nous en affranchir. C'est faisable, mais la construction de  $w$  dans le cas général nécessite d'inverser un quasi-isomorphisme. Il nous faut donc comprendre comment localiser une catégorie : c'est le but de la prochaine section.

## 5 Localisation de catégories

Dans ce qui suit,  $\mathcal{C}$  est une catégorie essentiellement petite ; voir le paragraphe 2.3 pour quelques explications complémentaires.

### 5.1 Construction générale

En algèbre commutative, la localisation est un procédé formel qui permet d'ajouter à un anneau commutatif  $A$  les inverses d'une famille  $S$ , la seule condition imposée à  $S$  étant d'être stable par multiplication. Le procédé existe aussi en algèbre non-commutative, mais dans ce cas, il est nécessaire d'imposer des conditions plus strictes à  $S$  afin que chaque fraction à droite  $as^{-1}$  puisse s'écrire comme une fraction à gauche  $t^{-1}b$  et vice-versa. Ces conditions sont appelées conditions d'Ore. Un anneau non-commutatif étant une catégorie additive avec un seul objet, il n'est pas surprenant que la même procédure puisse être appliquée à une catégorie.

Soit donc  $\mathcal{C}$  une catégorie et  $\mathcal{S}$  une collection d'homomorphismes de  $\mathcal{C}$  vérifiant les conditions suivantes :

**Or1** Si deux éléments  $f$  et  $g$  de  $\mathcal{S}$  sont des homomorphismes composables dans  $\mathcal{C}$ , alors  $gf$  appartient à  $\mathcal{S}$ . L'identité de chaque objet de  $\mathcal{C}$  appartient à  $\mathcal{S}$ .

**Or2** Tout diagramme

$$M \xleftarrow{s} L \xrightarrow{f} N \quad (\text{respectivement} \quad M \xrightarrow{g} P \xleftarrow{t} N)$$

de  $\mathcal{C}$ , où  $s$  (respectivement  $t$ ) appartient à  $\mathcal{S}$ , peut être plongé dans un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{f} & N \\ \Downarrow s & & \Downarrow t \\ M & \xrightarrow{g} & P, \end{array}$$

où  $t$  (respectivement  $s$ ) appartient à  $\mathcal{S}$ .

**Or3** Soit  $f$  et  $g$  deux homomorphismes de  $M$  dans  $N$ . Alors il existe un homomorphisme  $s : L \rightarrow M$  appartenant à  $\mathcal{S}$  tel que  $fs = gs$  si et seulement s'il existe un homomorphisme  $t : N \rightarrow P$  appartenant à  $\mathcal{S}$  tel que  $tf = tg$ .

Nous pouvons alors définir la catégorie  $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{C}$ . Les objets sont les mêmes que ceux de la catégorie  $\mathcal{C}$ . Les homomorphismes d'un objet  $M$  dans un objet  $N$  sont les fractions à droite  $f/s$ . Dans une telle fraction, il est sous-entendu que  $f$  et  $s$  sont des homomorphismes de  $\mathcal{C}$  ayant même domaine,  $f$  allant dans  $N$  et  $s$  allant dans  $M$ , ce qu'on représente par un diagramme

$$M \xleftarrow{s} \bullet \xrightarrow{f} N$$

avec  $s$  dans  $\mathcal{S}$ . Deux fractions s'écrivant de façons différentes peuvent bien sûr être égales : de fait, on veut l'égalité entre  $f/s$  et  $(fk)/(sk)$  chaque fois que cela a un sens, et pour cela on déclare que deux fractions  $f/s$  et  $f'/s'$  sont égales si leurs diagrammes

$$M \xleftarrow{s} \bullet \xrightarrow{f} N \quad \text{et} \quad M \xleftarrow{s'} \bullet \xrightarrow{f'} N$$

peuvent être plongés dans un diagramme commutatif comme ci-dessous avec  $sk$  appartenant à  $\mathcal{S}$ .

$$\begin{array}{ccc} & \bullet & \\ & \swarrow s & \searrow f \\ M & \bullet & N \\ & \swarrow s' & \searrow f' \\ & \bullet & \end{array}$$

On peut vérifier à l'aide des conditions d'Ore que cette notion d'égalité entre fractions est une relation d'équivalence, ce qui donne sens à la construction. (La preuve illustre le rôle de la condition **Or3** ; voir par exemple [8], pp. 425–426.)

Pour achever de définir la catégorie  $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{C}$ , il faut encore décrire la composition des homomorphismes. Celle-ci se fait par la loi  $(g/t) \circ (f/s) = (gh)/(su)$ , où  $h$  et  $u$  ont été trouvés grâce à l'axiome **Or2** de sorte que  $th = fu$  et que  $u$  appartienne à  $\mathcal{S}$ .

$$\begin{array}{ccccc} & & \bullet & & \\ & & \swarrow u & \searrow h & \\ & \bullet & & \bullet & \\ \swarrow s & & \searrow f & \swarrow t & \searrow g \\ M & & N & & P \end{array}$$

Comme plus haut, on peut vérifier à l'aide des conditions d'Ore que tout cela est bien défini : la fraction  $(gh)/(su)$  ne dépend pas du choix des homomorphismes  $f, s, g$  et  $t$  utilisés pour représenter les fractions  $f/s$  et  $g/t$ , et ne dépend pas du choix des homomorphismes  $h$  et  $u$  utilisés dans la construction. On vérifie également que la loi de composition ainsi définie sur les fractions est associative.

Enfin, on aurait pu tout aussi bien utiliser des fractions à gauche  $t \setminus g$  pour représenter les homomorphismes dans  $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{C}$ . De façon précise, il existe un isomorphisme de la catégorie définie par les fractions à gauche sur la catégorie définie par les fractions à droite ; cet isomorphisme envoie  $t \setminus g$  sur  $f/s$  si et seulement s'il existe  $u$  dans  $\mathcal{S}$  tel que  $gsu = tfu$ .

Il y a un foncteur canonique de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{C}$  : il est donné par l'identité au niveau des objets et par  $f \mapsto f/1$  au niveau des homomorphismes. On a alors le résultat suivant.

**Proposition 20.**

- (i) *Le foncteur canonique envoie les homomorphismes de  $\mathcal{C}$  appartenant à  $\mathcal{S}$  sur des isomorphismes de  $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{C}$ .*
- (ii) *Soit  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un foncteur qui envoie les homomorphismes de  $\mathcal{C}$  appartenant à  $\mathcal{S}$  sur des isomorphismes de  $\mathcal{D}$ . Alors il existe un unique foncteur  $G : \mathcal{S}^{-1}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  tel que  $F$  soit le composé de  $G$  avec le foncteur canonique de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{C}$ .*

Enfin, quand  $\mathcal{C}$  est additive, la catégorie  $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{C}$  peut être naturellement munie d'une structure de catégorie additive. Il s'agit essentiellement de savoir définir la somme de deux fractions ; or l'axiome **Or2** implique qu'on peut toujours réduire deux fractions à droite au même dénominateur. Dans ce cadre, le foncteur canonique de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{C}$  est additif, et le foncteur  $G$  de la proposition 20 (ii) est additif dès que le foncteur  $F$  l'est.

## 5.2 Localisation d'une catégorie triangulée

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie triangulée. Soit  $\mathcal{N}$  une classe d'objets satisfaisant aux conditions suivantes :

**Ac0** Tout objet de  $\mathcal{C}$  isomorphe à un objet de  $\mathcal{N}$  appartient à  $\mathcal{N}$ .

**Ac1**  $0$  appartient à  $\mathcal{N}$ .

**Ac2** Un objet appartient à  $\mathcal{N}$  si et seulement si sa suspension appartient à  $\mathcal{N}$ .

**Ac3** Si deux des trois sommets d'un triangle distingué appartiennent à  $\mathcal{N}$ , alors il en est de même du troisième.

L'axiome **Ac3** implique en particulier que  $\mathcal{N}$  est stable par somme directe.

Rappelons que chaque homomorphisme  $u$  peut être inscrit dans un triangle distingué, unique à isomorphisme près, et que l'objet opposé à  $u$  dans ledit triangle est appelé le cône de  $u$ . Appelons  $\mathcal{S}$  la classe des homomorphismes dont le cône appartient à  $\mathcal{N}$ .

**Proposition 21.** *La collection  $\mathcal{S}$  satisfait les conditions d'Ore dans  $\mathcal{C}$ .*

*Preuve.* Pour établir **Or1**, il faut montrer que la composée de deux homomorphismes  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$  appartenant à  $\mathcal{S}$  est aussi dans  $\mathcal{S}$ . Faisons appel à l'axiome **TR4**, dont nous adoptons les notations. L'appartenance de  $u$  et  $v$  à  $\mathcal{S}$  se traduit par l'appartenance de  $Z' = \text{Con}(u)$  et  $X' = \text{Con}(v)$  à  $\mathcal{N}$ . L'axiome **Ac3** entraîne alors que  $Y' = \text{Con}(vu)$  est dans  $\mathcal{N}$ . Ainsi  $vu$  appartient à  $\mathcal{S}$ , comme désiré. La première condition de **Or1** est donc remplie, et la seconde résulte banalement de **Ac1** et **TR1**.

Montrons **Or2**. Donnons-nous un diagramme

$$Y \xrightarrow{y} Y' \xleftarrow{t} X'$$

avec  $t$  dans  $\mathcal{S}$ . Par l'axiome **TR1**, nous pouvons compléter l'arête  $X' \xrightarrow{t} Y'$  en un triangle distingué  $X' \xrightarrow{t} Y' \xrightarrow{v'} Z \xrightarrow{w'} \Sigma X'$ , puis pouvons compléter l'arête  $Y \xrightarrow{y} Y'$  en un triangle distingué  $X \xrightarrow{s} Y \xrightarrow{v'y} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$ . Utilisant l'axiome **TR3**, nous trouvons un homomorphisme  $x$  faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{s} & Y & \xrightarrow{v'y} & Z & \xrightarrow{w} & \Sigma X \\ \downarrow x & & \downarrow y & & \parallel & & \downarrow \Sigma x \\ X' & \xrightarrow{t} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z & \xrightarrow{w'} & \Sigma X' \end{array}$$

Comme  $t$  est dans  $\mathcal{S}$ , l'objet  $Z$  est dans  $\mathcal{N}$ , et donc  $s$  est dans  $\mathcal{S}$ . Nous avons ainsi pu compléter notre diagramme de la façon requise par l'axiome **Or2**. Une construction analogue montre le second cas de **Or2**.

En vue de prouver **Or3**, considérons deux homomorphismes  $f$  et  $g$  de  $T$  dans  $X$  et un homomorphisme  $t : X \rightarrow Y$  dans  $\mathcal{S}$  tels que  $tf = tg$ . Posons  $h = f - g$  et complétons l'arête  $X \xrightarrow{t} Y$  en un triangle distingué  $Z \xrightarrow{u} X \xrightarrow{t} Y \xrightarrow{w} \Sigma Z$ . Le foncteur  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, ?)$  étant cohomologique, la suite

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, Y)$$

est exacte. L'hypothèse  $th = 0$  dit alors que  $h$  se factorise à travers  $Z$  : on écrit  $h = ux$ , et on complète l'arête  $T \xrightarrow{x} Z$  en un triangle distingué  $U \xrightarrow{s} T \xrightarrow{x} Z \xrightarrow{y} \Sigma U$ . Le fait que  $t$  soit dans  $\mathcal{S}$  entraîne que son cône  $\Sigma Z$  est dans  $\mathcal{N}$ . L'axiome **Ac2** dit alors que le cône  $Z$  de  $s$  est dans  $\mathcal{N}$ , d'où  $s \in \mathcal{S}$ . De  $xs = 0$  découle  $hs = 0$ , et donc  $fs = gs$ . La réciproque est analogue.  $\square$

On peut donc localiser la catégorie  $\mathcal{C}$  par rapport à  $\mathcal{S}$  et obtenir une catégorie additive  $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{C}$ . L'axiome **Ac2** implique que  $\mathcal{S}$  est stable par décalage ; le foncteur de suspension de  $\mathcal{C}$  se prolonge donc à  $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{C}$ . On peut alors parler de triangle dans cette catégorie.

On appelle triangle distingué de  $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{C}$  tout triangle  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$  isomorphe à l'image dans  $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{C}$  d'un triangle distingué de  $\mathcal{C}$ . Il y a ainsi potentiellement plus de triangles distingués dans  $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{C}$  qu'il n'y en a dans  $\mathcal{C}$ .

Les axiomes de Verdier sont satisfaits. De fait, **TR0** et **TR2** ne posent pas de problème. Vérifions **TR1**. Soit  $u : X \rightarrow Y$  un homomorphisme de  $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{C}$ . Représentons-le par une



fraction à droite  $X \xleftarrow{s} X' \xrightarrow{f} Y$ . Inscrivons  $f$  comme une arête dans un triangle distingué  $X' \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X'$  de  $\mathcal{C}$  et posons  $w = (\Sigma s)h$ . Dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} X' & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & \Sigma X' \\ \parallel s & & \parallel & & \parallel & & \parallel \Sigma s \\ X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{w} & \Sigma X, \end{array}$$

les flèches verticales sont des isomorphismes de  $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{C}$ . La ligne du bas est donc un triangle distingué de  $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{C}$ , et elle contient  $u$ . Cela montre la première condition de **TR1**. La seconde condition est banale.

Vérifions maintenant **TR3**. Il s'agit de compléter un diagramme de la forme

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & \Sigma X \\ \parallel r & & \parallel s & & \parallel & & \parallel \Sigma r \\ X'' & & Y'' & & \bullet & & \Sigma X'' \\ \downarrow x & & \downarrow y & & \vdots & & \downarrow \Sigma x \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & \Sigma X'. \end{array}$$

L'axiome **Or2** fournit une suite de la forme  $X'' \xleftarrow{q} X_3 \xrightarrow{f} Y''$  de sorte que  $sf = urq$ . Insérons-la dans le diagramme : nous obtenons deux carrés, et celui du haut est commutatif dans  $\mathcal{C}$ . La commutativité dans  $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{C}$  du diagramme donné s'écrit algébriquement  $(u'xq)/(rq) = (yf)/(rq)$ ; il existe donc  $p : X_4 \rightarrow X_3$  tel que  $(u'xq)p = (yf)p$  et  $rqp \in \mathcal{S}$ . Insérons maintenant dans le diagramme le triangle distingué  $X_4 \xrightarrow{u''} Y'' \xrightarrow{v''} Z'' \xrightarrow{w''} \Sigma X_4$  construit sur l'homomorphisme  $u'' = fp$ ; nous avons alors un diagramme commutatif dans  $\mathcal{C}$ , et l'axiome **TR3** permet d'ajouter les homomorphismes  $t$  et  $z$ .

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & \Sigma X \\ \parallel rqp & & \parallel s & & \uparrow t & & \parallel \Sigma(rqp) \\ X_4 & \xrightarrow{u''} & Y'' & \xrightarrow{v''} & Z'' & \xrightarrow{w''} & \Sigma X_4 \\ \downarrow xqp & & \downarrow y & & \downarrow z & & \downarrow \Sigma(xqp) \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & \Sigma X'. \end{array}$$

La proposition 10 affirme que les cônes de  $rqp$ ,  $s$  et  $t$  sont les sommets d'un triangle distingué. Or  $rqp$  et  $s$  sont dans  $\mathcal{S}$ . L'axiome **A3** entraîne alors que  $t$  est dans  $\mathcal{S}$ .

Le lecteur trouvera une preuve de **TR4** dans [5], section IV.2.

## 6 Catégorie dérivée d'une catégorie abélienne

À partir de maintenant, toutes les catégories envisagées seront supposées essentiellement petites.

## 6.1 Inversion des quasi-isomorphismes

À une suite exacte de complexes scindée par chaînes, nous avons associé un invariant d'homotopie dans la section 4, qui induit l'homomorphisme de liaison en homologie. Nous avons affirmé à la fin du paragraphe 4.5 que pour pouvoir s'affranchir de l'hypothèse « scindée par chaînes », il faut pouvoir inverser un quasi-isomorphisme. Voici venu le moment de définir précisément les choses.

Un complexe  $X$  est dit exact ou acyclique si  $H^n(X) = 0$  pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ . Un homomorphisme de complexes  $u : X \rightarrow Y$  est appelé quasi-isomorphisme si  $H^n(u) : H^n(X) \rightarrow H^n(Y)$  est un isomorphisme pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ . Le corollaire 19 implique que dans un triangle distingué  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$  de  $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ ,  $u$  est un quasi-isomorphisme si et seulement si  $Z$  est acyclique. Autrement dit, un homomorphisme de complexes est un quasi-isomorphisme si et seulement si son cône est acyclique.

La catégorie dérivée de  $\mathcal{A}$  est définie à partir de  $\mathbf{K}(\mathcal{A})$  en ajoutant formellement les inverses des quasi-isomorphismes. Ainsi  $\mathbf{D}(\mathcal{A})$  a les mêmes objets que  $\mathbf{K}(\mathcal{A})$  mais a davantage d'homomorphismes. Faisant cela, on rend isomorphes des complexes qui n'étaient pas homotopiquement équivalents. En résumé,  $\mathbf{D}(\mathcal{A})$  a davantage d'homomorphismes et moins de classes d'isomorphismes d'objets que  $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ .

Concrètement, on applique la construction du paragraphe 5.2 à  $\mathcal{C} = \mathbf{K}(\mathcal{A})$ , en prenant pour  $\mathcal{N}$  la classe des complexes acycliques. La vérification des axiomes **Ac0**, **Ac1** et **Ac2** est banale, celle de **Ac3** découle du corollaire 19 et du lemme des cinq. Les homomorphismes dans  $\mathcal{S}$  sont alors les classes d'homotopie de quasi-isomorphismes. La catégorie localisée  $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{C}$  est appelée catégorie dérivée de  $\mathcal{A}$  et est notée  $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ .

*Remarque 22.* Certaines preuves du paragraphe 5.2 peuvent être simplifiées dans le cas particulier considéré ici. Par exemple, l'axiome **Or1** est ici banalement vrai, alors que nous avons basé sa vérification sur l'axiome de l'octaèdre et la propriété **Ac3**. Autre exemple : pour montrer à la fin de la preuve de l'axiome **TR3** que  $t$  est dans  $\mathcal{S}$ , plutôt que d'invoquer la proposition 10, on peut écrire les suites exactes longues de cohomologie et utiliser le lemme des cinq.

Un triangle  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$  de  $\mathbf{D}(\mathcal{A})$  est distingué si et seulement s'il existe une suite de complexes  $X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} X'[1]$  exacte scindée par chaînes, d'invariant d'homotopie disons  $w'$ , et un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\ \downarrow x & & \downarrow y & & \downarrow z & & \downarrow \Sigma x \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & X'[1] \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales sont des isomorphismes. Attention ici au petit abus de langage : sur le diagramme, les deux flèches en bas à gauche ne sont pas les homomorphismes de complexes  $u'$  et  $v'$  à proprement parler, mais sont les homomorphismes dans  $\mathbf{D}(\mathcal{A})$  induits par ces homomorphismes de complexes.

*Scolie 23.* La proposition 20 montre que le foncteur  $H^n : \mathbf{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$  se prolonge de manière unique à  $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ . La conclusion du corollaire 19 vaut donc encore quand  $P \xrightarrow{u} Q \xrightarrow{v} R \xrightarrow{w} P[1]$  est un triangle distingué de  $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ .

## 6.2 Homomorphisme caractéristique d'une suite exacte courte de complexes

Expliquons maintenant pourquoi il est nécessaire d'inverser les quasi-isomorphismes pour pouvoir généraliser la proposition 18 à une suite exacte de complexes  $0 \rightarrow X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \rightarrow 0$  pas nécessairement scindée. Nous cherchons à définir une flèche  $w : Z \rightarrow X[-1]$ . Reprenons la définition du cône d'un homomorphisme de complexes (paragraphe 4.3). Les deux lignes du diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & \text{Con}(u) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}} & X[1] & \xrightarrow{-u[1]} & Y[1] \\
 \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \downarrow & & \parallel & & \begin{pmatrix} 0 & v \end{pmatrix} \downarrow & \nearrow w & \downarrow \begin{pmatrix} -u[1] \\ 0 \end{pmatrix} & & \parallel \\
 \text{Con}(-v[-1]) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & \text{Con}(v) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}} & Y[1]
 \end{array}$$

sont des triangles distingués; la proposition suivante affirme qu'ils sont isomorphes dans la catégorie  $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ .

**Proposition 24.** *Le diagramme ci-dessus est commutatif à homotopie près et les flèches verticales sont des quasi-isomorphismes.*

*Preuve.* La commutativité à homotopie près résulte du calcul

$$\begin{pmatrix} -u[1] \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & v \end{pmatrix} = \partial_{\text{Con}(v)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_{\text{Con}(u)}.$$

Regardons à présent le triangle distingué sur la première ligne de notre diagramme. Les deuxième et troisième flèches forment une suite de complexes exacte scindée par chaînes. Lui appliquant la proposition 14, nous obtenons le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{u'} & \text{Cyl}(u) & \xrightarrow{v'} & \text{Con}(u) & & Y[1] \\
 & \searrow u & \downarrow y & \nearrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \searrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} & & \nearrow -u[1] \\
 & & Y & & X[1] & & 
 \end{array}$$

où  $\text{Cyl}(u)$  est le cône de l'homomorphisme  $-(1 \ 0) : \text{Con}(u)[-1] \rightarrow X$ . (Les flèches en diagonale sont disposées comme dans l'énoncé de la proposition 14, mais on commence ici un cran plus à gauche.) Concrètement,

$$\text{Cyl}(u) = \text{Con}(u) \oplus X = X[1] \oplus Y \oplus X, \quad u' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad y = (0 \ 1 \ u).$$

On sait enfin que  $y$  est une équivalence d'homotopie. Le recollement de ce diagramme avec le précédent nous donne un troisième diagramme, qui est strictement commutatif et à lignes exactes.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{u'} & \text{Cyl}(u) & \xrightarrow{v'} & \text{Con}(u) & \longrightarrow & 0 \\
& & \parallel & & \downarrow y & & \downarrow (0 \ v) & & \\
0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Le passage à la cohomologie livre alors un diagramme commutatif, par naturalité de l'homomorphisme de liaison. La flèche  $y$  est une équivalence d'homotopie, donc un quasi-isomorphisme. Le lemme des cinq permet alors de conclure que  $(0 \ v)$  est un quasi-isomorphisme.

On raisonne de façon analogue pour prouver que  $\begin{pmatrix} -u[1] \\ 0 \end{pmatrix}$  est un quasi-isomorphisme.  $\square$

Nous pouvons alors définir un homomorphisme  $w : Z \rightarrow X[1]$  dans la catégorie  $D(\mathcal{A})$  par la fraction à droite  $(1 \ 0) / (0 \ v)$  ou la fraction à gauche  $\begin{pmatrix} -u[1] \\ 0 \end{pmatrix} \setminus \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . La proposition précédente garantit que les deux écritures ont un sens et définissent le même homomorphisme. Ce dernier est appelé l'homomorphisme caractéristique de la suite exacte  $0 \rightarrow X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \rightarrow 0$ . En outre, le triangle  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$  est distingué, car isomorphe aux triangles distingués sur les lignes du diagramme.

La proposition suivante indique que l'homomorphisme caractéristique se comporte de façon naturelle par rapport aux homomorphismes de triangles.

**Proposition 25.** *On se donne un diagramme commutatif de complexes*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow x & & \downarrow y & & \downarrow z & & \\
0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

On suppose que les lignes sont des suites exactes, dont on note  $w : Z \rightarrow X[1]$  et  $w' : Z' \rightarrow X'[1]$  les homomorphismes caractéristiques. On a alors l'égalité  $x[1]w = w'z$ .

*Preuve.* On vérifie que l'on a un cube de complexes et d'homomorphismes de complexes, dont les quatre faces latérales sont commutatives.

$$\begin{array}{ccccc}
& & X[1] & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -u[1] \\ 0 \end{pmatrix}} & \text{Con}(v) \\
& \nearrow (1 \ 0) & \downarrow & \nearrow (0 \ v) & \downarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\text{Con}(u) & \longrightarrow & & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & \text{Con}(v') \\
& & \downarrow x[1] & & \downarrow z & & \downarrow \begin{pmatrix} y[1] \ 0 \\ 0 \ z \end{pmatrix} \\
& & X'[1] & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -u'[1] \\ 0 \end{pmatrix}} & \text{Con}(v') & & \\
& \nearrow (1 \ 0) & \downarrow & \nearrow (0 \ v') & \downarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & & \\
\text{Con}(u') & \longrightarrow & & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & \text{Con}(v') \\
& & \downarrow \begin{pmatrix} x[1] \ 0 \\ 0 \ y \end{pmatrix} & & & & 
\end{array}$$

□

### 6.3 Homomorphisme caractéristique d'une suite exacte de longueur finie

Considérons une suite exacte de longueur finie dans la catégorie  $\text{Comp}(\mathcal{A})$ .

$$0 \rightarrow X_{n+1} \xrightarrow{u_n} X_n \xrightarrow{u_{n-1}} \cdots \xrightarrow{u_1} X_1 \xrightarrow{u_0} X_0 \rightarrow 0. \quad (*)$$

Introduisant pour  $k \in \{1, \dots, n\}$  le conoyau  $'Z_k$  de  $u_k$  et posant  $'Z_{n+1} = X_{n+1}$ , nous découpons cette suite en  $n$  suites courtes  $0 \rightarrow 'Z_{k+1} \rightarrow X_k \rightarrow 'Z_k \rightarrow 0$ . Appelant  $w_k$  l'homomorphisme caractéristique de cette dernière, on peut former le produit  $\tilde{w} = w_n[n-1] \cdots w_2[1]w_1$ . Cet élément  $\tilde{w} \in \text{Hom}_{\text{D}(\mathcal{A})}(X_0, X_{n+1}[n])$  est appelé homomorphisme caractéristique de la suite (\*).

La proposition 25 se généralise immédiatement à ce cadre : étant donné un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X_{n+1} & \longrightarrow & X_n & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & X_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow x_{n+1} & & \downarrow x_n & & & & \downarrow x_1 & & \downarrow x_0 & & \\ 0 & \longrightarrow & X'_{n+1} & \longrightarrow & X'_n & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X'_1 & \longrightarrow & X'_0 & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

les homomorphismes caractéristiques  $\tilde{w} : X_0 \rightarrow X_{n+1}[n]$  et  $\tilde{w}' : X'_0 \rightarrow X'_{n+1}[n]$  sont reliés par  $\tilde{w}'x_0 = x_{n+1}[n]\tilde{w}$ .

Nous reverrons cette définition dans la section 8. Pour l'heure, voyons comme application une preuve d'un cas particulier du diagramme  $3 \times 3$  (proposition 10) qui ne fait pas appel à l'axiome de l'octaèdre.

**Proposition 26.** *Considérons un diagramme commutatif de complexes d'objets de  $\mathcal{A}$  à lignes et à colonnes exactes.*

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow x & & \downarrow y & & \downarrow z \\ 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow x' & & \downarrow y' & & \downarrow z' \\ 0 & \longrightarrow & X'' & \xrightarrow{u''} & Y'' & \xrightarrow{v''} & Z'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Soient  $w, w', w''$  les homomorphismes caractéristiques des trois lignes et  $x'', y'', z''$  les homomorphismes caractéristiques des trois colonnes. Alors  $w[1]z'' = -x''[1]w''$ .

*Preuve.* Le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{zv} & Z' & \xrightarrow{z'} & Z'' & \longrightarrow & 0 \\
& & \uparrow 1 & & \uparrow (1 \ 0) & & \uparrow v' & & \uparrow 1 & & \\
0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\begin{pmatrix} u \\ x \end{pmatrix}} & Y \oplus X' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} y & -u' \end{pmatrix}} & Y' & \xrightarrow{z'v'} & Z'' & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow -1 & & \downarrow (0 \ -1) & & \downarrow y' & & \downarrow 1 & & \\
0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{x} & X' & \xrightarrow{u''x'} & Y'' & \xrightarrow{v''} & Z'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

est commutatif à lignes exactes. L'homomorphisme caractéristique de la ligne du haut est  $w[1]z''$  et celui de la ligne du bas est  $x''[1]w''$ . La généralisation de la proposition 25 énoncée ci-dessus implique que l'homomorphisme caractéristique de la deuxième ligne est égal à celui de la première et est opposé à celui de la troisième.  $\square$

## 7 Catégories dérivées bornées

Nous considérons une catégorie abélienne  $\mathcal{A}$ . Le but de ce paragraphe est de définir diverses sous-catégories pleines de  $D(\mathcal{A})$  par des conditions d'amplitude cohomologique.

### 7.1 Foncteurs de troncation

À un entier  $n \in \mathbf{Z}$ , on associe deux foncteurs  $\tau_{\leq n}$  et  $\tau_{\geq n}$  de la catégorie  $\text{Comp}(\mathcal{A})$  dans elle-même, appelés foncteurs de troncation (intelligente). L'action de ces foncteurs sur un complexe  $X$  est définie explicitement par le diagramme

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\tau_{\leq n}X : & \cdots & \longrightarrow & X^{n-2} & \xrightarrow{\partial_X^{n-2}} & X^{n-1} & \xrightarrow{\partial_X^{n-1}} & \ker \partial_X^n & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\
& & & \parallel & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
X : & \cdots & \longrightarrow & X^{n-2} & \xrightarrow{\partial_X^{n-2}} & X^{n-1} & \xrightarrow{\partial_X^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{\partial_X^n} & X^{n+1} & \xrightarrow{\partial_X^{n+1}} & X^{n+2} & \longrightarrow & \cdots \\
& & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \parallel & & \\
\tau_{\geq n}X : & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \text{coker } \partial_X^{n-1} & \xrightarrow{\partial_X^n} & X^{n+1} & \xrightarrow{\partial_X^{n+1}} & X^{n+2} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Je laisse au lecteur le soin de définir l'action de  $\tau_{\leq n}$  et  $\tau_{\geq n}$  sur les homomorphismes de complexes.

Pour chaque complexe  $X$ , on a donc un monomorphisme de complexes  $\tau_{\leq n}X \hookrightarrow X$  qui induit en homologie des isomorphismes en degré inférieur ou égal à  $n$ , et un épimorphisme de complexes  $X \twoheadrightarrow \tau_{\geq n}X$  qui induit en homologie des isomorphismes en degré supérieur ou égal à  $n$ . Ces homomorphismes de complexes sont naturels en  $X$  ; autrement dit, ils sont donnés par des homomorphismes de foncteurs  $\tau_{\leq n} \rightarrow \text{id}$  et  $\text{id} \rightarrow \tau_{\geq n}$ .

Soient  $m \leq n$  deux entiers et  $X$  un complexe. Les complexes  $\tau_{\leq n}\tau_{\geq m}X$  et  $\tau_{\geq m}\tau_{\leq n}X$  sont canoniquement isomorphes, car égaux respectivement à l'image et à la coimage de l'homomorphisme composé  $\tau_{\leq n}X \hookrightarrow X \twoheadrightarrow \tau_{\geq m}X$ . Dans le cas  $m = n$ , le complexe  $\tau_{\leq n}\tau_{\geq n}X$  est simplement l'objet  $H^n(X)$  placé en degré  $n$ .

**Proposition 27.** *Les homomorphismes canoniques s'inscrivent dans un triangle distingué de  $D(\mathcal{A})$*

$$\tau_{\leq n}X \rightarrow X \rightarrow \tau_{\geq n+1}X \rightarrow \tau_{\leq n}X[1].$$

*Preuve.* L'homomorphisme  $X \rightarrow \tau_{\geq n+1}X$  induit par passage au quotient un quasi-isomorphisme de  $X/\tau_{\leq n}X$  dans  $\tau_{\geq n+1}X$ . Il suffit alors de comparer avec le triangle distingué issu de la suite exacte courte  $0 \rightarrow \tau_{\leq n}X \rightarrow X \rightarrow X/\tau_{\leq n}X \rightarrow 0$ .  $\square$

## 7.2 Troncation et catégorie dérivée

Donnons-nous un entier  $n \in \mathbb{Z}$ , fixé pour tout ce paragraphe.

Les foncteurs de troncation  $\tau_{\leq n}$  et  $\tau_{\geq n}$  préservent l'homotopie entre homomorphismes et induisent donc des endofoncteurs de la catégorie homotopique  $K(\mathcal{A})$ . De plus, ils envoient un quasi-isomorphisme sur un quasi-isomorphisme; d'après la proposition 20, ils se prolongent donc de manière unique à la catégorie dérivée  $D(\mathcal{A})$ .

On note  $D^{\leq n}(\mathcal{A})$  la sous-catégorie pleine de  $D(\mathcal{A})$  formée des complexes  $X$  tels que  $H^m(X) = 0$  pour  $m > n$ . Si  $X$  est un complexe, alors  $\tau_{\leq n}X$  appartient à  $D^{\leq n}(\mathcal{A})$ ; nous regarderons dorénavant  $\tau_{\leq n}$  comme un foncteur de  $D(\mathcal{A})$  dans  $D^{\leq n}(\mathcal{A})$ . Si  $X$  appartient à  $D^{\leq n}(\mathcal{A})$ , alors l'homomorphisme de complexes  $\tau_{\leq n}X \rightarrow X$  est un quasi-isomorphisme, donc un isomorphisme dans  $D(\mathcal{A})$ ; ainsi  $D^{\leq n}(\mathcal{A})$  est l'image essentielle de  $\tau_{\leq n}$ .

De façon symétrique, on note  $D^{\geq n}(\mathcal{A})$  la sous-catégorie pleine de  $D(\mathcal{A})$  formée des complexes  $X$  tels que  $H^m(X) = 0$  pour  $m < n$ . Si  $X$  est un complexe, alors  $\tau_{\geq n}X$  appartient à  $D^{\geq n}(\mathcal{A})$ ; nous regarderons dorénavant  $\tau_{\geq n}$  comme un foncteur de  $D(\mathcal{A})$  dans  $D^{\geq n}(\mathcal{A})$ . Si  $X$  appartient à  $D^{\geq n}(\mathcal{A})$ , alors l'homomorphisme de complexes  $X \rightarrow \tau_{\geq n}X$  est un quasi-isomorphisme, donc un isomorphisme dans  $D(\mathcal{A})$ ; ainsi  $D^{\geq n}(\mathcal{A})$  est l'image essentielle de  $\tau_{\geq n}$ .

**Proposition 28.**

- (i) *Pour chaque  $X \in D^{\leq n}(\mathcal{A})$  et chaque  $Y \in D(\mathcal{A})$ , l'homomorphisme  $\tau_{\leq n}Y \rightarrow Y$  induit un isomorphisme  $\text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X, \tau_{\leq n}Y) \cong \text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X, Y)$ .*
- (ii) *Pour chaque  $X \in D(\mathcal{A})$  et chaque  $Y \in D^{\geq n}(\mathcal{A})$ , l'homomorphisme  $X \rightarrow \tau_{\geq n}X$  induit un isomorphisme  $\text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(\tau_{\geq n}X, Y) \cong \text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X, Y)$ .*

*Preuve.* On se place dans les hypothèses de (i). Appelons  $c : \tau_{\leq n}Y \rightarrow Y$  l'homomorphisme canonique. Soit  $f/s$  une fraction représentant un élément du noyau de  $\text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X, c)$ ; ici  $f : X' \rightarrow \tau_{\leq n}Y$  est un homomorphisme de complexes et  $s : X' \rightarrow X$  est un quasi-isomorphisme. L'égalité  $cf/s = 0$  entre homomorphismes de  $D(\mathcal{A})$  se traduit par l'existence d'un quasi-isomorphisme  $t : X'' \rightarrow X'$  tel que  $cft = 0$  dans  $K(\mathcal{A})$ . En appliquant le foncteur  $\tau_{\leq n}$ , qui envoie  $c$  sur l'identité de  $\tau_{\leq n}Y$ , nous obtenons  $\tau_{\leq n}(ft) = 0$  dans  $K(\mathcal{A})$ . En outre, l'homomorphisme canonique  $d : \tau_{\leq n}X'' \rightarrow X''$  est un quasi-isomorphisme, car  $X''$  appartient à  $D^{\leq n}(\mathcal{A})$ . Le diagramme de gauche ci-dessous indique alors que  $f/s = \tau_{\leq n}(ft)/(std) = 0$  dans  $\text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X, \tau_{\leq n}Y)$ . Ainsi  $\text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X, c)$  est injectif.

Par ailleurs, un homomorphisme de  $X$  dans  $Y$  est représenté par une fraction  $g/u$ , où  $g : Y' \rightarrow Y$  est un homomorphisme de complexes et  $u : Y' \rightarrow X$  est un quasi-isomorphisme. Appliquant le foncteur  $\tau_{\leq n}$  et lisant le diagramme à droite ci-dessous, nous concluons que  $g/u = (ge)/(ue) = c(\tau_{\leq n}g)/(ue)$  se factorise à travers  $c$ . Ainsi  $\text{Hom}_{\mathbf{D}(\mathcal{A})}(X, c)$  est surjectif.

$$\begin{array}{ccc}
X'' & \xleftarrow{d} & \tau_{\leq n}X'' \\
\downarrow t & & \downarrow \tau_{\leq n}(ft) \\
X \xleftarrow{s} X' & \xrightarrow{f} & \tau_{\leq n}Y \xrightarrow{c} Y
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\tau_{\leq n}Y' & \xrightarrow{\tau_{\leq n}g} & \tau_{\leq n}Y \\
\downarrow e & & \downarrow c \\
X \xleftarrow{u} Y' & \xrightarrow{g} & Y
\end{array}$$

Tout ceci prouve (i). La preuve de (ii) est analogue.  $\square$

Cette proposition affirme que  $\tau_{\leq n}$  est l'adjoint à droite du foncteur d'inclusion  $\mathbf{D}^{\leq n}(\mathcal{A}) \subseteq \mathbf{D}(\mathcal{A})$  et que  $\tau_{\geq n}$  est l'adjoint à gauche du foncteur d'inclusion  $\mathbf{D}^{\geq n}(\mathcal{A}) \subseteq \mathbf{D}(\mathcal{A})$ . Dans ce contexte, les deux homomorphismes canoniques  $\tau_{\leq n}X \rightarrow X$  et  $X \rightarrow \tau_{\geq n}X$  sont des homomorphismes d'adjonction.

**Corollaire 29.** *Si  $m > n$ , alors  $\text{Hom}_{\mathbf{D}(\mathcal{A})}(X, Y) = 0$  pour chaque  $X \in \mathbf{D}^{\leq n}(\mathcal{A})$  et chaque  $Y \in \mathbf{D}^{\geq m}(\mathcal{A})$ .*

*Preuve.* Soient  $X \in \mathbf{D}^{\leq n}(\mathcal{A})$  et  $Y \in \mathbf{D}^{\geq m}(\mathcal{A})$ . Observant que l'homomorphisme canonique  $Y \rightarrow \tau_{\geq m}Y$  est un isomorphisme dans  $\mathbf{D}(\mathcal{A})$  et utilisant la proposition 28 (i), on écrit

$$\text{Hom}_{\mathbf{D}(\mathcal{A})}(X, Y) \cong \text{Hom}_{\mathbf{D}(\mathcal{A})}(X, \tau_{\geq m}Y) \cong \text{Hom}_{\mathbf{D}(\mathcal{A})}(X, \tau_{\leq n}\tau_{\geq m}Y) = \text{Hom}_{\mathbf{D}(\mathcal{A})}(X, 0) = 0.$$

$\square$

### 7.3 Sous-catégories $\mathbf{D}^{[m,n]}(\mathcal{A})$

Étant donné un intervalle borné  $[m, n]$  de  $\mathbf{Z}$ , on pose

$$\mathbf{D}^{[m,n]}(\mathcal{A}) = \mathbf{D}^{\geq m}(\mathcal{A}) \cap \mathbf{D}^{\leq n}(\mathcal{A}).$$

Si  $X$  est un complexe, alors  $\tau_{\geq m}\tau_{\leq n}X$  appartient à  $\mathbf{D}^{[m,n]}(\mathcal{A})$ . Si  $X$  appartient à  $\mathbf{D}^{[m,n]}(\mathcal{A})$ , alors toutes les flèches dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
& X & \\
\swarrow & & \searrow \\
\tau_{\leq n}X & & \tau_{\geq m}X \\
\searrow & & \swarrow \\
& \tau_{\geq m}\tau_{\leq n}X &
\end{array}$$

sont des quasi-isomorphismes, donc des isomorphismes dans  $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ ; ainsi  $\mathbf{D}^{[m,n]}(\mathcal{A})$  est l'image essentielle de  $\tau_{\geq m}\tau_{\leq n}$ .



Le cas particulier  $m = n = 0$  est remarquable :  $D^{[0]}(\mathcal{A})$  est une catégorie abélienne isomorphe à  $\mathcal{A}$ . En vue de montrer ce fait, appelons plongement en degré zéro le foncteur de  $\mathcal{A}$  dans  $D(\mathcal{A})$  qui associe à un objet  $X$  le complexe  $\cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow X \rightarrow 0 \rightarrow 0 \cdots$  concentré en degré zéro.

**Proposition 30.** *Le plongement en degré 0 est une équivalence de catégories additives de  $\mathcal{A}$  sur  $D^{[0]}(\mathcal{A})$ .*

*Preuve.* Appelons  $E : \mathcal{A} \rightarrow D(\mathcal{A})$  le foncteur de plongement en degré zéro. Son image essentielle est  $D^{[0]}(\mathcal{A})$ , puisque chaque complexe appartenant à  $D^{[0]}(\mathcal{A})$  est isomorphe dans  $D(\mathcal{A})$  à un complexe concentré en degré zéro.

La composée  $H^0 \circ E$  est l'identité de  $\mathcal{A}$ . Le foncteur  $E$  est donc fidèle, c'est-à-dire, injectif sur les homomorphismes.

Il nous reste à montrer que  $E$  est plein, c'est-à-dire surjectif sur les homomorphismes. Donnons-nous deux objets  $X$  et  $Y$  de  $\mathcal{A}$ . Un homomorphisme dans  $D(\mathcal{A})$  de  $E(X)$  vers  $E(Y)$  est représenté par une fraction  $u/s$ , où  $u : T \rightarrow E(Y)$  est un homomorphisme et  $s : T \rightarrow E(X)$  est un quasi-isomorphisme. L'application des foncteurs  $\tau_{\leq 0}$  et  $\tau_{\geq 0}$  fournit le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & T & & \\
 & \swarrow s & \uparrow & \searrow u & \\
 E(X) & \xleftarrow{\tau_{\leq 0}s} & \tau_{\leq 0}T & \xrightarrow{\tau_{\leq 0}u} & E(Y) \\
 & \swarrow \tau_{\geq 0}\tau_{\leq 0}s & \downarrow & \searrow \tau_{\geq 0}\tau_{\leq 0}u & \\
 & & \tau_{\geq 0}\tau_{\leq 0}T & & 
 \end{array}$$

Le complexe  $\tau_{\geq 0}\tau_{\leq 0}T$  est concentré en degré zéro ; on peut donc l'écrire  $E(Z)$ , avec  $Z$  objet de  $\mathcal{A}$ . Entre des complexes concentrés en degré zéro, il n'y a pas lieu de distinguer entre homomorphismes dans  $\text{Comp}(\mathcal{A})$  (homomorphismes de complexes) et homomorphismes dans  $K(\mathcal{A})$  (classes d'homotopie). On peut donc voir  $\tau_{\geq 0}\tau_{\leq 0}u$  comme un homomorphisme  $f : Z \rightarrow Y$  et  $\tau_{\geq 0}\tau_{\leq 0}s$  comme un isomorphisme  $g : Z \rightarrow X$ . Ainsi  $u/s = E(fg^{-1})$  est dans l'image de  $E$ , comme désiré.  $\square$

#### 7.4 Sous-catégories $D^+(\mathcal{A})$ , $D^-(\mathcal{A})$ , $D^b(\mathcal{A})$

On note  $D^+(\mathcal{A})$  (respectivement,  $D^-(\mathcal{A})$ ) l'union des  $D^{\geq n}(\mathcal{A})$  (respectivement,  $D^{\leq n}(\mathcal{A})$ ) pour  $n$  parcourant  $\mathbf{Z}$  ; autrement dit, c'est la sous-catégorie pleine de  $D(\mathcal{A})$  formée des complexes  $X$  tels que  $H^n(X) = 0$  pour  $n$  assez petit (respectivement, assez grand) dans  $\mathbf{Z}$ . On pose  $D^b(\mathcal{A}) = D^+(\mathcal{A}) \cap D^-(\mathcal{A})$ .

Nous dirons qu'un complexe  $X$  est borné inférieurement si les objets  $X^n$  sont tous nuls pour  $n$  suffisamment petit. Les méthodes du paragraphe précédent montrent que tout objet de  $D^+(\mathcal{A})$  est isomorphe à un complexe borné inférieurement. Ce fait conduit à une définition

alternative de  $D^+(\mathcal{A})$  comme la localisation par rapport aux quasi-isomorphismes de la catégorie homotopique  $K^+(\mathcal{A})$  des complexes bornés inférieurement. (Les constructions des paragraphes 4.1–4.4 et 6.1 s’adaptent sans difficulté à ce contexte.) Des considérations semblables valent évidemment pour  $D^-(\mathcal{A})$  et  $D^b(\mathcal{A})$ .

Les catégories  $D^+(\mathcal{A})$ ,  $D^-(\mathcal{A})$  et  $D^b(\mathcal{A})$  sont stables sous l’action du décalage de  $D(\mathcal{A})$  et de son inverse. Du scolie 23, on déduit que si deux sommets d’un triangle distingué de  $D(\mathcal{A})$  appartiennent à  $D^+(\mathcal{A})$  (respectivement,  $D^-(\mathcal{A})$ ,  $D^b(\mathcal{A})$ ), alors il en est de même du troisième sommet. Ces deux conditions font que  $D^+(\mathcal{A})$ ,  $D^-(\mathcal{A})$  et  $D^b(\mathcal{A})$  sont des sous-catégories triangulées de  $D(\mathcal{A})$ . Il n’en va pas de même pour les catégories  $D^{\geq a}(\mathcal{A})$ ,  $D^{\leq b}(\mathcal{A})$  et  $D^{[m,n]}(\mathcal{A})$  du paragraphe précédent.

## 8 Extensions à la Yoneda

Pour toute cette section, on se donne une catégorie abélienne  $\mathcal{A}$ . On peut alors parler des groupes d’extensions  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{\bullet}$  définis par Cartan et Eilenberg. Ces groupes ont été définis d’une autre façon par Yoneda, qui a en outre muni l’ensemble de ces groupes d’un produit gradué naturel. Un point remarquable est que dans les suites exactes longues associées à une extension, les homomorphismes de liaison sont donnés par la multiplication par la classe caractéristique de l’extension.

Notre but est d’interpréter la construction de Yoneda dans la catégorie dérivée de  $\mathcal{A}$  et de construire le produit de Yoneda comme le produit de composition des homomorphismes.

### 8.1 Classe caractéristique d’une suite exacte de longueur finie

Une suite exacte dans  $\mathcal{A}$  de longueur finie  $n$

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{v_n} R_n \xrightarrow{v_{n-1}} R_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow R_2 \xrightarrow{v_1} R_1 \xrightarrow{v_0} M \longrightarrow 0 \quad (*)$$

sera appelée  $n$ -extension de  $M$  par  $N$ . On peut lui associer deux complexes  $R'$  et  $R''$

$$R' : \quad 0 \longrightarrow N \xrightarrow{v_n} R_n \xrightarrow{v_{n-1}} R_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow R_2 \xrightarrow{v_1} R_1 \longrightarrow 0$$

$$R'' : \quad 0 \longrightarrow R_n \xrightarrow{v_{n-1}} R_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow R_2 \xrightarrow{v_1} R_1 \xrightarrow{v_0} M \longrightarrow 0$$

dans lesquels  $M$  a été placé en degré 0 et  $N$  en degré  $-n$ .

Regardons  $M$  et  $N$  comme des complexes concentrés en degré zéro. Alors la flèche  $v_0$  induit un quasi-isomorphisme  $s' : R' \rightarrow M$  et la flèche  $v_n$  induit un quasi-isomorphisme  $s'' : N[n] \rightarrow R''$ . Soient  $f' : R' \rightarrow N[n]$  et  $f'' : M \rightarrow R''$  les homomorphismes évidents.

**Lemme 31.** *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc}
 & R' & \\
 s' \swarrow & & \searrow f' \\
 M & & N[n] \\
 (-1)^n f'' \searrow & & \swarrow s'' \\
 & R'' &
 \end{array}$$

*est commutatif à homotopie près.*

*Preuve.* Soit  $h \in \text{Homgr}^{-1}(R', R'')$  définie par le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{v_n} & R_n & \xrightarrow{v_{n-1}} & R_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & R_3 & \xrightarrow{v_2} & R_2 & \xrightarrow{v_1} & R_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \searrow^{(-1)^n} & & \searrow^{(-1)^{n-1}} & & & & \searrow^{(-1)^2} & & \searrow^{-1} & & & & \\
 0 & \longrightarrow & R_n & \xrightarrow{v_{n-1}} & R_{n-1} & \xrightarrow{v_{n-2}} & R_{n-2} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & R_2 & \xrightarrow{v_1} & R_1 & \xrightarrow{v_0} & M & \longrightarrow & 0.
 \end{array}$$

On vérifie sans peine que  $(-1)^n s'' f' - f'' s' = \partial_{R''} h + h \partial_{R'}$ .  $\square$

La fraction à droite  $(-1)^{n(n+1)/2}(f'/s')$  définit donc le même élément de  $\text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(M, N[n])$  que la fraction à gauche  $(-1)^{n(n-1)/2}(s''/f'')$ . Cet élément s'appelle la classe caractéristique de la suite (\*).

**Proposition 32.** *Dans un diagramme commutatif à lignes exactes*

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & R_n & \longrightarrow & R_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & R_2 & \longrightarrow & R_1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow q & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow p & & \\
 0 & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & S_n & \longrightarrow & S_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & S_2 & \longrightarrow & S_1 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & 0,
 \end{array}$$

*les classes caractéristiques  $\varphi$  et  $\chi$  des premières et deuxièmes lignes, respectivement, sont reliées par l'égalité  $\chi \circ p = q[n] \circ \varphi$ .*

*Preuve.* La situation donne lieu à un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xleftarrow{s'} & R' & \xrightarrow{f'} & N[n] \\
 p \downarrow & & \downarrow r' & & \downarrow q[n] \\
 P & \xleftarrow{t'} & S' & \xrightarrow{g'} & Q[n].
 \end{array}$$

On calcule alors

$$\chi \circ p = (g'/t') \circ p = g' \circ (t' \setminus p) = g' \circ (r'/s') = (g' \circ r')/s' = (q[n] \circ f')/s' = q[n] \circ (f'/s') = q[n] \circ \varphi.$$

$\square$

**Proposition 33.** Soient  $M$  et  $N$  deux objets de  $\mathcal{A}$ .

(i) Tout élément de  $\text{Hom}_{\mathbb{D}(\mathcal{A})}(M, N[n])$  est la classe caractéristique d'une  $n$ -extension (\*) de  $M$  par  $N$ .

(ii) Deux  $n$ -extensions

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow R_n \longrightarrow R_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow R_2 \longrightarrow R_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow S_n \longrightarrow S_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow S_2 \longrightarrow S_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

ont même classe caractéristique si et seulement s'il existe un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & R_n & \longrightarrow & R_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & R_2 & \longrightarrow & R_1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & T_n & \longrightarrow & T_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & T_2 & \longrightarrow & T_1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & S_n & \longrightarrow & S_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & S_2 & \longrightarrow & S_1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(iii) Même énoncé que (ii), mais en changeant le sens de toutes les flèches verticales.

*Preuve.* Chaque élément de  $\text{Hom}_{\mathbb{D}(\mathcal{A})}(M, N[n])$  est représenté par une fraction à droite  $f/s$ , où  $f : X \rightarrow N[n]$  est un homomorphisme de complexes et  $s : X \rightarrow M$  est un quasi-isomorphisme. Quitte à remplacer  $X$ ,  $f$  et  $s$  par leurs images par le foncteur  $\tau_{\geq -n} \tau_{\leq 0}$ , on peut supposer que  $X$  est concentré en degrés compris dans l'intervalle  $[-n, 0]$ . Nous parvenons ainsi à un diagramme

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 0 & \longrightarrow & X^{-n} & \xrightarrow{\partial_X^{-n}} & X^{1-n} & \xrightarrow{\partial_X^{1-n}} & X^{2-n} & \xrightarrow{\partial_X^{2-n}} & \cdots & \xrightarrow{\partial_X^{-2}} & X^{-1} & \xrightarrow{\partial_X^{-1}} & X^0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f^{-n} & & \downarrow & & \parallel & & & & \parallel & & \parallel & & \searrow s^0 \\ 0 & \dashrightarrow & N & \dashrightarrow & D & \dashrightarrow & X^{2-n} & \dashrightarrow & \cdots & \dashrightarrow & X^{-1} & \dashrightarrow & X^0 & \dashrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dans lequel  $M$  s'identifie au conoyau de  $\partial_X^{-1}$ . En introduisant le push-forward  $D$  des homomorphismes  $\partial_X^{-n}$  et  $f^{-n}$  et en utilisant la proposition 6, on complète ce diagramme en obtenant sur la deuxième ligne une suite exacte de la forme (\*). Par construction, la classe caractéristique de cette  $n$ -extension est  $(-1)^{n(n+1)/2}(f/s)$ . L'assertion (i) se trouve ainsi prouvée.

Un diagramme comme dans l'énoncé (ii) donne lieu à un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & R' & & \\ & \swarrow & \uparrow & \searrow & \\ M & \longleftarrow & T' & \longrightarrow & N[n], \\ & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\ & & S' & & \end{array}$$

qui montre l'égalité des fractions à droite définissant les classes caractéristiques de nos deux  $n$ -extensions. Réciproquement, si nos deux suites exactes ont même classe caractéristique, alors il existe un diagramme commutatif de la forme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & R' & & \\
 & \swarrow & \uparrow & \searrow & \\
 M & \xleftarrow{s} & X & \xrightarrow{f} & N[n], \\
 & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\
 & & S' & & 
 \end{array}$$

où  $X$  est un certain complexe d'objets de  $\mathcal{A}$ . Procédant avec  $X$ ,  $f$  et  $s$  comme dans la preuve de l'assertion (i), on parvient au diagramme désiré.

Enfin l'énoncé (iii) se prouve comme le (ii), mais en considérant des fractions à gauche plutôt qu'à droite.  $\square$

## 8.2 Produit de Yoneda

La proposition 30 montre que la sous-catégorie pleine de  $D(\mathcal{A})$  formée des complexes concentrés en degré zéro est isomorphe à  $\mathcal{A}$ . Donnons-nous à présent pour but d'étudier la sous-catégorie pleine de  $D(\mathcal{A})$  dont les objets sont les complexes concentrés en un seul degré<sup>2</sup>. Il s'agit en fait de décrire chaque groupe  $\text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(M, N[n])$ , où  $M$  et  $N$  sont des objets de  $\mathcal{A}$ , regardés comme des complexes concentrés en degré zéro, et où  $n \in \mathbf{Z}$ .

Dans le paragraphe 3.1, nous avons désigné ce groupe par la notation  $\text{Ext}_{D(\mathcal{A})}^n(M, N)$ . Au vu de la compatibilité avec la définition classique de Cartan et Eilenberg (voir le paragraphe 10.5), il est en fait légitime de le noter simplement  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(M, N)$ .

Le corollaire 29 montre que  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(M, N) = 0$  si  $n < 0$ . La proposition 30 montre que  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^0(M, N) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)$ . Enfin dans le cas  $n > 0$ , la proposition 33 décrit  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(M, N)$  comme un ensemble de classes d'équivalence de  $n$ -extensions de  $M$  par  $N$ .

Nous voulons maintenant comprendre la structure de groupe additif et la loi de composition des homomorphismes dans cette présentation. Commençons par cette dernière. C'est une famille d'applications

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(M, N) \times \text{Ext}_{\mathcal{A}}^m(L, M) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{m+n}(L, N).$$

Pour  $m = n = 0$ , ce n'est rien d'autre que la composition des homomorphismes dans  $\mathcal{A}$ . Le cas où un des entiers  $m$  et  $n$  est nul est décrit dans la proposition ci-dessous.

**Proposition 34.** *Soit  $\varphi$  la classe caractéristique de la  $n$ -extension  $(*)$ . Soient  $f : L \rightarrow M$  et  $g : N \rightarrow P$  deux homomorphismes dans  $\mathcal{A}$ . Introduisant le pull-back  $A$  de  $v_0$  et  $f$  et le*

<sup>2</sup> Si l'on insiste pour avoir une catégorie additive, il convient de prendre les sommes directes finies des complexes concentrés en un seul degré.

push-forward  $D$  de  $v_n$  et  $g$ , on forme le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & R_n & \longrightarrow & R_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & R_2 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0 \\
& & \parallel & & \parallel & & \parallel & & & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & f \\
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{v_n} & R_n & \xrightarrow{v_{n-1}} & R_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & R_2 & \xrightarrow{v_1} & R_1 & \xrightarrow{v_0} & M & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\
0 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & D & \longrightarrow & R_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & R_2 & \longrightarrow & R_1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Alors la classe caractéristique de la première ligne est  $\varphi \circ f$  et celle de la troisième est  $g[n] \circ \varphi$ .

*Preuve.* Cela découle des propositions 6 et 32.  $\square$

Dans le cas où les deux nombres  $m$  et  $n$  sont strictement positifs, Yoneda a montré que le produit de composition se décrit par une opération de produit épié.

**Proposition 35.** Soient  $\varphi \in \text{Hom}_{\text{D}(\mathcal{A})}(L, M[m])$  et  $\chi \in \text{Hom}_{\text{D}(\mathcal{A})}(M, N[n])$  les classes caractéristiques des deux suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u_m} & R_m & \xrightarrow{u_{m-1}} & R_{m-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & R_2 & \xrightarrow{u_1} & R_1 & \xrightarrow{u_0} & L & \longrightarrow & 0 \\
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{v_n} & S_n & \xrightarrow{v_{n-1}} & S_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & S_2 & \xrightarrow{v_1} & S_1 & \xrightarrow{v_0} & M & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Alors  $\chi[m] \circ \varphi \in \text{Hom}_{\text{D}(\mathcal{A})}(L, N[m+n])$  est la classe caractéristique du produit épié

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{v_n} & S_n & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & S_2 & \xrightarrow{v_1} & S_1 & \xrightarrow{u_m v_0} & R_m & \xrightarrow{u_{m-1}} & R_{m-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & R_1 & \xrightarrow{u_0} & L & \longrightarrow & 0. \\
& & & & & & & & & & & \searrow & \nearrow & & & & & & & & & & & \\
& & & & & & & & & & & M & & & & & & & & & & & & & \\
& & & & & & & & & & & \nearrow & \searrow & & & & & & & & & & & \\
& & & & & & & & & & & 0 & & & & & & & & & & & & & \\
& & & & & & & & & & & \nearrow & \searrow & & & & & & & & & & & \\
& & & & & & & & & & & 0 & & & & & & & & & & & & & \\
\end{array}$$

*Preuve.* Appelons  $R'$  et  $S'$  les complexes déduits des deux premières suites exactes longues par la construction au début de ce paragraphe. Nous disposons alors des quasi-isomorphismes  $s' : R' \rightarrow L$  et  $t' : S' \rightarrow M$  et des homomorphismes de complexes  $f' : R' \rightarrow M[m]$  et  $g' : S' \rightarrow N[n]$ . Appelons  $T'$  le complexe

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{v_n} S_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow S_2 \xrightarrow{v_1} S_1 \xrightarrow{u_m v_0} R_m \xrightarrow{u_{m-1}} R_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow R_2 \xrightarrow{u_1} R_1 \longrightarrow 0$$

dans lequel  $N$  a été placé en degré  $-(m+n)$ . Définissons un quasi-isomorphisme  $u' : T' \rightarrow R'$  par

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccc}
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{v_n} & S_n & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & S_2 & \xrightarrow{v_1} & S_1 & \xrightarrow{u_m v_0} & R_m & \xrightarrow{u_{m-1}} & R_{m-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & R_2 & \xrightarrow{u_1} & R_1 & \longrightarrow & 0 \\
\parallel & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \parallel & & & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u_m} & R_m & \xrightarrow{u_{m-1}} & R_{m-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & R_2 & \xrightarrow{u_1} & R_1 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

et un homomorphisme de complexes  $h' : T' \rightarrow S'[m]$  par

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{v_n} & S_n & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & S_2 & \xrightarrow{v_1} & S_1 & \xrightarrow{u_m v_0} & R_m & \xrightarrow{u_{m-1}} & R_{m-1} & \longrightarrow & \cdots \\
\parallel & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{(-1)^{mn}} & S_n & \xrightarrow{(-1)^{m(n-1)}} & \cdots & \longrightarrow & S_2 & \xrightarrow{(-1)^m} & S_1 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\
& & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & (-1)^m v_n & & (-1)^m v_{n-1} & & & & (-1)^m v_1 & & & & & & & & 
\end{array}$$

La classe caractéristique du produit épissé est  $(-1)^{(m+n)(m+n+1)/2+mn}((g'[m] \circ h')/(s' \circ u'))$ . Il ne reste plus qu'à observer que la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
& & T' & & \\
& & \swarrow & \searrow & \\
& & u' & & h' \\
& & \swarrow & & \searrow \\
R' & & & & S'[m] \\
\swarrow & & \searrow & & \swarrow & \searrow \\
s' & & f' & & t'[m] & & g'[m] \\
\swarrow & & \searrow & & \swarrow & \searrow \\
L & & M[m] & & N[m+n]
\end{array}$$

entraîne l'égalité

$$(g'[m] \circ h')/(s' \circ u') = (g'/t')[m] \circ (f'/s') = (-1)^{m(m+1)/2+n(n+1)/2} \chi[m] \circ \varphi.$$

□

Le produit de composition est associatif : c'est bien évidemment une conséquence directe de l'associativité de la composition des homomorphismes dans  $D(\mathcal{A})$ . On peut aussi vérifier cette associativité directement sur les constructions des propositions 34 et 35. Les détails sont laissés au lecteur.

Il nous reste à décrire dans le langage des  $n$ -extensions la structure de groupe additif sur chaque ensemble  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(M, N)$ . Considérons deux éléments  $\varphi$  et  $\chi$  de cet ensemble. Dans le groupe  $\text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(M, N[n])$ , l'homomorphisme  $\varphi + \chi$  est la composition

$$(1 \ 1)[n] \circ \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \chi \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de  $\varphi \oplus \chi \in \text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(M \oplus M, (N \oplus N)[n])$  par les homomorphismes  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : M \rightarrow M \oplus M$  et  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} : N \oplus N \rightarrow N$ . Les produits de composition sont décrits dans la proposition 34 ; quant à  $\varphi \oplus \chi$ , c'est la classe caractéristique de la suite exacte obtenue en prenant la somme directe terme à terme de deux  $n$ -extensions de  $M$  par  $N$  représentant respectivement  $\varphi$  et  $\chi$ .

### 8.3 Classe caractéristique et homomorphisme caractéristique

La  $n$ -extension (\*) du début du paragraphe 8.1 peut aussi être regardée comme une suite exacte reliant des complexes concentrés en degré zéro. Par la construction du paragraphe 6.3, il lui est alors associé un homomorphisme caractéristique dans  $\text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(M, N[n])$ .

**Proposition 36.** *Pour une suite exacte telle que (\*), les notions de classe et d'homomorphisme caractéristique coïncident.*

*Preuve.* Les deux notions se comportant multiplicativement sous l'opération de produit épissé, il suffit de traiter le cas d'une suite exacte courte. Considérons donc une extension  $0 \rightarrow N \xrightarrow{u} R \xrightarrow{v} M \rightarrow 0$  et adoptons les notations  $R'$ ,  $f'$  et  $s'$  du début du paragraphe 8.1. Observant que le complexe  $R'$  coïncide avec le cône de  $u$ , au signe de la différentielle près, nous pouvons écrire un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Con}(u) & \\
 \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} & \begin{array}{c} (0 \ v) \\ \parallel \\ s' \end{array} & \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \\
 M & \begin{array}{c} \downarrow \\ \left( \begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \\ \downarrow \end{array} & N[1], \\
 & R' & \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \\
 & & -f'
 \end{array}$$

dans lequel la flèche verticale est un isomorphisme de complexes et les deux flèches de gauche sont des quasi-isomorphismes. On a alors l'égalité  $-f'/s' = (1 \ 0)/(0 \ v)$  entre fractions à droite. Le membre de gauche est la classe caractéristique de notre extension ; le membre de droite est son homomorphisme caractéristique.  $\square$

Pour conclure cette section, examinons la suite exacte longue des groupes  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(?, ?)$  dans le langage du paragraphe 8.2. Soit  $0 \rightarrow L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \rightarrow 0$  une suite exacte courte dans  $\mathcal{A}$  et soit  $w \in \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(N, L)$  sa classe caractéristique. Nous pouvons regarder  $L$ ,  $M$  et  $N$  comme des complexes concentrés en degré zéro et avons alors un triangle distingué  $L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \xrightarrow{w} L[1]$  dans  $D(\mathcal{A})$ . Le paragraphe 3.2 fournit alors des suites exactes longues

$$\begin{aligned}
 \dots &\rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n-1}(T, Z) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(T, X) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(T, Y) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(T, Z) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+1}(T, X) \rightarrow \dots \\
 \dots &\rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n-1}(X, T) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(Z, T) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(Y, T) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, T) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+1}(Z, T) \rightarrow \dots
 \end{aligned}$$

pour chaque objet  $T$  de  $\mathcal{A}$ . Les flèches de la première suite sont, de gauche à droite, la multiplication à gauche par  $w$  (pour le produit de Yoneda), le push-forward par  $u$ , le push-forward par  $v$  et la multiplication à gauche par  $w$ . Toujours de gauche à droite, les flèches de la seconde suite sont la multiplication à droite par  $(-1)^n w$ , le pull-back par  $v$ , le pull-back par  $u$  et la multiplication à droite par  $(-1)^{n+1} w$ .

*Remarque 37.* Considérons deux suites exactes courtes  $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$  et  $0 \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{A}$ . La description explicite donnée ci-dessus des homomorphismes de liaison montre que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(L, R) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+1}(N, R) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+1}(L, P) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+2}(N, P)
 \end{array}$$

est anticommutatif. Ce résultat est un cas particulier des propositions 10 et 26.



*Exemple 38.* Considérons une 2-extension

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{v_2} R_2 \xrightarrow{v_1} R_1 \xrightarrow{v_0} M \longrightarrow 0$$

dans  $\mathcal{A}$ . Elle se décompose en deux suites exactes courtes

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{v_2} R_2 \rightarrow \text{im } v_1 \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \rightarrow \text{im } v_1 \rightarrow R_1 \xrightarrow{v_0} M \rightarrow 0,$$

dont nous notons  $w \in \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(\text{im } v_1, N)$  et  $w' \in \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(M, \text{im } v_1)$  les classes caractéristiques. La classe caractéristique de notre 2-extension est l'image  $ww'$  de  $w'$  par l'homomorphisme de liaison dans la suite exacte

$$\cdots \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(M, R_2) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(M, \text{im } v_1) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^2(M, N) \rightarrow \cdots$$

Cette classe  $ww'$  est nulle si et seulement si  $w'$  est l'image d'un élément de  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(M, R_2)$ , autrement dit, si et seulement si l'on peut trouver un diagramme commutatif à lignes et à colonnes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & N & \xlongequal{\quad} & N & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & v_2 & & & & \\ 0 & \longrightarrow & R_2 & \xrightarrow{i} & X & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow p & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \text{im } v_1 & \longrightarrow & R_1 & \xrightarrow{v_0} & M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

dans lequel  $R_1$  est le push-forward des deux homomorphismes issus de  $R_2$ . Ainsi, la classe caractéristique de notre 2-extension est nulle si et seulement si  $v_1$  peut être factorisé comme

$$R_2 \xhookrightarrow{i} X \twoheadrightarrow{p} R_1$$

avec  $N = \ker p$  et  $M = \text{coker } i$ . La situation est alors représentée par une filtration de longueur trois sur  $X$ , dont les sous-quotients sont  $N$ ,  $\text{im } v_1$  et  $M$ .

$$R_2 \left\{ \begin{array}{|c|} \hline M \\ \hline \text{im } v_1 \\ \hline N \\ \hline \end{array} \right\} R_1$$

## 9 Résolutions injectives et catégorie dérivée $D^+(\mathcal{A})$

### 9.1 Lemmes préparatoires

Pour toute cette section, on se donne une catégorie abélienne  $\mathcal{A}$ . Rappelons qu'un objet  $I$  de  $\mathcal{A}$  est dit injectif si le foncteur  $\text{Hom}(?, I)$  est exact. Un complexe  $X$  est dit borné inférieurement si les objets  $X^n$  sont nuls pour  $n$  suffisamment petit ; un complexe  $X$  est dit à termes injectifs si tous les objets  $X^n$  sont injectifs.

**Proposition 39.** Soient  $X$  et  $Y$  deux complexes d'objets de  $\mathcal{A}$ , et soient  $I$  et  $J$  deux complexes bornés inférieurement à termes injectifs.

- (i) Si  $X$  est acyclique, alors tout homomorphisme de  $X$  dans  $I$  est homotope à zéro.
- (ii) Tout quasi-isomorphisme entre  $X$  et  $Y$  induit un isomorphisme entre les groupes  $[X, I]$  et  $[Y, I]$  d'homomorphismes à homotopie près.
- (iii) Un homomorphisme de complexes de  $I$  dans  $J$  est un quasi-isomorphisme si et seulement s'il est une équivalence d'homotopie.

*Preuve.* Montrons (i). Soit  $f : X \rightarrow I$  un homomorphisme de complexes. Nous voulons construire  $s \in \text{Homgr}^{-1}(X, I)$  de sorte que  $f = \partial_I s + s \partial_X$ . Procédant par récurrence, nous supposons avoir construit des composantes  $s^p : X^p \rightarrow I^{p-1}$  pour tout  $p \leq n$  de sorte que  $f^{p-1} = \partial_I^{p-2} s^{p-1} + s^p \partial_X^{p-1}$  pour tout  $p \leq n$  et cherchons  $s^{n+1}$ .

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & X^{n-3} & \xrightarrow{\partial_X^{n-3}} & X^{n-2} & \xrightarrow{\partial_X^{n-2}} & X^{n-1} & \xrightarrow{\partial_X^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{\partial_X^n} & X^{n+1} \\
 & & \downarrow f^{n-3} & & \downarrow f^{n-2} & & \downarrow f^{n-1} & & \downarrow f^n & & \nearrow \text{coker } \partial_X^{n-1} \\
 & & \swarrow s^{n-2} & & \swarrow s^{n-1} & & \swarrow s^n & & \downarrow \sigma & & \\
 \dots & \longrightarrow & I^{n-3} & \xrightarrow{\partial_I^{n-3}} & I^{n-2} & \xrightarrow{\partial_I^{n-2}} & I^{n-1} & \xrightarrow{\partial_I^{n-1}} & I^n & & 
 \end{array}$$

Le calcul

$$(f^n - \partial_I^{n-1} s^n) \partial_X^{n-1} = \partial_I^{n-1} (f^{n-1} - s^n \partial_X^{n-1}) = \partial_I^{n-1} \partial_I^{n-2} s^{n-1} = 0$$

montre que l'homomorphisme  $f^n - \partial_I^{n-1} s^n$  se factorise à travers le conoyau de  $\partial_X^{n-1}$ , d'où la flèche  $\sigma$  sur le diagramme. Comme  $X$  est acyclique, la flèche  $\text{coker } \partial_X^{n-1} \rightarrow X^{n+1}$  est un monomorphisme. N'importe quel homomorphisme de  $X^{n+1}$  dans  $I^n$  prolongeant  $\sigma$  conviendra.

De l'assertion (i) ainsi prouvée, on déduit aisément (ii). En effet, soit  $u : X \rightarrow Y$  un homomorphisme de complexes. Le triangle distingué  $X \xrightarrow{u} Y \rightarrow \text{Con}(u) \rightarrow X[1]$  donne naissance à une suite exacte longue

$$\dots \rightarrow [\text{Con}(u), I] \rightarrow [Y, I] \rightarrow [X, I] \rightarrow [\text{Con}(u), I[1]] \rightarrow \dots$$

d'après le théorème 7 appliqué à la catégorie  $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ . Si  $u$  est un quasi-isomorphisme, alors  $\text{Con}(u)$  est acyclique (paragraphe 6.1), ce qui entraîne que les deux groupes  $[\text{Con}(u), I]$  et  $[\text{Con}(u), I[1]]$  sont nuls.

Montrons enfin (iii). Soit  $u : I \rightarrow J$  un quasi-isomorphisme. D'après (ii) appliqué à  $u$  et à  $I$ , il existe  $v \in [J, I]$  tel que  $v \circ u = 1$  dans le groupe  $[I, I]$ . L'égalité  $(u \circ v) \circ u = u$  a alors lieu dans le groupe  $[I, J]$ . D'après (ii) appliqué à  $u$  et maintenant à  $J$ ,  $u \circ v = 1$  dans le groupe  $[J, J]$ . Ainsi  $u$  admet un inverse à homotopie près et est donc une équivalence d'homotopie. Cela montre le sens direct ; la réciproque est banale.  $\square$

La catégorie  $\mathcal{A}$  est dite avoir assez d'injectifs si tout objet de  $\mathcal{A}$  peut être envoyé par un monomorphisme dans un objet injectif.

**Proposition 40.** *Supposons que  $\mathcal{A}$  ait assez d'injectifs. Pour tout complexe  $X$  borné inférieurement, il existe un complexe  $I$  borné inférieurement à termes injectifs et un quasi-isomorphisme  $f : X \rightarrow I$ .*

*Preuve.* Procédons par récurrence. Supposons avoir construit  $I$  et  $f$  jusqu'en degré  $n$ , de sorte que  $f^p$  induise un isomorphisme  $H^p(X) \rightarrow H^p(I)$  pour  $p < n$  et que  $f^n$  induise un monomorphisme  $H^n(X) \rightarrow \text{coker } \partial_I^{n-1}$ .

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & X^{n-1} & \xrightarrow{\partial_X^{n-1}} & X^n & \longrightarrow & \text{coker } \partial_X^{n-1} \xrightarrow{\overline{\partial_X^n}} \ker \partial_X^{n+1} \hookrightarrow X^{n+1} \\
& & \downarrow f^{n-1} & & \downarrow f^n & & \downarrow \overline{f^n} \\
& & & & & & \downarrow h \\
\cdots & \longrightarrow & I^{n-1} & \xrightarrow{\partial_I^{n-1}} & I^n & \longrightarrow & \text{coker } \partial_I^{n-1} \xrightarrow{g} D \xrightarrow{k} I^{n+1} \\
& & & & & & \downarrow f^{n+1}
\end{array}$$

Insérons le push-forward  $D$  de  $\overline{f^n}$  et  $\overline{\partial_X^n}$ , comme indiqué sur le diagramme. La proposition 6 affirme alors que l'homomorphisme  $\ker \partial_X^n \rightarrow \ker g$  induit par  $\overline{f^n}$  est un épimorphisme et que l'homomorphisme  $\text{coker } \partial_X^n \rightarrow \text{coker } g$  induit par  $h$  est un isomorphisme.

Choisissons un monomorphisme  $k : D \rightarrow I^{n+1}$  dans un objet injectif et un prolongement  $f^{n+1}$  de  $kh$  à  $X^{n+1}$ , et appelons  $\partial_I^n$  la composée  $I^n \rightarrow \text{coker } \partial_I^{n-1} \xrightarrow{kg} I^{n+1}$ . Alors l'homomorphisme de  $\text{coker } g$  dans  $\text{coker}(kg) = \text{coker } \partial_I^n$  induit par  $k$  est un monomorphisme, et donc l'homomorphisme de  $H^{n+1}(X) = \text{coker } \partial_X^n$  dans  $\text{coker } \partial_I^n$  induit par  $f^{n+1}$  est un monomorphisme.

Il reste à voir que la construction est telle que l'homomorphisme de  $H^n(X)$  dans  $H^n(I)$  induit par  $f^n$  est un isomorphisme. Tenant compte des identifications  $H^n(X) = \ker \partial_X^n$  et  $H^n(I) = \ker(kg) = \ker g$ , nous avons déjà vu que c'est un épimorphisme. C'est aussi un monomorphisme, puisque la composée  $H^n(X) \rightarrow H^n(I) \rightarrow \text{coker } \partial_I^{n-1}$  est un monomorphisme par hypothèse de récurrence.  $\square$

## 9.2 Une équivalence de catégories

**Proposition 41.** *Supposons que  $\mathcal{A}$  ait assez d'injectifs. Soit  $X$  un complexe d'objets de  $\mathcal{A}$  et  $I$  un complexe borné inférieurement à termes injectifs. Alors l'application canonique  $\text{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(X, I) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}(\mathcal{A})}(X, I)$  est un isomorphisme.*

*Preuve.* Montrons l'injectivité. Soit  $u : X \rightarrow I$  un homomorphisme dans  $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ . Si l'image de  $u$  dans la catégorie dérivée est nulle, alors il existe un quasi-isomorphisme  $s$  de  $I$  dans un complexe  $Y$  tel que  $su = 0$ . Soit  $a \in \mathbf{Z}$  tel que  $I$  soit concentré en degrés plus grands que  $a$ . Soient  $c : Y \rightarrow \tau_{\geq a} Y$  l'homomorphisme canonique et  $r$  un quasi-isomorphisme de  $\tau_{\geq a} Y$  dans un complexe  $J$  borné inférieurement à termes injectifs, trouvé grâce à la proposition 40 (diagramme de gauche ci-dessous). La proposition 39 (iii) entraîne que  $rcs : I \rightarrow J$  est inversible dans  $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ . De  $rcsu = 0$ , on déduit alors que  $u = 0$  dans  $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ .

Montrons la surjectivité. Représentons un homomorphisme de  $\mathbf{D}(\mathcal{A})$  de  $X$  vers  $I$  par une fraction à gauche  $s \setminus u$ , où  $Y$  est un complexe d'objets de  $\mathcal{A}$ ,  $u : X \rightarrow Y$  est un homomorphisme de complexes et  $s : I \rightarrow Y$  est un quasi-isomorphisme. Soit  $a \in \mathbf{Z}$  tel que  $I$  soit concentré

en degrés plus grands que  $a$ . Soit  $c : Y \rightarrow \tau_{\geq a}Y$  l'homomorphisme canonique et  $r$  un quasi-isomorphisme de  $\tau_{\geq a}Y$  dans un complexe  $J$  borné inférieurement à termes injectifs (diagramme de droite). Alors  $rcs : I \rightarrow J$  est inversible dans  $K(\mathcal{A})$ , et  $s \setminus u = (rcs) \setminus (rcu)$  est l'image dans la catégorie dérivée de l'homomorphisme  $(rcs)^{-1}rcu$  de la catégorie homotopique.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{u} & I \\
 & \searrow & \Downarrow s \\
 & 0 & Y \\
 & & \Downarrow c \\
 & & \tau_{\geq a}Y \\
 & & \Downarrow r \\
 & & J
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{u} & Y & \xleftarrow{s} & I \\
 & & \Downarrow c & & \\
 & & \tau_{\geq a}Y & & \\
 & & \Downarrow r & & \\
 & & J & & 
 \end{array}$$

□

Soit  $\text{Inj}(\mathcal{A})$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{A}$  formée des objets injectifs. C'est une catégorie additive, donc on peut former la catégorie homotopique  $K^+(\text{Inj}(\mathcal{A}))$  des complexes bornés inférieurement d'objets de  $\text{Inj}(\mathcal{A})$ . Autrement dit,  $K^+(\text{Inj}(\mathcal{A}))$  est la sous-catégorie pleine de  $K(\mathcal{A})$  formée des complexes bornés inférieurement à termes injectifs.

La proposition 39 (iii) affirme que dans la catégorie  $K^+(\text{Inj}(\mathcal{A}))$ , un quasi-isomorphisme est un isomorphisme. Il n'y a donc pas lieu de localiser  $K^+(\text{Inj}(\mathcal{A}))$  par rapport aux quasi-isomorphismes : cette dernière joue très bien le rôle de catégorie dérivée pour  $\text{Inj}(\mathcal{A})$ . Du reste, les suites exactes de complexes d'objets injectifs sont automatiquement scindées par chaînes, ce qui abolit la motivation donnée au début de la section 6.1. La proposition 40 dit que quand  $\mathcal{A}$  a assez d'injectifs, les complexes bornés inférieurement d'objets de  $\mathcal{A}$  peuvent être approchés par des complexes à termes injectifs. Dans ce cas,  $K^+(\text{Inj}(\mathcal{A}))$  est équivalente à  $D^+(\mathcal{A})$ .

**Théorème 42.** *Si  $\mathcal{A}$  a assez d'injectifs, la composée du plongement  $K^+(\text{Inj}(\mathcal{A})) \subseteq K(\mathcal{A})$  suivie du foncteur canonique de  $K(\mathcal{A})$  dans  $D(\mathcal{A})$  est une équivalence de catégories triangulées entre  $K^+(\text{Inj}(\mathcal{A}))$  et  $D^+(\mathcal{A})$ .*

*Preuve.* Appelons  $F$  ce foncteur composé. La proposition 41 implique que  $F$  est fidèle et plein. Par ailleurs, d'après le paragraphe 7.4 et la proposition 40, tout objet de  $D^+(\mathcal{A})$  est quasi-isomorphe à un objet de  $K^+(\text{Inj}(\mathcal{A}))$ . L'image essentielle de  $F$  est donc bien  $D^+(\mathcal{A})$ .

Il reste à montrer qu'un triangle  $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} K \xrightarrow{h} I[1]$  de  $K^+(\text{Inj}(\mathcal{A}))$  est distingué dans  $K^+(\text{Inj}(\mathcal{A}))$  si et seulement s'il l'est dans  $D(\mathcal{A})$ . Le sens direct étant clair, supposons que ce triangle soit distingué dans la catégorie dérivée. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 I & \xrightarrow{f} & J & \xrightarrow{g} & K & \xrightarrow{h} & I[1] \\
 \parallel & & \parallel & & \downarrow k & & \parallel \\
 I & \xrightarrow{f} & J & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}} & \text{Con}(f) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}} & I[1].
 \end{array}$$

Nous pouvons le lire dans  $K^+(\text{Inj}(\mathcal{A}))$  ou dans  $D(\mathcal{A})$ . Dans les deux cas, la ligne du bas est un triangle distingué. La ligne du haut étant un triangle distingué dans  $D(\mathcal{A})$ , il existe un isomorphisme  $k : K \rightarrow \text{Con}(f)$  de  $D(\mathcal{A})$  rendant le diagramme commutatif dans  $D(\mathcal{A})$ . Comme  $F$  est plein et fidèle, la flèche  $k$  peut être vue dans  $K^+(\text{Inj}(\mathcal{A}))$ , et comme  $F$  est fidèle, notre diagramme est commutatif quand on le lit dans  $K^+(\text{Inj}(\mathcal{A}))$ . Il s'ensuit que la ligne du haut est un triangle distingué dans  $K^+(\text{Inj}(\mathcal{A}))$ .  $\square$

De manière duale, supposons que  $\mathcal{A}$  ait assez de projectifs. Notons  $\text{Proj}(\mathcal{A})$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{A}$  formée des objets projectifs. Alors  $D^-(\mathcal{A})$  est équivalente à la catégorie homotopique  $K^-(\text{Proj}(\mathcal{A}))$  des complexes bornés supérieurement et formés d'objets de  $\text{Proj}(\mathcal{A})$ .

## 10 Foncteurs dérivés

### 10.1 Suites liées de foncteurs

Soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux catégories abéliennes et  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un foncteur additif. Supposons que  $F$  soit demi-exact : cela signifie que pour chaque suite exacte courte  $0 \rightarrow L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \rightarrow 0$ , la suite  $F(L) \xrightarrow{F(u)} F(M) \xrightarrow{F(v)} F(N)$  est exacte. On aimerait savoir prolonger cette dernière en une suite exacte longue éventuellement infinie des deux côtés, de façon à mesurer le défaut d'exactitude à gauche et à droite de  $F$ .

Cartan et Eilenberg ont inventé une méthode pour faire cela. La notion générale est celle de suite liée de foncteurs : par là, on entend une suite de foncteurs additifs  $T^n : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , pour  $n \in \mathbf{Z}$ , munie d'homomorphismes de liaison  $T^n(N) \rightarrow T^{n+1}(L)$  définis pour chaque suite exacte  $0 \rightarrow L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \rightarrow 0$ , satisfaisant aux axiomes suivants :

- Dans la suite suivante, la composée de deux flèches successives est nulle.

$$\dots \rightarrow T^{n-1}(N) \rightarrow T^n(L) \rightarrow T^n(M) \rightarrow T^n(N) \rightarrow T^{n+1}(L) \rightarrow \dots \quad (*)$$

- Les homomorphismes de liaison dépendent naturellement de la suite exacte.

Supposant que  $\mathcal{A}$  a assez d'injectifs et de projectifs, Cartan et Eilenberg associent à chaque foncteur additif  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  trois suites liées de foncteurs : la suite des foncteurs satellites  $S^n F$ , celle des foncteurs dérivés à droite  $R^n F$ , et celle des foncteurs dérivés à gauche  $L^n F$ . On a  $R^n F = 0$  pour  $n < 0$ ,  $L_n F = 0$  pour  $n > 0$ ,  $S^0 F = F$ . Pour toute suite exacte  $0 \rightarrow L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \rightarrow 0$ , la suite (\*) est exacte pour les foncteurs dérivés (à gauche ou à droite) ; elle l'est pour les foncteurs satellites si et seulement si  $F$  est demi-exact. Si  $F$  est exact à gauche (respectivement, à droite), alors la suite des foncteurs satellites coïncide avec la suite des foncteurs dérivés à droite (respectivement, à gauche). Le foncteur  $R^0 F$  est exact à gauche et la suite  $R^n F$  est la suite des foncteurs dérivés à droite de  $R^0 F$ . Le foncteur  $L^0 F$  est exact à droite et la suite  $L^n F$  est la suite des foncteurs dérivés à gauche de  $L^0 F$ .

La notion de suite liée de foncteurs est en fait une vieille connaissance pour nous. De fait, tournons-nous à nouveau vers la sous-catégorie pleine de  $D^b(\mathcal{A})$  formée des complexes concentrés en un seul degré, que nous avons étudiée dans le paragraphe 8.2. Il est facile de voir que la donnée d'un foncteur additif  $T$  de cette catégorie dans  $\mathcal{B}$  est équivalente à la donnée d'une

suite liée de foncteurs  $T^n : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  : au niveau des objets par exemple, il suffit de poser  $T(M[n]) = T^n(M)$ . La question maintenant est de savoir si l'on peut prolonger  $T$  en un foncteur cohomologique défini sur la catégorie  $D^b(\mathcal{A})$ .

Pour résumer le chemin parcouru, nous pouvons reformuler la problématique du début de ce paragraphe de la façon suivante : étant donné un foncteur additif  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , peut-on construire un foncteur cohomologique  $T : D^b(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B}$  qui prolonge  $F$ , la catégorie  $\mathcal{A}$  étant vue comme plongée en degré zéro dans  $D^b(\mathcal{A})$  ?

Nous verrons dans la suite de cette section que l'on peut définir un foncteur  $RF : D^+(\mathcal{A}) \rightarrow D^+(\mathcal{B})$  qui préserve les triangles distingués et tel que  $R^n F(M) = (H^0 \circ RF)(M[n])$ . Le foncteur  $H^0 \circ RF$  est alors cohomologique, et il prolonge  $F$  dès que  $F$  est exact à gauche, car dans ce cas on a  $R^0 F = F$ . De même, on peut définir un foncteur  $LF : D^-(\mathcal{A}) \rightarrow D^-(\mathcal{B})$  tel que  $H^0 \circ LF$  est cohomologique et vérifie  $L^n F(M) = (H^0 \circ LF)(M[n])$ ; le foncteur  $H^0 \circ LF$  prolonge  $F$  dès que  $F$  est exact à droite.

Tout ceci répond donc à notre problématique dans les cas où  $F$  est exact à gauche ou à droite. En revanche, quand  $F$  n'est que demi-exact, il semble impossible de prolonger la donnée des foncteurs satellites  $S^n F$  en un foncteur cohomologique de  $D^b(\mathcal{A})$  dans  $\mathcal{B}$ .

## 10.2 Le théorème d'acyclicité de Leray

Étant donné un foncteur exact à gauche  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  entre deux catégories abéliennes, un objet  $X \in \mathcal{A}$  est dit  $F$ -acyclique si pour toute suite exacte  $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{A}$ , la suite  $0 \rightarrow F(X) \rightarrow F(Y) \rightarrow F(Z) \rightarrow 0$  est exacte dans  $\mathcal{B}$ . Cette définition entraîne que chaque objet injectif de  $\mathcal{A}$  est  $F$ -acyclique pour tout foncteur  $F$  exact à gauche.

**Théorème 43.** *Soit  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un foncteur exact à gauche.*

- (i) *Si  $X$  est un complexe acyclique borné inférieurement à termes  $F$ -acycliques, alors  $F(X)$  est un complexe acyclique.*
- (ii) *Si  $u : X \rightarrow Y$  est un quasi-isomorphisme entre deux complexes bornés inférieurement à termes  $F$ -acycliques, alors  $F(u) : F(X) \rightarrow F(Y)$  est un quasi-isomorphisme.*

*Preuve.* Pour montrer (i), il suffit d'établir l'assertion suivante pour tout  $n \in \mathbf{Z}$  :

$(H_n)$  *Pour tout complexe acyclique  $X$  à termes  $F$ -acycliques et concentré en degrés supérieurs ou égaux à  $n$ , on a  $H^0(F(X)) = 0$ .*

À l'évidence,  $(H_n)$  est vraie si  $n > 0$ . Procédant par récurrence décroissante sur  $n$ , nous supposons  $(H_n)$  vraie et établissons  $(H_{n-1})$ . Soit  $X$  un complexe acyclique à termes  $F$ -acycliques et concentré en degrés supérieurs ou égaux à  $n - 1$ . Le fait que  $H^n(X) = 0$  entraîne l'exactitude

de la suite exacte courte de complexes ci-dessous.

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\tau_{\leq n} X & \cdots \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X^{n-1} & \xrightarrow{\partial_X^{n-1}} & \ker \partial_X^n & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
X & \cdots \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X^{n-1} & \xrightarrow{\partial_X^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{\partial_X^n} & X^{n+1} & \xrightarrow{\partial_X^{n+1}} & X^{n+2} & \longrightarrow & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\tau_{\geq n} X & \cdots \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \operatorname{coker} \partial_X^{n-1} & \xrightarrow{\partial_X^n} & X^{n+1} & \xrightarrow{\partial_X^{n+1}} & X^{n+2} & \longrightarrow & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 
\end{array}$$

Les foncteurs de troncation préservant l'acyclicité, ces trois complexes sont acycliques. Cela montre en particulier que  $\ker \partial_X^n \cong X^{n-1}$  est  $F$ -acyclique, d'où l'on déduit l'exactitude de

$$0 \rightarrow F(\tau_{\leq n} X) \rightarrow F(X) \rightarrow F(\tau_{\geq n} X) \rightarrow 0.$$

En outre, la forme particulière de  $\tau_{\leq n} X$  (un isomorphisme entre deux objets) garantit l'acyclicité de  $F(\tau_{\leq n} X)$ . La suite exacte longue en cohomologie entraîne alors que  $F(X) \rightarrow F(\tau_{\geq n} X)$  est un quasi-isomorphisme. Or de l'hypothèse de récurrence  $(H_n)$  découle  $H^0(F(\tau_{\geq n} X)) = 0$ . On en déduit  $H^0(F(X)) = 0$ , ce qui établit  $(H_{n-1})$  et conclut la preuve de (i).

Soit maintenant  $u : X \rightarrow Y$  un quasi-isomorphisme entre deux complexes bornés inférieurement à termes  $F$ -acycliques. Le cône  $\operatorname{Con}(u)$  est alors acyclique, borné inférieurement et à termes  $F$ -acycliques. D'après (i), le complexe  $F(\operatorname{Con}(u))$  est acyclique. Comme  $F(\operatorname{Con}(u)) = \operatorname{Con}(F(u))$ , cela signifie que  $F(u)$  est un quasi-isomorphisme. L'assertion (ii) est prouvée.  $\square$

Une résolution d'un objet  $M$  de  $\mathcal{A}$  est un couple  $(X, \varepsilon)$  formé d'un complexe  $X$  concentré en degrés positifs et d'un homomorphisme  $\varepsilon : M \rightarrow X^0$  tel que la suite

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{\varepsilon} X^0 \xrightarrow{\partial_X^0} X^1 \xrightarrow{\partial_X^1} X^2 \rightarrow \cdots$$

est exacte. Ainsi  $\varepsilon$  définit-il un quasi-isomorphisme de  $M$ , vu comme complexe concentré en degré zéro, sur  $X$ .

**Corollaire 44.** *Soit  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un foncteur exact à gauche et  $M$  un objet de  $\mathcal{A}$ . Si  $(X, \varepsilon)$  est une résolution de  $M$  par un complexe à termes  $F$ -acycliques, alors les groupes d'homologie du complexe  $F(X)$  sont les valeurs en  $M$  des foncteurs dérivés à droite  $R^n F$  au sens de Cartan et Eilenberg.*

*Preuve.* La proposition 40 fournit un quasi-isomorphisme  $f$  de  $X$  sur un complexe  $I$  à termes injectifs concentré en degrés positifs. On obtient ainsi une résolution  $(I, f \circ \varepsilon)$  de  $M$  par un complexe à termes injectifs. Le théorème 43 (ii) affirme que  $F(f) : F(X) \rightarrow F(I)$  est un quasi-isomorphisme. Il induit donc en homologie un isomorphisme de  $H^n(F(X))$  sur  $H^n(F(I)) = R^n F(M)$ .  $\square$

### 10.3 Théorie de Grothendieck et Verdier

Un foncteur additif  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  entre deux catégories additives se prolonge en un foncteur entre les catégories de complexes  $\text{Comp}(\mathcal{A})$  et  $\text{Comp}(\mathcal{B})$  : on applique  $F$  terme à terme, la relation  $\partial^2 = 0$  étant préservée. L'équivalence d'homotopie étant préservée, nous obtenons en fin de compte un foncteur de  $\text{K}(\mathcal{A})$  dans  $\text{K}(\mathcal{B})$ , qu'on devrait noter  $\text{K}(F)$  mais qu'on note souvent simplement  $F$ . Ce foncteur préserve les suites de complexes exactes scindées par chaînes et les invariants d'homotopie qui leur sont associés, donc envoie les triangles distingués de  $\text{K}(\mathcal{A})$  sur des triangles distingués de  $\text{K}(\mathcal{B})$ .

Supposons maintenant que  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  soient abéliennes. Si  $F$  est exact, c'est-à-dire préserve les noyaux et les conoyaux, alors son extension aux catégories d'homotopie envoie les quasi-isomorphismes sur des quasi-isomorphismes et donc induit un foncteur de  $\text{D}(\mathcal{A})$  dans  $\text{D}(\mathcal{B})$ . Dans le cas général, cette construction ne fonctionne pas. Forcer l'isomorphisme de l'image par  $F$  de deux complexes quasi-isomorphes de  $\text{K}(\mathcal{A})$  n'est pas raisonnable : à trop localiser  $\text{D}(\mathcal{B})$ , on risque de se retrouver avec une catégorie trop grossière, dont la structure triangulée a été détruite. Pour passer à la catégorie dérivée, il faut donc renoncer à ce que l'action sur les complexes soit toujours la bête application de  $F$  terme à terme. Ce ne sera le cas qu'après un procédé de stabilisation adéquat, inspiré des méthodes de Cartan et Eilenberg.

Supposons que  $\mathcal{A}$  ait assez d'injectifs et notons  $\iota_{\mathcal{A}} : \text{K}^+(\text{Inj}(\mathcal{A})) \rightarrow \text{K}^+(\mathcal{A})$  le foncteur d'inclusion et  $\gamma_{\mathcal{A}} : \text{K}^+(\mathcal{A}) \rightarrow \text{D}^+(\mathcal{A})$  le foncteur de localisation. Alors  $\gamma_{\mathcal{A}} \circ \iota_{\mathcal{A}}$  est une équivalence de catégories, d'après le théorème 42. Construisons une équivalence réciproque  $\rho_{\mathcal{A}} : \text{D}^+(\mathcal{A}) \rightarrow \text{K}^+(\text{Inj}(\mathcal{A}))$  en choisissant, pour chaque complexe  $X$  borné inférieurement, un complexe  $I_X$  borné inférieurement à termes injectifs et un quasi-isomorphisme  $s_X : X \rightarrow I_X$  (voir le paragraphe 2.3). La règle  $X \mapsto s_X$  est alors une transformation naturelle  $\mathbf{1}_{\text{K}^+(\mathcal{A})} \rightarrow \iota_{\mathcal{A}} \circ \rho_{\mathcal{A}} \circ \gamma_{\mathcal{A}}$ .

On définit alors  $RF$  comme étant la flèche en diagonale sur le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \text{D}^+(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\rho_{\mathcal{A}}} & \text{K}^+(\text{Inj}(\mathcal{A})) & \xrightarrow{\iota_{\mathcal{A}}} & \text{K}^+(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\gamma_{\mathcal{A}}} & \text{D}^+(\mathcal{A}) \\ & & & & \downarrow F & & \\ \text{D}^+(\mathcal{B}) & \xrightarrow{\rho_{\mathcal{B}}} & \text{K}^+(\text{Inj}(\mathcal{B})) & \xrightarrow{\iota_{\mathcal{B}}} & \text{K}^+(\mathcal{B}) & \xrightarrow{\gamma_{\mathcal{B}}} & \text{D}^+(\mathcal{B}) \end{array}$$

Cette définition satisfait aux exigences du paragraphe 10.1. En effet,  $RF$  préserve les triangles distingués, puisque tous les foncteurs présents sur la figure ont cette propriété. Par ailleurs, si on regarde un objet  $M$  de  $\mathcal{A}$  comme un complexe concentré en degré zéro, alors  $\rho_{\mathcal{A}}(M)$  est une résolution injective de  $M$ , et donc  $R^n F(M)$  est le  $n$ -ième groupe d'homologie du complexe  $F \circ \iota_{\mathcal{A}} \circ \rho_{\mathcal{A}}(M) = RF(M)$ .

C'est le bon moment pour revenir sur le problème évoqué dans l'introduction comme prétexte à cette étude. Soit  $0 \rightarrow L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \rightarrow 0$  une suite exacte courte dans  $\mathcal{A}$ , de classe caractéristique  $w \in \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(N, L)$ . La proposition 36 nous donne alors un triangle distingué  $L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \xrightarrow{w} L[1]$  dans  $\text{D}^+(\mathcal{A})$ , où  $L, M, N$  sont vus comme des complexes concentrés en degré zéro. Le triangle  $RF(L) \xrightarrow{RF(u)} RF(M) \xrightarrow{RF(v)} RF(N) \xrightarrow{RF(w)} RF(L)[1]$  est donc



distingué dans  $D^+(\mathcal{B})$ . La suite exacte longue d'homologie s'écrit alors

$$\dots \rightarrow R^{n-1}F(N) \xrightarrow{\delta^{n-1}} R^n F(L) \xrightarrow{R^n F(w)} R^n F(M) \xrightarrow{R^n F(v)} R^n F(N) \xrightarrow{\delta^n} R^{n+1}F(L) \rightarrow \dots$$

avec des homomorphismes de liaison  $\delta^n = H^n(RF(w))$  s'écrivant en fonction de  $w$ , comme désiré.

Le principal avantage de l'approche de Grothendieck et Verdier est de pouvoir facilement composer les foncteurs dérivés. Soit en effet  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  un second foncteur additif entre catégories abéliennes et supposons que  $\mathcal{B}$  ait assez d'injectifs. Alors la transformation naturelle  $1_{K^+(\mathcal{B})} \rightarrow \iota_{\mathcal{B}} \circ \rho_{\mathcal{B}} \circ \gamma_{\mathcal{B}}$  induit une transformation naturelle de

$$R(G \circ F) = \gamma_{\mathcal{C}} \circ G \circ F \circ \rho_{\mathcal{A}} \circ \gamma_{\mathcal{A}}$$

dans

$$RG \circ RF = \gamma_{\mathcal{C}} \circ G \circ (\iota_{\mathcal{B}} \circ \rho_{\mathcal{B}} \circ \gamma_{\mathcal{B}}) \circ F \circ \iota_{\mathcal{A}} \circ \rho_{\mathcal{A}}.$$

**Théorème 45.** *Soient  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  et  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  deux foncteurs additifs entre catégories abéliennes ayant assez d'injectifs. On suppose que  $G$  est exact à gauche et que  $F$  transforme un objet injectif de  $\mathcal{A}$  en un objet  $G$ -acyclique de  $\mathcal{B}$ . Alors la transformation naturelle  $R(G \circ F) \rightarrow RG \circ RF$  est un isomorphisme.*

*Preuve.* Soit  $X \in D^+(\mathcal{A})$ . Posons  $I = \iota_{\mathcal{A}} \circ \rho_{\mathcal{A}}(X)$  et  $J = \iota_{\mathcal{B}} \circ \rho_{\mathcal{B}}(RF(X))$ . Appliquée à l'objet  $F(I) \in K^+(\mathcal{B})$ , la transformation naturelle  $1_{K^+(\mathcal{B})} \rightarrow \iota_{\mathcal{B}} \circ \rho_{\mathcal{B}} \circ \gamma_{\mathcal{B}}$  donne un quasi-isomorphisme  $s : F(I) \rightarrow J$ . L'homomorphisme naturel  $R(G \circ F)(X) \rightarrow (RG \circ RF)(X)$  s'obtient en prenant l'image de  $s$  par  $\gamma_{\mathcal{C}} \circ G$ , et il nous faut montrer que c'est un isomorphisme.

Les complexes  $I$  et  $J$  étant à termes injectifs,  $F(I)$  et  $J$  sont à termes  $G$ -acycliques. Le théorème 43 dit alors que l'image de  $s$  par  $G$  est un quasi-isomorphisme. L'image de  $s$  par  $\gamma_{\mathcal{C}} \circ G$  est donc un isomorphisme.  $\square$

## 10.4 Définition de Deligne

Continuons avec notre foncteur additif  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  entre deux catégories abéliennes. Déjà dans l'introduction, nous observions qu'un objet  $R^n F(M)$  n'était unique qu'à unique isomorphisme près. Il est alors naturel de rechercher le problème universel dont il est solution. Cette approche conduit à une formulation générale, due à Deligne. Adoptons les notations du paragraphe 2.3, désignons par  $D(\mathcal{B})^{\text{ini}}$  la catégorie des foncteurs de  $D(\mathcal{B})^{\text{op}}$  dans  $Ens$ , et définissons un foncteur  $\mathbf{r}F : D(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{B})^{\text{ini}}$  de la façon suivante.

Prenons un complexe  $X$  d'objets de  $\mathcal{A}$ . À un complexe  $T \in D(\mathcal{B})$ , associons un ensemble de fractions  $s \backslash \backslash f$ . Dans cette écriture, il est sous-entendu que  $s$  est un quasi-isomorphisme de  $X$  vers un complexe  $W$  d'objets de  $\mathcal{A}$  et que  $f$  est un homomorphisme dans  $D(\mathcal{B})$  de  $T$  dans  $F(W)$ .

$$T \xrightarrow{f} F(W) \quad W \xleftarrow{s} X$$

La règle de calcul avec ces fractions est l'égalité  $s \backslash \backslash f = (rs) \backslash \backslash (F(r)f)$  chaque fois que cela a un sens. Cette demande a une traduction graphique semblable à celle utilisée au paragraphe 5.2 :

on déclare que deux fractions  $s \backslash \backslash f$  et  $s' \backslash \backslash f'$  sont égales s'il existe des homomorphismes de complexes  $r$  et  $r'$  tels que  $F(r)f = F(r')f'$ ,  $rs = r's'$  et  $rs$  soit un quasi-isomorphisme.

$$\begin{array}{ccc}
 & F(W) & W \\
 & \uparrow f & \swarrow s \\
 T & \longrightarrow F(W'') & W'' \\
 & \downarrow f' & \longleftarrow X \\
 & F(W') & \uparrow r' \\
 & & \swarrow s' \\
 & & W'
 \end{array}$$

On note  $\mathbf{r}F(X)(T)$  l'ensemble des fractions ainsi défini. Il dépend fonctoriellement de  $T$ , donc  $\mathbf{r}F(X)$  est un objet de  $D(\mathcal{B})^{\text{ini}}$ .

Notre motivation pour la définition de  $\mathbf{r}F(X)$  était la mise en lumière de la propriété universelle cachée derrière le fait que les  $R^n F(X)$  sont uniques à unique isomorphisme près. On peut parvenir à cette définition par d'autres considérations. Les difficultés soulevées au début du paragraphe 10.3 nous avaient conduits à nous inspirer des méthodes de Cartan et Eilenberg pour définir  $RF$  : nous avons posé  $RF(I) = F(I)$  pour tout complexe  $I$  borné inférieurement à termes injectifs, la définition générale de  $RF(X)$  étant ramenée à ce cas par un procédé de stabilisation vis-à-vis de l'action des quasi-isomorphismes. L'approche de Deligne va jusqu'au bout de cette idée de stabilisation : les complexes à termes injectifs ne figurent plus explicitement dans la définition et ne manifestent leur utilité qu'à travers la proposition 40. La proposition suivante et sa preuve illustrent comment cela fonctionne.

**Proposition 46.** *Supposons que  $\mathcal{A}$  ait assez d'injectifs. Soit  $X$  un complexe borné inférieurement formé d'objets  $F$ -acycliques. Alors  $\mathbf{r}F(X) = \text{Hom}_{D(\mathcal{B})}(?, F(X))$  dans  $D(\mathcal{B})^{\text{ini}}$ .*

*Preuve.* Il s'agit de montrer la bijectivité de l'application  $f \mapsto 1 \backslash \backslash f$  de  $\text{Hom}_{D(\mathcal{B})}(T, F(X))$  dans  $\mathbf{r}F(X)(T)$ , pour tout complexe  $T$  d'objets de  $\mathcal{B}$ .

Soit  $a \in \mathbf{Z}$  tel que  $X$  soit concentré en degrés plus grands que  $a$ . Considérons une fraction  $s \backslash \backslash f$ , où  $W$  est un complexe d'objets de  $\mathcal{A}$ ,  $s : X \rightarrow W$  est un quasi-isomorphisme et  $f : T \rightarrow F(W)$  est un homomorphisme de  $D(\mathcal{B})$ . Soit  $c : W \rightarrow \tau_{\geq a}W$  l'homomorphisme canonique et  $r$  un quasi-isomorphisme de  $\tau_{\geq a}W$  dans un complexe  $I$  borné inférieurement à termes injectifs. Comme  $X$  et  $I$  sont bornés inférieurement et à termes  $F$ -acycliques,  $F(rcs)$  est un quasi-isomorphisme, d'après le théorème 43 (ii). La fraction  $s \backslash \backslash f = (rcs) \backslash \backslash (F(rc)f) = 1 \backslash \backslash (F(rcs)^{-1}F(rc)f)$  appartient donc à l'image de notre application.

$$\begin{array}{ccc}
 T & \xrightarrow{f} & F(W) & & W & \xleftarrow{s} & X \\
 & & \downarrow F(c) & & c \downarrow & & \\
 & & F(\tau_{\geq a}W) & & \tau_{\geq a}W & & \\
 & & \downarrow F(r) & & r \downarrow & & \\
 & & F(I) & & I & & 
 \end{array}$$

Cela démontre la surjectivité. La preuve de l'injectivité est laissée au lecteur.  $\square$

Soit  $X$  un objet de  $D(\mathcal{A})$ . Affirmer que le foncteur  $\mathbf{r}F(X)$  est représentable, c'est par définition dire que le problème universel qu'il définit admet une solution. Quand elle existe, cette solution est appelée valeur en  $X$  du foncteur dérivé à droite et est notée  $RF(X)$ .

Nous n'avons pas encore vu que  $\mathbf{r}F$  était un foncteur, car jusqu'à présent, nous avons concentré notre attention sur les objets. Soit  $u : X \rightarrow Y$  un homomorphisme dans  $D(\mathcal{A})$ . Pour chaque objet  $T \in D(\mathcal{B})$ , on définit une application  $\mathbf{r}F(u)(T) : \mathbf{r}F(X)(T) \rightarrow \mathbf{r}F(Y)(T)$  de la façon suivante. Soit  $s \backslash \backslash f \in \mathbf{r}F(X)(T)$  une fraction, comme sur la première ligne du diagramme ci-dessous. L'axiome **Or2** dans la catégorie  $\mathbf{K}(\mathcal{A})$  permet alors de compléter le carré à droite. On peut ainsi définir l'image de  $s \backslash \backslash f$  par  $\mathbf{r}F(u)(T)$  comme étant la fraction  $t \backslash \backslash (F(v)f)$ . On vérifie que cela a un sens, c'est-à-dire que le résultat ne dépend pas des choix effectués dans la construction, que  $\mathbf{r}F(u)$  est une transformation naturelle de  $\mathbf{r}F(X)$  dans  $\mathbf{r}F(Y)$ , et que les contraintes d'associativité requises pour que  $\mathbf{r}F$  soit un foncteur sont satisfaites.

$$\begin{array}{ccc}
 T \xrightarrow{f} F(W) & & W \xleftarrow{s} X \\
 & \downarrow F(v) & \downarrow v \\
 & F(W') & W' \xleftarrow[t]{=} Y \\
 & & \downarrow u
 \end{array}$$

De manière duale, on peut définir un foncteur dérivé à gauche  $\mathbf{l}F : D(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{B})^{\text{fin}}$  en utilisant des fractions à droite. Les détails sont laissés au lecteur.

Les foncteurs de Deligne  $\mathbf{r}F$  et  $\mathbf{l}F$  sont assurément plus abstraits que les foncteurs dérivés de Grothendieck-Verdier. Nous désirions parvenir à une formulation intrinsèque, ne nécessitant pas de choisir un foncteur de résolution  $\rho_{\mathcal{A}}$ , et avons payé le prix convenu, à savoir le recours au langage des problèmes universels et au lemme de Yoneda. Mais nos efforts sont bien récompensés : les objets  $\mathbf{r}F(X)$  et  $\mathbf{l}F(X)$  sont définis même si  $X$  n'est pas dans la bonne catégorie dérivée bornée ou si  $\mathcal{A}$  n'a pas assez d'injectifs ou de projectifs. Cet avantage n'est pas que théorique : en théorie des faisceaux par exemple, il faut savoir dériver à gauche le produit tensoriel pour passer dans la catégorie dérivée, alors même qu'il n'y a pas assez de projectifs. L'approche classique consiste à montrer l'existence et le caractère intrinsèque de la notion de résolution par des objets acycliques, voir par exemple [1], §1.1 pour un exposé détaillé. La définition de Deligne englobe tout cela dès le départ, la compatibilité avec des constructions particulières étant garantie par des résultats du genre de la proposition 46.

Ce qui rend les foncteurs  $\mathbf{r}F$  et  $\mathbf{l}F$  plus abstraits, c'est qu'on ne peut pas appliquer le foncteur cohomologique  $H^0 : D(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}$  aux objets  $\mathbf{r}F(X)$  ou  $\mathbf{l}F(X)$ . En effet, ce foncteur ne se prolonge pas à  $D(\mathcal{B})^{\text{ini}}$  ou à  $D(\mathcal{B})^{\text{fin}}$ . Le seul accès possible aux objets  $\mathbf{r}F(X)$  (respectivement,  $\mathbf{l}F(X)$ ) est via les foncteurs  $\text{Hom}_{D(\mathcal{B})}(T, ?)$  (respectivement,  $\text{Hom}_{D(\mathcal{B})}(?, T)$ ), où  $T \in D(\mathcal{B})$ . Notons toutefois que ces foncteurs sont cohomologiques d'après le théorème 7.

## 10.5 Le foncteur $R\text{Hom}$

Pour conclure, voyons ce que donnent les définitions précédentes dans le cas d'un foncteur représentable. Prenons donc une catégorie abélienne  $\mathcal{A}$  et un objet  $X \in \mathcal{A}$ , et notons  $Ab$  la catégorie des groupes abéliens. Le foncteur dérivé du foncteur  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, ?) : \mathcal{A} \rightarrow Ab$  se note

bien sûr  $R\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, ?)$ . Adoptons l'approche de Grothendieck-Verdier. Prenons  $Y \in D^+(\mathcal{A})$  et posons  $I = \iota_{\mathcal{A}} \circ \rho_{\mathcal{A}}(Y)$ . Le complexe de groupes abéliens  $R\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, I)$  est caractérisé par ses groupes d'homologie

$$H^n(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, I)) = H^n(\mathrm{Homgr}(X, I)) = [X, I[n]] = \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X, I[n]) = \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X, Y[n]).$$

(La troisième égalité dans le calcul est justifiée par la proposition 41.) En particulier quand  $Y$  est un objet de  $\mathcal{A}$ , vu comme complexe concentré en degré zéro, le  $n$ -ième groupe d'extension de Cartan-Eilenberg  $R^n\mathrm{Hom}(X, Y) = H^n(R\mathrm{Hom}(X, Y))$  coïncide avec le groupe d'homomorphismes  $\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X, Y[n])$ . Cela justifie la définition  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y) = \mathrm{Ext}_{D(\mathcal{A})}^n(X, Y)$  adoptée au début du paragraphe 8.2.

Nous voulons à présent étendre la définition de  $R\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$  au cas où  $X$  est un complexe. On ne peut pas dériver  $X \mapsto R\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$  car ce foncteur est à valeurs dans  $D^+(Ab)$ , qui n'est pas une catégorie abélienne. Par analogie avec la définition du paragraphe 10.3, nous pouvons toutefois définir un foncteur de  $D^+(\mathcal{A})$  dans  $D^+(Ab)$  par

$$R\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, ?) = \gamma_{Ab} \circ \mathrm{Homgr}(X, ?) \circ \iota_{\mathcal{A}} \circ \rho_{\mathcal{A}} \quad (*)$$

pour tout  $X$  appartenant à  $K^-(\mathcal{A})$ . On retrouve le foncteur obtenu plus haut quand  $X$  est concentré en degré zéro.

À  $Y \in D^+(\mathcal{A})$  fixé, l'objet  $R\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$  de  $D^+(Ab)$  dépend fonctoriellement de  $X$ . Mieux : si  $\mathcal{A}$  a assez de projectifs, alors il est la valeur en  $X$  du foncteur dérivé de  $\mathrm{Homgr}(?, Y)$  (au sens de l'équation (\*) ci-dessus, modulo les changements nécessaires du fait que  $\mathrm{Homgr}(?, Y)$  est contravariant). Pour voir cela, considérons, en sus de notre quasi-isomorphisme  $Y \rightarrow I$ , un quasi-isomorphisme  $P \rightarrow X$ , où  $P$  est un complexe borné supérieurement à termes projectifs. La proposition 39 (ii) dit que le foncteur  $\mathrm{Homgr}(?, I)$  transforme un quasi-isomorphisme de  $K(\mathcal{A})$  en un quasi-isomorphisme de  $K(Ab)$ . Duale, le foncteur  $\mathrm{Homgr}(P, ?)$  a la même propriété. Cela nous donne des isomorphismes en catégorie dérivée

$$R\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) = \mathrm{Homgr}(X, I) \cong \mathrm{Homgr}(P, I) \cong \mathrm{Homgr}(P, Y).$$

Il est naturellement possible d'utiliser l'approche de Deligne pour donner un caractère plus intrinsèque et plus général aux constructions présentées dans ce paragraphe. Cette tâche est laissée au lecteur.

## Références

- [1] A. Arabia, *Introduction à l'homologie d'intersection*, 2002, <http://people.math.jussieu.fr/~arabia/math/intersection.pdf>.
- [2] A. A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, *Faisceaux pervers*, Astérisque **100** (1982), 5–171.
- [3] N. Bourbaki, *Algèbre homologique (Éléments de mathématiques, Algèbre, Chapitre 10)*, Masson, 1980.
- [4] H. Cartan, S. Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton University Press, 1956.
- [5] S. I. Gelfand, Yu. I. Manin, *Methods of homological algebra*, Springer Monographs in Mathematics, Springer Verlag, 2002.

- [6] D. Happel, *Triangulated categories in the representation theory of finite dimensional algebras*, London Mathematical Society Lecture Note Series 119, Cambridge University Press, 1988.
- [7] R. Hartshorne, *Residues and duality*, Lecture Notes in Mathematics 20, Springer-Verlag, 1966.
- [8] B. Iversen, *Cohomology of sheaves*, Universitext, Springer-Verlag, 1986.
- [9] M. Kashiwara, P. Schapira, *Sheaves on manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 292, Springer-Verlag, 1990.
- [10] B. Keller, *Derived categories and tilting*, in : Handbook of tilting theory, 49–104, London Mathematical Society Lecture Note Series 332, Cambridge University Press, 2007.
- [11] P. Schapira, *Categories and homological algebra*, 2009,  
<http://www.math.jussieu.fr/~schapira/lectnotes>.
- [12] J.-L. Verdier, *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*, Astérisque **239** (1996).

Pierre Baumann

S-mail : Institut de Recherche Mathématique Avancée  
 Université de Strasbourg et CNRS, UMR 7501  
 7, rue René Descartes  
 67084 Strasbourg (France)

E-mail : [p.baumann@unistra.fr](mailto:p.baumann@unistra.fr)