Version : 25/10/2024.

Ce texte est destiné aux étudiants connaissant les définitions et les exemples de base de la théorie des modules sur les anneaux. Il contient une présentation détaillée du théorème de Gabriel affirmant qu'une algèbre de dimension finie sur un corps algébriquement clos est Morita-équivalente à l'algèbre des chemins d'un carquois avec relations et de la théorie d'Auslander–Reiten. Pour l'essentiel, il s'agit d'une réorganisation de mes notes de cours de 2020, avec l'ajout de la théorie du basculement et la suppression du théorème de Gabriel caractérisant les carquois sans relation de type de représentation fini. Les prérequis sont limités : essentiellement les définitions de base sur les modules, les notions de bimodule, de somme directe, de produit tensoriel, de suite exacte, de module projectif, l'adjonction entre produit tensoriel et Hom, l'exactitude à gauche du foncteur Hom et à droite du foncteur produit tensoriel. (Le théorème 5.5.3 utilise en outre le foncteur Tor_1.) Ce texte ne contenant pratiquement aucun exemple, il sera bénéfique d'accompagner sa lecture de celle d'un cours sur la théorie des représentations des carquois, telles les excellentes leçons *Lectures on representations of quivers* de W. Crawley-Boevey, disponibles sur la page web de leur auteur.

Bien qu'elles se marient très bien avec plusieurs des thèmes abordés, les catégories dérivées sont absentes de ce cours. Le lecteur intéressé consultera avec profit l'excellente introduction *Derived categories for the working mathematician* de R. P. Thomas (Winter School on Mirror Symmetry, Vector Bundles and Lagrangian Submanifolds (Cambridge, MA, 1999), pp. 349–361, AMS/IP Stud. Adv. Math. vol. 23, International Press, 2001).

Plusieurs ouvrages ont été utilisés pour préparer ces notes. Malgré son âge, le livre *Basic Algebra II* de N. Jacobson (W. H. Freeman and Company, 1989) reste un modèle de clarté pédagogique pour les notions générales d'algèbre. Un texte plus spécialisé et centré sur le sujet de ce cours est *Representation Theory of Artin Algebras* de M. Auslander, I. Reiten et S. O. Smalø (Cambridge Studies in Advanced Mathematics vol. 36, Cambridge University Press, 1997). Enfin, le manuel *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, 1: Techniques of Representation Theory* de I. Assem, D. Simson et A. Skowroński (London Mathematical Society Student texts vol. 65, Cambridge University Press, 2006) se veut un traité complet.

Table des matières

1 Préliminaires **3**

1.1 Modules artiniens et noethériens 3

1.2 Idempotents 6

1.3 Blocs d'un anneau 9

1.4 Modules complètement réductibles 10

1.5 Anneaux semi-simples 15

1.6 Suites exactes et extensions 16

2 Radical de Jacobson d'un anneau **19**

2.1 Définition . . . 19

2.2 Anneaux locaux . . . 22

2.3 Nilpotence et semi-simplicité pour les anneaux artiniens . . . 24

3 Modules de longueur finie **26**

3.1 Théorème de Jordan–Hölder . . . 26

3.2 Groupe de Grothendieck . . . 28

3.3 Théorème de Krull–Schmidt–Azumaya . . . 29

3.4 Filtrations par les socles et les radicaux . . . 32

3.5 Polytopes et filtrations de Harder–Narasimhan . . . 33

4 Couvertures projectives et carquois d'une algèbre basique **36**

4.1 Survol . . . 36

4.2 Couvertures projectives . . . 38

4.3 Relèvement des idempotents . . . 42

4.4 Modules principaux indécomposables et blocs . . . 44

4.5 Carquois d'une algèbre basique de dimension finie . . . 45

5 Catégories additives : radical, équivalence de Morita et basculement **50**

5.1 Philosophie . . . 50

5.2 Radical d'une catégorie pré-additive . . . 51

5.3 Structure de l'anneau des endomorphismes d'un module de longueur finie . . . 52

5.4 Projectivisation . . . 54

5.5 Équivalence de Morita et basculement . . . 59

6 Théorie d'Auslander-Reiten **71**

6.1 Introduction et exemples . . . 71

6.2 Formalisation : morphismes presque scindés minimaux . . . 77

6.3 Catégories stables . . . 80

6.4 Transposition d'Auslander–Bridger et translation d'Auslander–Reiten . . . 81

6.5 Suites d'Auslander–Reiten . . . 85

1 Préliminaires

1.1 Modules artiniens et noethériens

Nombre de raisonnements mathématiques sont basés sur des constructions itératives. Pour garantir la convergence du processus, il est souvent nécessaire d'imposer une condition de finitude [1]. Le cadre des espaces vectoriels de dimension finie est élégant mais restrictif, et nous aurons accès à des résultats plus généraux en adoptant les méthodes inaugurées par Emmy Noether.

Dans tout ce paragraphe, A est un anneau.

Définition.

(1) Un A-module est dit **de type fini** s'il est engendré par un nombre fini d'eléments.
(2) Un A-module est dit **noethérien** si toute suite croissante de sous-modules de M stationne à partir d'un certain rang.
(3) Un A-module est dit **artinien** si toute suite décroissante de sous-modules de M stationne à partir d'un certain rang.

1.1.1 Proposition. *Pour un A-module M, il y a équivalence entre :*

(i) M est noethérien.
(ii) Toute famille non-vide de sous-modules de M admet un élément maximal (pour l'inclusion).
(iii) Tout sous-module de M est de type fini.

Preuve. Si (ii) est faux, alors il existe une famille non-vide $\mathscr{N}$ de sous-modules de M qui n'a pas d'élément maximal. On construit alors par récurrence une suite (M_n) d'éléments de $\mathscr{N}$ telle que $M_{n+1} \supsetneq M_n$ pour chaque n ; chaque pas de la construction est possible puisque M_n n'est pas maximal dans $\mathscr{N}$. Ainsi (i) est faux.

Supposons (ii) vraie. Soit $N \subset M$ un sous-module, soit $\mathscr{N}$ l'ensemble des sous-modules de N qui sont de type fini. Alors $\{0\}$ appartient à $\mathscr{N}$, donc $\mathscr{N} \neq \varnothing$. L'hypothèse (ii) garantit alors l'existence d'un élément maximal L dans $\mathscr{N}$. Pour chaque $x \in N$, le sous-module $L + Ax$ de N est de type fini donc appartient à $\mathscr{N}$; il contient L donc lui est égal par maximalité de ce dernier ; donc $x \in L$. Ainsi $N = L$ et (iii) est vrai.

Supposons (iii). Soit (M_n) une suite croissante de sous-modules de M et notons M_∞ l'union des M_n. Alors M_∞ est un sous-module de M (exercice : écrire les détails prouvant ce fait). Il est donc de type fini, engendré par des éléments x_1, ..., x_p. Alors il existe des entiers n_1, ..., n_p tels que $x_1 \in M_{n_1}$, ..., $x_p \in M_{n_p}$, et l'hypothèse de croissance fait que tous les x_i appartiennent à M_n avec $n = \max(n_1, \ldots, n_p)$. Par suite $M_\infty = M_n$ et donc toutes les inclusions $M_n \subset M_{n+1} \subset \cdots \subset M_\infty$ sont des égalités. (i) est donc vrai. □

1. L'utilisation de récurrences transfinies et de l'axiome du choix permet dans certains cas de contourner cette contrainte. Nous éviterons d'y faire appel.

1.1.2 Proposition. *Pour un A-module M, il y a équivalence entre :*

(i) M est artinien.

(ii) Toute famille non-vide de sous-modules de M admet un élément minimal (pour l'inclusion).

La preuve est laissée en exercice.

1.1.3 Proposition. *Soit $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ une suite exacte courte de A-modules. Alors M est noethérien (respectivement, artinien) si et seulement si L et N sont tous deux noethériens (respectivement, artiniens).*

Preuve. Nous ne prouverons que l'implication (L et N noethériens) $\Rightarrow$ (M noethérien), laissant au lecteur le soin de prouver les autres énoncés.

Supposons donc L et N noethériens. Soit (M_n) une suite croissante de sous-modules de M. Posons $L_n = f^{-1}(M_n)$ et $N_n = g(M_n)$. Alors (L_n) est une suite croissante de sous-modules de L et (N_n) est une suite croissante de sous-modules de N ; par conséquent ces deux suites stationnent à partir d'un certain rang. De plus, le lemme des cinq appliqué au diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L_n \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M_n \arrow[r, "g"] \arrow[d] & N_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L_{n+1} \arrow[r, "f"] & M_{n+1} \arrow[r, "g"] & N_{n+1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

montre que

$$(L_n = L_{n+1} \text{ et } N_n = N_{n+1}) \;\Rightarrow\; (M_n = M_{n+1}).$$

Ainsi (M_n) stationne à partir d'un certain rang. Ceci prouve que M est noethérien. □

Le (i) de la proposition précédente s'énonce généralement en disant que les modules noethériens (respectivement, artiniens) forment une **sous-catégorie de Serre** de la catégorie abélienne des A-modules.

Les définitions suivantes sont critiques pour ce cours.

Définition.

(1) La **somme directe** d'une famille finie M_1, ..., M_n de A-modules est la donnée d'un A-module M est d'homomorphismes $i_j : M_j \to M$ et $p_j : M \to M_j$, pour $j \in [\![1, n]\!]$, tels que $p_j \circ i_k = 0$ si $j \neq k$, $p_j \circ i_j = \mathrm{id}_{M_j}$, et $i_1 \circ p_1 + \cdots + i_n \circ p_n = \mathrm{id}_M$. Ce module M est noté $M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$, ou comme un produit $M_1 \times \cdots \times M_n$, ou parfois même comme un coproduit $M_1 \amalg \cdots \amalg M_n$.

(2) Un A-module est dit **indécomposable** s'il est différent de $\{0\}$ et s'il ne peut pas s'écrire comme la somme directe de deux sous-modules non-nuls.

(3) Un sous-module N d'un module M est dit **facteur direct** s'il admet un supplémentaire, c'est-à-dire s'il existe un sous-module $L \subset M$ tel que $M = N \oplus L$. Il est équivalent de demander que l'inclusion $i : N \to M$ ait un inverse à gauche $p : M \to N$. (Le noyau de p est alors un supplémentaire de N dans M et l'endomorphisme $e = i \circ p$ de M est alors un élément idempotent de l'anneau $\mathrm{End}_A(M)$.)

1.1.4 Corollaire. *Une somme directe finie de modules noethériens (respectivement, artiniens) est un module noethérien (respectivement, artinien).*

On peut munir A d'une structure de A-module à gauche, l'action étant donnée par multiplication à gauche ; le A-module obtenu est appelé le **module régulier** à gauche et noté ${}_AA$, le A en indice à gauche (facultatif) rappelant que A agit à gauche.

Un anneau A est dit noethérien (respectivement, artinien) à gauche si le module régulier à gauche ${}_AA$ est noethérien (respectivement, artinien).

Un A-module est de type fini si et seulement s'il est isomorphe à un quotient d'un module de la forme $({}_AA)^n$. Il découle de la proposition 1.1.3 et de son corollaire qu'un module de type fini sur un anneau noethérien (respectivement, artinien) est noethérien (respectivement, artinien).

1.1.5 Proposition. *Un A-module noethérien ou artinien M peut toujours s'écrire comme une somme directe finie $M_1 \oplus \cdots \oplus M_m$, où m est un entier naturel et M_1, ..., M_m sont des sous-modules indécomposables.*

Preuve. Supposons que M est artinien. Soit $\mathscr{N}$ l'ensemble des sous-modules N de M qui n'admettent pas de décomposition. En particulier, ni $\{0\}$, ni aucun sous-module indécomposable de M n'appartient à $\mathscr{N}$. Si jamais $\mathscr{N}$ était différent de l'ensemble vide, alors il possèderait un élément minimal, disons N. Ne pouvant être ni nul ni indécomposable, N serait la somme directe $N' \oplus N''$ de deux sous-modules non-nuls. Puisque N' et N'' sont strictement inclus dans N, ils n'appartiennent pas à $\mathscr{N}$, par minimalité de N. Ainsi N' et N'' s'écrivent l'un et l'autre comme somme directe finie de modules indécomposables. Il en est alors de même pour $N = N' \oplus N''$, ce qui contredit le choix de N. Cette absurdité montre que $\mathscr{N} = \varnothing$. En particulier, $M \notin \mathscr{N}$, autrement dit M s'écrit comme somme directe finie de modules indécomposables.

Supposons que M est noethérien. Soit $\mathscr{N}$ l'ensemble des sous-modules N de M tels que M/N ne puisse pas s'écrire comme somme directe finie de modules indécomposables. Si jamais $\mathscr{N}$ était différent de l'ensemble vide, alors il possèderait un élément maximal, disons N. Ne pouvant être ni nul ni indécomposable, $\widetilde{M} = M/N$ serait la somme directe $\widetilde{M}' \oplus \widetilde{M}''$ de deux sous-modules non-nuls. Soit M' et M'' les préimages de $\widetilde{M}'$ et $\widetilde{M}''$ par l'application quotient $M \to M/N$; autrement dit, $\widetilde{M}' = M'/N$ et $\widetilde{M}'' = M''/N$. Puisque M' et M'' contiennent strictement N, ils n'appartiennent pas à $\mathscr{N}$, par maximalité de N. Ainsi

$$M/M' \cong \widetilde{M}/\widetilde{M}' \cong \widetilde{M}'' \quad \text{et} \quad M/M'' \cong \widetilde{M}/\widetilde{M}'' \cong \widetilde{M}'$$

s'écrivent l'un et l'autre comme somme directe finie de modules indécomposables. Il en est alors de même pour $M/N = \widetilde{M}' \oplus \widetilde{M}''$, ce qui contredit le choix de N. Cette absurdité montre que $\mathscr{N} = \varnothing$. En particulier, $\{0\} \notin \mathscr{N}$, autrement dit M s'écrit comme somme directe finie de modules indécomposables. □

1.1.6 Proposition. *Soit M un module sur un anneau et soit f un endomorphisme de M.*

(i) Si M est noethérien et f est surjectif, alors f est un automorphisme.

(ii) Si M est artinien et f est injectif, alors f est un automorphisme.

Preuve. (i) Comme M est noethérien, la suite des noyaux itérés de f stationne à partir d'un certain rang : il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\ker f^n = \ker f^{n+1}$. Ceci entraîne que $\ker f \cap \operatorname{im} f^n = \{0\}$. La surjectivité de f implique que $\operatorname{im} f^n = M$, d'où $\ker f = \{0\}$, et ainsi f est injectif.

(ii) Comme M est artinien, la suite des images itérées de f stationne à partir d'un certain rang : il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{im} f^n = \operatorname{im} f^{n+1}$. Ceci entraîne que $\operatorname{im} f + \ker f^n = M$. L'injectivité de f implique que $\ker f^n = \{0\}$, d'où $\operatorname{im} f = M$, et ainsi f est surjectif. □

EXERCICES.

(1) Justifier les énoncés suivants.
   (i) Le $\mathbb{Z}$-module régulier est noethérien mais pas artinien.
   (ii) Si p est un nombre premier, alors le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbb{Z}$ est artinien mais pas noethérien.
   (Indication : on prouvera que les sous-modules propres de $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbb{Z}$ sont de la forme $\frac{1}{p^n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$, avec $n \in \mathbb{N}$.)

(2) Déterminer tous les $\mathbb{Z}$-modules indécomposables de type fini. Lesquels sont simples ? Prouver que $\mathbb{Q}$ est un $\mathbb{Z}$-module indécomposable.
   (Indication : pour le premier point, utiliser le théorème de structure des groupes abéliens de type fini.)

1.2 Idempotents

Le slogan de la théorie des catégories est qu'il faut étudier les objets mathématiques à travers les homomorphismes qui les relient. De ce point de vue, la notion de module indécomposable devrait être définie ainsi : un A-module M est dit indécomposable si son anneau d'endomorphismes $\operatorname{End}_A(M)$ ne contient pas d'idempotent autre que 0 et id_M.

Dans le cas où M est le A-module régulier à gauche ${}_AA$, l'anneau des endomorphismes est l'anneau opposé A^{op} (c'est-à-dire A muni de la multiplication opposée), agissant sur A par multiplication à droite. Les décompositions de A en somme directe de deux idéaux à gauche sont ainsi de la forme $Ae \oplus A(1-e)$, où e est un idempotent de A (ou de A^{op}).

Ces observations justifient l'étude des idempotents.

Définition. Soit A un anneau.

(1) Un idempotent de A est un élément e tel que $e^2 = e$.
(2) Deux idempotents e et f sont **orthogonaux** si $ef = fe = 0$.
(3) Un idempotent e est dit **primitif** dans A si $e \neq 0$ et si l'on ne peut pas écrire e comme somme de deux idempotents non-nuls orthogonaux [2].

2. On notera qu'un idempotent d'un anneau A peut être primitif dans A mais ne pas l'être dans un anneau plus grand. Par exemple, identifiant un corps k à l'ensemble des matrices scalaires dans $\mathbf{Mat}_2(k)$, l'unité de k est un idempotent primitif dans k, mais est la somme de deux idempotents orthogonaux $E_{1,1} + E_{2,2}$ dans $\mathbf{Mat}_2(k)$, où les $E_{i,j}$ sont les matrices élémentaires habituelles.

Dans un anneau A, la somme $e = e_1 + \cdots + e_n$ d'une famille finie $(e_1, \ldots, e_n)$ d'idempotents deux à deux orthogonaux est un idempotent. Une telle écriture est appelée décomposition idempotente orthogonale de e. Une famille e_1, ..., e_n d'idempotents de A, deux à deux orthogonaux, et de somme l'unité de A est appelée système orthogonal complet d'idempotents.

1.2.1 Proposition. *Soit A un anneau, soit M un A-module, et soit $B = \mathrm{End}_A(M)$.*

(i) Tout sous-module facteur direct de M est l'image d'un idempotent de B.

(ii) Soit e un idempotent de B. Si $e = e_1 + \cdots + e_n$ est une décomposition en somme d'idempotents deux à deux orthogonaux de B, alors $(\mathrm{im}\, e) = (\mathrm{im}\, e_1) \oplus \cdots \oplus (\mathrm{im}\, e_n)$. Toute décomposition de $(\mathrm{im}\, e)$ en somme directe de sous-modules est de cette forme.

(iii) Un idempotent e de B est primitif si et seulement si le A-module $(\mathrm{im}\, e)$ est indécomposable.

(iv) Si e est un idempotent de A et si $e = e_1 + \cdots + e_n$ est une décomposition de e en somme d'idempotents deux à deux orthogonaux, alors l'idéal à gauche Ae est la somme directe $Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_n$. Toute décomposition de Ae en somme directe d'idéaux à gauche de A est de cette forme.

Preuve. (i) Soit N un sous-module facteur direct de M. Pour chaque supplémentaire L de N dans M, la projection de M sur N parallèlement à L est un idempotent de B d'image N.

(ii) Partons d'une décomposition $e = e_1 + \cdots + e_n$ dans B et posons $N = \mathrm{im}\, e$ et $N_i = \mathrm{im}\, e_i$. Chaque élément x de N vérifie $x = e(x)$ donc s'écrit comme somme $x_1 + \cdots + x_n$ avec $x_i = e_i(x)$; ainsi $N = N_1 + \cdots + N_n$. L'hypothèse que les e_i soient des idempotents deux à deux orthogonaux implique que chaque e_i est l'identité sur N_i et est nul sur N_j si $i \neq j$. Il en découle que si une famille $(x_1, \ldots, x_n) \in N_1 \times \cdots \times N_n$ vérifie $x_1 + \cdots + x_n = 0$, alors chaque x_i est nul : la somme $N_1 + \cdots + N_n$ est donc directe.

Inversement, étant donnée une décomposition en somme directe $N_1 \oplus \cdots \oplus N_n$ de $N = \mathrm{im}\, e$, en notant e_i la projection sur N_i parallèlement à la somme de $\ker e$ et des autres N_j, nous définissons une famille d'idempotents de B, deux à deux orthogonaux, et qui vérifient $e = e_1 + \cdots + e_n$.

(iii) est un corollaire de (ii). (iv) est (ii) pour le cas particulier où M est le A-module régulier à gauche. □

Si e est un idempotent de A, alors $eAe = \{a \in A \mid a = ea = ae\}$ est une partie de A stable par multiplication. Cet ensemble est donc un anneau, avec e pour unité multiplicative. (Ce n'est pas un sous-anneau de A, puisqu'on change d'unité multiplicative.)

1.2.2 Proposition. *Soit A un anneau, soit e un idempotent de A, et soit M un A-module.*

(i) L'application $f \mapsto f(e)$ induit un isomorphisme de groupes abéliens de $\mathrm{Hom}_A(Ae, M)$ sur $eM = \{x \in M \mid ex = x\}$.

(ii) Le cas particulier $M = Ae$ donne un isomorphisme d'anneaux $\mathrm{End}_A(Ae) \cong (eAe)^{\mathrm{op}}$.

Preuve. (i) Si $f \in \mathrm{Hom}_A(Ae, M)$, alors $f(e) = f(e^2) = ef(e)$ appartient à eM. Notre homomorphisme est donc bien défini, et on vérifie sans difficulté que l'application $ex \mapsto (ae \mapsto aex)$ de eM dans $\mathrm{Hom}_A(Ae, M)$ est la bijection réciproque.

(ii) La vérification est laissée en exercice ; noter que $(eAe)^{\mathrm{op}}$ agit sur Ae par multiplication à droite (d'où le passage à l'anneau opposé). □

Partant d'un anneau A et d'un entier naturel n, on peut former l'anneau $\mathbf{Mat}_n(A)$ des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans A. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]$, soit $E_{i,j}$ la matrice ayant des zéros partout, sauf un 1 en position (i,j). L'écriture $1 = E_{1,1} + \cdots + E_{n,n}$ est alors une décomposition de l'unité de $\mathbf{Mat}_n(A)$ en somme d'idempotents deux à deux orthogonaux [3], et l'application $a \mapsto aE_{1,1}$ définit un isomorphisme d'anneaux $A \cong E_{1,1}\mathbf{Mat}_n(A)E_{1,1}$.

Nous avons ainsi deux constructions de nouveaux anneaux à partir d'un anneau A, à savoir eAe et $\mathbf{Mat}_n(A)$, pour e un idempotent de A et n un entier naturel. Ces deux constructions partagent plusieurs propriétés communes. Par exemple, l'une et l'autre s'obtiennent comme anneaux d'endomorphismes :

$$\mathrm{End}_A(Ae) \cong (eAe)^{\mathrm{op}} \quad \text{et} \quad \mathrm{End}_A(A^{\oplus n}) \cong \mathbf{Mat}_n(A)^{\mathrm{op}}$$

(ici les éléments de la somme directe $A^{\oplus n}$ sont représentés comme des vecteurs-lignes de n éléments du A-module régulier).

1.2.3 Proposition. *Les idéaux bilatères de ces anneaux eAe et $\mathbf{Mat}_n(A)$ sont respectivement les eIe et $\mathbf{Mat}_n(I)$, pour I idéal bilatère de A.*

Preuve. Certainement, si I est un idéal bilatère de A, alors eIe et $\mathbf{Mat}_n(I)$ sont des idéaux bilatères de eAe et $\mathbf{Mat}_n(A)$, respectivement. La petite difficulté est la réciproque.

Soit J un idéal bilatère de eAe. Le sous-ensemble I de A formé des éléments de la forme $x = a_1y_1b_1 + \cdots + a_ny_nb_n$, avec n entier naturel et $(a_i, b_i, y_i) \in A^2 \times J$, est un idéal bilatère. Dans cette écriture, chaque y_i vérifie $y_i = ey_ie$, d'où $exe = (ea_1e)y_1(eb_1e) + \cdots + (ea_ne)y_n(eb_ne)$. Ce calcul et le fait que J soit un idéal de eAe montre que pour chaque x dans I, l'élément exe appartient à J. Autrement dit $eIe \subset J$. L'inclusion opposée provient de l'inclusion évidente $J \subset I$ et de l'égalité $I \cap eAe = eIe$.

Soit J un idéal bilatère de $\mathbf{Mat}_n(A)$. Notons $e = E_{1,1}$ et notons I l'image réciproque de J par l'isomorphisme d'anneaux $a \mapsto ae$ de A sur $e\mathbf{Mat}_n(A)e$. Étant donnés $a \in I$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, la matrice $aE_{i,j}$ s'écrit $E_{i,1}(ae)E_{1,j}$ avec ae dans J ; elle appartient donc à J. Nous avons prouvé l'inclusion $\mathbf{Mat}_n(I) \subset J$. Réciproquement, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, l'application $x \mapsto E_{i,1}xE_{1,j}$ est une bijection de $e\mathbf{Mat}_n(A)e$ sur $E_{i,i}\mathbf{Mat}_n(A)E_{j,j}$ (de réciproque $y \mapsto E_{1,i}yE_{j,1}$), qui envoie eJe sur $E_{i,i}JE_{j,j}$. Par suite, l'application $a \mapsto aE_{i,j}$ de I dans $E_{i,i}JE_{j,j}$ est surjective. Tout élément x de J s'écrit donc sous la forme

$$x = \left(\sum_{i=1}^{n} E_{i,i}\right) x \left(\sum_{j=1}^{n} E_{j,j}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E_{i,i}xE_{j,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}E_{i,j}$$

avec $a_{i,j} \in I$. Nous concluons que $J = \mathbf{Mat}_n(I)$. □

3. La décomposition $\mathbf{Mat}_n(A) = \mathbf{Mat}_n(A)E_{1,1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Mat}_n(A)E_{n,n}$ traduit le fait que chaque matrice est la donnée de ses vecteurs colonnes.

1.3 Blocs d'un anneau

Le A-bimodule régulier est le groupe additif A muni des actions de A par multiplication à gauche et à droite. (On peut le voir comme un module sur l'anneau $A \otimes_{\mathbb{Z}} A^{\mathrm{op}}$, ce qui permet de lui appliquer les résultats sur les modules.) Ses sous-bimodules sont les idéaux bilatères de A. Son anneau d'endomorphismes est le centre $Z(A)$ de A, agissant par multiplication (à gauche ou à droite, c'est pareil).

Si I est un idéal bilatère de A et M est un A-module, on note IM l'ensemble des éléments de M de la forme $a_1m_1 + \cdots + a_nm_n$, où n est un entier naturel, a_i appartient à I et m_i appartient à M pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. C'est un sous-module de M.

1.3.1 Proposition. *Soit A un anneau. On suppose avoir décomposé A comme somme directe $A = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$ d'idéaux bilatères. Alors :*

(i) Tout A-module M se décompose comme la somme directe de sous-modules $I_1M \oplus \cdots \oplus I_nM$.

(ii) Décomposons l'unité de A selon la somme directe $I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$ en écrivant

$$1 = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n.$$

Alors les ε_s appartiennent au centre $Z(A)$ et sont des idempotents deux à deux orthogonaux. Pour chaque $s \in [\![1, n]\!]$ et pour chaque A-module M, on a $I_s = \varepsilon_sA$ et $I_sM = \varepsilon_sM$.

(iii) Si J est un idéal à gauche de A et $s \in [\![1, n]\!]$, alors $I_sJ = I_s \cap J$.

Preuve. Appliquant la proposition 1.2.1 (ii) au A-bimodule régulier, nous obtenons une décomposition

$$1 = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$$

en somme d'idempotents deux à deux orthogonaux dans $Z(A)$, telle que $I_s = \varepsilon_sA$ pour chaque $s \in [\![1, n]\!]$. Cette décomposition ne peut qu'être celle définie dans l'énoncé (ii). De plus, l'action de A sur un module M définit un homomorphisme d'anneaux de $Z(A)$ dans l'anneau des endomorphismes de M : nos idempotents peuvent alors se voir dans $\mathrm{End}_A(M)$ et la proposition 1.2.1 (ii), appliquée cette fois à M, donne $M = \varepsilon_1M \oplus \cdots \oplus \varepsilon_nM$. Ainsi (i) est vrai.

Maintenant la somme $(I_1 \cap J) \oplus \cdots \oplus (I_n \cap J)$ est directe parce que $I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$ l'est. Nous pouvons donc insérer les inclusions évidentes $I_sJ \subset I_s \cap J$ dans une chaîne

$$J = I_1J \oplus \cdots \oplus I_nJ \subset (I_1 \cap J) \oplus \cdots \oplus (I_n \cap J) \subset J.$$

Ces inclusions évidentes sont donc des égalités, ce qui donne (iii). □

1.3.2 Proposition. *Soit A un anneau. On suppose pouvoir écrire le A-bimodule régulier comme somme directe finie $B_1 \oplus \cdots \oplus B_r$ de sous-bimodules indécomposables. Alors cette écriture est unique, et lorsqu'on décompose l'unité de A selon la somme directe $B_1 \oplus \cdots \oplus B_r$ en écrivant*

$$1 = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_r,$$

les ε_s sont les idempotents primitifs de l'anneau $Z(A)$. Pour tout A-module indécomposable M, il existe un unique $s \in [\![1, r]\!]$ tel que ε_s agisse par l'identité sur M ; les autres ε_t agissent par 0.

Preuve. Il n'y a que l'unicité à justifier, et elle est conséquence immédiate du fait suivant : pour chaque décomposition de A en somme directe $I \oplus J$ de deux idéaux bilatères, il existe $S \subset [\![1, r]\!]$ tel que $I = \bigoplus_{s \in S} B_s$.

Démontrons ce fait. Appliquant la proposition 1.3.1 à la décomposition $A = I \oplus J$, nous voyons que chaque B_s est la somme directe $(B_s \cap I) \oplus (B_s \cap J)$ de deux idéaux bilatères. Que les B_s soient indécomposables implique ainsi que $B_s \cap I$ est B_s ou $\{0\}$. Contemplant maintenant l'égalité $I = (B_1 \cap I) \oplus \cdots \oplus (B_r \cap I)$, il nous suffit de poser $S = \{s \in [\![1, r]\!] \mid B_s \cap I = B_s\}$ pour conclure. □

Définition. (On suppose ici que A est un anneau possédant une décomposition comme dans la proposition 1.3.2.)

(1) Les B_s s'appellent les **blocs** de A. Les ε_s sont les **idempotents de blocs**.
(2) Un A-module indécomposable M est dit **appartenir** au bloc B_s si ε_s agit par l'identité sur M.

Remarques.

(1) Un bloc B_s est un idéal bilatère de A, mais c'est aussi un anneau pour la multiplication héritée de A, avec ε_s pour neutre multiplicatif. L'application somme $B_1 \times \cdots \times B_r \to A$ est un isomorphisme d'anneaux.
(2) Si deux modules indécomposables M et N appartiennent à des blocs distincts, alors $\operatorname{Hom}_A(M, N) = 0$; de fait, si ε est l'idempotent du bloc auquel M appartient, alors $\varepsilon M = M$ et $\varepsilon N = 0$, et pour chaque homomorphisme $f : M \to N$ il vient $f(M) = f(\varepsilon M) = \varepsilon f(M) \subset \varepsilon N = \{0\}$. On peut de même démontrer que tous les groupes d'extension $\operatorname{Ext}^i_A(M, N)$ sont nuls (voir le paragraphe 1.6).

1.4 Modules complètement réductibles

Définition.

(1) Un module sur un anneau est dit **simple** s'il admet deux sous-modules, à savoir $\{0\}$ et lui-même.
(2) Un sous-module N d'un module M est dit **maximal** si le quotient M/N est simple. (De façon équivalente, $N \subsetneq M$ et il n'existe pas de sous-module L tel que $N \subsetneq L \subsetneq M$.)
(3) Le **socle** $\operatorname{soc} M$ d'un module M est la somme des sous-modules simples de M.
(4) Le **radical** $\operatorname{rad} M$ d'un module M est l'intersection des sous-modules maximaux de M. La **tête** de M (aussi appelée cosocle et notée $\operatorname{top} M$ ou $\operatorname{hd} M$) est le quotient $M/\operatorname{rad} M$.
(5) Un module est dit **complètement réductible** si tous ses sous-modules sont des facteurs directs.

Remarque. Si M est un module noethérien, tout sous-module de M autre que M lui-même est inclus dans un sous-module maximal ; en particulier $M \neq \{0\} \Rightarrow \operatorname{rad} M \subsetneq M$. Si M est un module artinien, tout sous-module de M autre que $\{0\}$ contient un sous-module simple ; en particulier $M \neq \{0\} \Rightarrow \operatorname{soc} M \neq \{0\}$.

1.4.1 Proposition.

(i) Si $f : M \to N$ est un homomorphisme de modules, alors $f(\operatorname{soc} M) \subset \operatorname{soc} N$ et $f(\operatorname{rad} M) \subset \operatorname{rad} N$.

(ii) Les notions de socle, de radical et de tête sont compatibles avec la somme directe finie.

Preuve. Soit L un sous-module maximal de N. Le module $M/f^{-1}(L)$ s'injecte dans le module simple N/L, donc est simple ou réduit à $\{0\}$. Ainsi $f^{-1}(L)$ est un sous-module maximal de M ou est M tout entier ; dans les deux cas, il contient $\operatorname{rad} M$. Par conséquent $f(\operatorname{rad} M) \subset L$. Ceci étant vrai pour tout sous-module maximal L de M, nous concluons que $f(\operatorname{rad} M) \subset \operatorname{rad} N$. La preuve de l'inclusion $f(\operatorname{soc} M) \subset \operatorname{soc} N$ est analogue et laissée au lecteur.

Le premier item exprime que le socle, le radical et la tête sont des constructions fonctorielles, c'est-à-dire respectent les homomorphismes. Le second item découle alors simplement de la caractérisation catégorique de la somme directe (voir la définition p. 4).

Plus concrètement, dans le cas de deux modules M et N, l'argument consiste à observer que les injections et surjections canoniques

$$i : M \to M \oplus N, \quad j : N \to M \oplus N, \quad p : M \oplus N \to M, \quad q : M \oplus N \to N$$

se restreignent aux socles et aux radicaux des modules. Cela donne immédiatement les inclusions $\operatorname{soc} M \oplus \operatorname{soc} N \subset \operatorname{soc}(M \oplus N)$ et $\operatorname{rad} M \oplus \operatorname{rad} N \subset \operatorname{rad}(M \oplus N)$, et les égalités s'obtiennent en exploitant la relation $\mathrm{id}_{M\oplus N} = i \circ p + j \circ q$. □

1.4.2 Proposition. *Soit M un module sur un anneau et soit N un sous-module de M. Si M est complètement réductible, alors N et M/N sont aussi complètement réductibles.*

Preuve. Soit M un module complètement réductible et soit N un sous-module de M.

Soit L un sous-module de N. Comme M est complètement réductible, L admet un supplémentaire dans M. Il existe donc un sous-module L' tel que $M = L \oplus L'$. Nous constatons qu'alors $N = L \oplus (L' \cap N)$, autrement dit L admet un supplémentaire dans N. Tout sous-module de N est donc facteur direct dans N : le module N est complètement réductible.

Par ailleurs, M étant complètement réductible, le sous-module N admet un supplémentaire N' dans M. D'après le paragraphe précédent, le module N' est complètement réductible, et M/N lui est isomorphe. □

1.4.3 Théorème. *Soit M un A-module. Les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) M est de type fini et est complètement réductible.

(ii) M est la somme directe d'une famille finie de sous-modules simples.

(iii) M est noethérien et $\operatorname{soc} M = M$*.*

(iv) M est artinien et $\operatorname{rad} M = \{0\}$*.*

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii) : supposons (i). Par complète réductibilité, chaque sous-module de M est isomorphe à un quotient de M, donc est de type fini puisque M est de type fini. Le critère (iii) de la proposition 1.1.1 entraîne alors que M est noethérien. Nous pouvons donc appliquer la proposition 1.1.5 : M est la somme directe finie $M_1 \oplus \cdots \oplus M_m$ de sous-modules indécomposables. Chaque M_i ici est à la fois complètement réductible et indécomposable, donc est simple. Ainsi (ii) est vrai.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : le fait que M soit noethérien découle du corollaire 1.1.4 et l'assertion sur le socle est évidente.

(ii) $\Rightarrow$ (iv) : le fait que M soit artinien découle du corollaire 1.1.4. Écrivons $M = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$. Alors chaque sous-module $H_i = L_1 \oplus \cdots \oplus L_{i-1} \oplus L_{i+1} \oplus \cdots \oplus L_n$ est maximal. Le radical $\operatorname{rad} M$ est donc inclus dans l'intersection $H_1 \cap \cdots \cap H_n$, qui est réduite à $\{0\}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : un module noethérien étant de type fini, il s'agit ici de démontrer que (iii) entraîne que M est complètement réductible. Supposons donc (iii) vraie. Nous voulons prouver que chaque sous-module N de M admet un supplémentaire dans M. Soit $\mathscr{N}$ l'ensemble des sous-modules $L \subset M$ tels que $L \cap N = \{0\}$. Certainement $\mathscr{N}$ n'est pas vide, parce que $\{0\} \in \mathscr{N}$. Comme M est supposé noethérien, $\mathscr{N}$ possède un élément maximal, disons N'.

Soit S un sous-module simple de M. Si $S \not\subset N'$, alors $N' + S \notin \mathscr{N}$ par maximalité de N', c'est-à-dire $N \cap (N' + S) \neq \{0\}$. Il existe donc $(x, y, z) \in N \times N' \times S$ avec $x \neq 0$ tel que $x + y + z = 0$. Comme $N \cap N' = \{0\}$, nécessairement $z \neq 0$; il s'ensuit que $(N + N') \cap S \neq \{0\}$. La simplicité de S force alors $S \subset N + N'$. Cette conclusion vaut aussi si $S \subset N'$.

L'alinéa précédent prouve que $N + N'$ contient tous les sous-modules simples de M, donc contient $\operatorname{soc} M = M$. Joint à $N \cap N' = \{0\}$, nous concluons que N' est un supplémentaire de N dans M.

(iv) $\Rightarrow$ (ii) : supposons (iv) vraie. Nous montrons d'abord que M est complètement réductible. Soit N un sous-module de M et soit $\mathscr{N}$ l'ensemble des sous-modules $L \subset M$ tels que $L + N = M$. Certainement $\mathscr{N}$ n'est pas vide, parce que $M \in \mathscr{N}$. Comme M est supposé artinien, $\mathscr{N}$ possède un élément minimal, disons N'.

Soit H un sous-module maximal de M. Si $H \not\supset N'$, alors $N' \cap H \notin \mathscr{N}$ par minimalité de N', c'est-à-dire $N + (N' \cap H) \neq M$. L'application naturelle $M \to (M/N) \times (M/(N' \cap H))$ n'est donc pas surjective, et l'application composée

$$M \to (M/N) \times (M/(N' \cap H)) \rightarrowtail (M/N) \times (M/N') \times (M/H)$$

ne l'est pas non plus. Cette dernière se réécrit comme la composée

$$M \to (M/(N \cap N')) \times (M/H) \cong (M/N) \times (M/N') \times (M/H),$$

le dernier isomorphisme provenant de ce que $N + N' = M$. Ainsi l'application naturelle $M \to (M/(N \cap N')) \times (M/H)$ n'est pas surjective, et donc $(N \cap N') + H \neq M$. La maximalité de H force alors $H \supset N \cap N'$. Cette conclusion vaut aussi si $H \supset N'$.

Ainsi $N \cap N'$ est inclus dans tous les sous-modules maximaux de M, donc dans $\operatorname{rad} M = \{0\}$.

Joint à $N + N' = M$, cela nous dit que N' est un supplémentaire de N dans M.

Nous avons ainsi démontré que tous les sous-modules de M admettent un supplémentaire, autrement dit que M est complètement réductible. Comme le module M est artinien, il est la somme directe finie $M_1 \oplus \cdots \oplus M_m$ de sous-modules indécomposables (proposition 1.1.5). Chaque M_i ici est complètement réductible (parce que M l'est) et indécomposable, donc est simple. Nous avons bien établi (ii). □

Remarque. Dans l'énoncé du théorème, on peut supprimer « de type fini » dans (i), « finie » dans (ii), « noethérien » dans (iii) et « artinien » dans (iv), mais alors on a seulement (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv), et la preuve utilise le lemme de Zorn, donc l'axiome du choix.

Définition. Un **anneau à division** est un anneau Δ non réduit à $\{0\}$ dans lequel tout élément non-nul est inversible ; en formules, $\Delta \setminus \Delta^\times = \{0\}$.

Exemple. Tout module M de type fini sur un anneau à division Δ est complètement réductible. En effet, M est noethérien car de type fini sur un anneau Δ qui est lui-même noethérien. Et si x est un élément non-nul de M, alors Δx est un sous-module simple de M ; par suite, M est la somme de ses modules simples, d'où $\operatorname{soc} M = M$.

L'étude des modules complètement réductibles se ramène pour l'essentiel à celle des modules simples. La question des endomorphismes est réglée par le lemme de Schur, bien connu.

1.4.4 Lemme de Schur. *Un homomorphisme entre deux modules simples est soit nul, soit un isomorphisme. L'anneau des endomorphismes d'un module simple est un anneau à division.*

Pour conclure cette section, nous introduisons la notion de composante isotypique.

Soit M un A-module de type fini complètement réductible, écrit comme somme directe finie $\bigoplus_{i \in I} L_i$ de sous-modules simples L_i. Regroupons les L_i par paquets selon leurs classes d'isomorphisme : pour S module simple, nous posons $M_{(S)} = \sum_{i \in I_S} L_i$ où I_S est l'ensemble des $i \in I$ tels que $L_i \cong S$. Par construction I est l'union disjointe des I_S, et donc

$$M = \bigoplus_{S \in \mathscr{S}} M_{(S)},$$

la somme portant sur l'ensemble $\mathscr{S}$ des classes d'isomorphisme de A-modules simples.

1.4.5 Proposition. *Les sous-modules $M_{(S)}$ ne dépendent pas de la décomposition $M = \bigoplus_{i \in I} L_i$ utilisée pour les construire.*

Preuve. Prenons une seconde décomposition $M = \bigoplus_{j \in J} L'_j$ de M en somme directe de sous-modules simples. Soit S un module simple, notons J_S l'ensemble des $j \in J$ tels que $L'_j \cong S$, et posons $M'_{(S)} = \sum_{j \in J_S} L'_j$.

Les décompositions
$$M = \bigoplus_{i\in I} L_i = \bigoplus_{j\in J} L'_j$$
conduisent à représenter l'identité de M par une matrice, le coefficient en position (i,j) étant un élément de $\operatorname{Hom}_A(L'_j, L_i)$. D'après le lemme de Schur, cette matrice est diagonale par blocs : le coefficient en position (i,j) n'est non-nul que s'il existe un module simple S tel que $(i,j) \in I_S \times J_S$. Cette structure de matrice diagonale par blocs signifie que l'identité de M envoie $M'_{(S)}$ dans $M_{(S)}$, pour chaque (classe d'isomorphisme de) module simple S, ce qui établit l'inclusion $M'_{(S)} \subset M_{(S)}$. L'inclusion opposée se prouve de façon symétrique. □

Définition. Le sous-module $M_{(S)}$ d'un module complètement réductible M s'appelle la **composante isotypique** de type S de M.

Exercices.

(1) Prouver que le socle et le radical du A-module régulier à gauche sont des idéaux bilatères de A.

(2) Soit M un module noethérien et L un sous-module de M. Prouver que si $M = L + \operatorname{rad} M$, alors $M = L$.
(Indication : l'hypothèse M noethérien garantit que tout sous-module strict de M est inclus dans un sous-module maximal.)

(3) Soit A un anneau, soit M un A-module complètement réductible, et soit $f \in \operatorname{End}_{\mathbb{Z}}(M)$. On suppose que f commute à tous les éléments de $\operatorname{End}_A(M)$.

(i) Soit n un entier plus grand que 1. Démontrer que l'application
$$F : M^n \to M^n, \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (f(x_1), \ldots, f(x_n))$$
commute à tout élément de $\operatorname{End}_A(M^n)$.

(ii) Soit n un entier plus grand que 1 et soit $(m_1, \ldots, m_n)$ un élément de M^n. Prouver l'existence d'un endomorphisme de M^n d'image $\{(am_1, \ldots, am_n) \mid a \in A\}$.

(iii) Démontrer que pour toute partie finie X de M, il existe $a \in A$ tel que $f(x) = ax$ pour tout $x \in X$.

(Remarque : ce résultat est appelé théorème de densité de Jacobson–Bourbaki ou théorème de Jacobson–Chevalley.)

(4) Soit A une algèbre sur un corps k, soit S_1, ..., S_n des A-modules simples deux à deux non-isomorphes, de dimension finie sur k. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, notons I_i l'annulateur de S_i, c'est-à-dire le noyau de l'homomorphisme de A dans $\operatorname{End}_{\mathbb{Z}}(S_i)$ définissant la structure de A-module sur S_i. Prouver que l'homomorphisme d'anneaux naturel
$$A/(I_1 \cap \cdots \cap I_n) \cong (A/I_1) \times \cdots \times (A/I_n)$$
est un isomorphisme. (En langage géométrique, les sous-espaces vectoriels I_i de A s'intersectent transversalement.)

(5) Soit $f : M \to N$ un homomorphisme entre deux modules complètement réductibles. Démontrer que $f(M_{(S)}) \subset N_{(S)}$ pour chaque module simple S.

1.5 Anneaux semi-simples

1.5.1 Lemme. *Soit n un entier strictement positif, soit Δ un anneau à division, et soit A l'anneau de matrices $\mathbf{Mat}_n(\Delta)$.*

(i) Le groupe additif Δ^n des vecteurs colonnes de taille n à coefficients dans Δ est un A-module simple pour la multiplication matricielle habituelle.

(ii) Le A-module régulier ${}_AA$ est complètement réductible.

Preuve. (i) Adoptons les notations de l'énoncé. Soit $x \in \Delta^n$ un élément non-nul ; il possède certainement une composante x_j différente de zéro. Tout $y \in \Delta^n$ s'écrit alors

$$y = \underbrace{y \cdot (0 \cdots 0\ x_j^{-1}\ 0 \cdots 0)}_{\in \mathbf{Mat}_n(\Delta)} \cdot x,$$

donc appartient au sous-module $A \cdot x$ engendré par x. Autrement dit, Δ^n est engendré par chacun de ses éléments non-nuls.

(ii) Pour $i \in [\![1, n]\!]$, notons $E_{i,i}$ la matrice avec 1 en position (i, i) et 0 partout ailleurs. Le module régulier ${}_AA$ se décompose alors en $AE_{1,1} \oplus \cdots \oplus AE_{n,n}$, somme directe de n copies de ce module simple Δ^n. Il satisfait donc la condition (ii) du théorème 1.4.3. $\square$

1.5.2 Lemme. *Soit M un module de type fini complètement réductible sur un anneau quelconque A. Il existe alors un entier naturel r, des entiers strictement positifs n_1, ..., n_r, et des anneaux à division Δ_1, ..., Δ_r tels que*

$$\mathrm{End}_A(M) \cong \mathbf{Mat}_{n_1}(\Delta_1) \times \cdots \times \mathbf{Mat}_{n_r}(\Delta_r).$$

Preuve. Par hypothèse, M est la somme directe de modules simples. En regroupant les termes selon leurs classes d'isomorphismes, nous arrivons à une écriture de la forme

$$M \cong S_1^{\oplus n_1} \oplus \cdots \oplus S_r^{\oplus n_r}$$

où S_1, ..., S_r sont des A-modules simples deux à deux non isomorphes. Notons Δ_i l'anneau des endomorphismes de S_i. D'après le lemme de Schur, Δ_i est un anneau à division, tandis que $\mathrm{Hom}_A(S_j, S_i) = \{0\}$ si $i \neq j$. L'additivité de $\mathrm{Hom}_A(-, -)$ par rapport à chacun de ses arguments fournit alors le résultat annoncé. $\square$

1.5.3 Théorème (Wedderburn). *Soit A un anneau. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) Il existe un entier naturel r, des entiers strictement positifs n_1, ..., n_r, et des anneaux à division Δ_1, ..., Δ_r tels que

$$A \cong \mathbf{Mat}_{n_1}(\Delta_1) \times \cdots \times \mathbf{Mat}_{n_r}(\Delta_r).$$

(ii) Le A-module régulier ${}_AA$ est complètement réductible.

(iii) Tout A-module de type fini est complètement réductible.

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii) : cette implication est une conséquence immédiate du premier lemme ci-dessus, appliqué à chacun des blocs $\mathbf{Mat}_{n_i}(\Delta_i)$ du produit.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : l'anneau des endomorphismes du A-module régulier à gauche est l'anneau A^{op}, opérant par multiplication à droite sur A. Du second lemme ci-dessus, nous déduisons ainsi que A^{op} vérifie l'énoncé (i). La transposition des matrices induisant des isomorphismes $\mathbf{Mat}_{n_i}(\Delta_i)^{\mathrm{op}} \cong \mathbf{Mat}_{n_i}(\Delta_i^{\mathrm{op}})$, nous concluons que l'anneau A vérifie lui aussi l'énoncé (i).

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) : supposons que ${}_AA$ est complètement réductible. Alors pour chaque entier m le A-module $A^m = {}_AA \oplus \cdots \oplus {}_AA$ (m fois) est complètement réductible. Un A-module de type fini étant quotient d'un tel module, il est nécessairement complètement réductible. La réciproque est banale. $\square$

Définition. Un anneau A est dit **semi-simple** s'il vérifie les propriétés équivalentes du théorème 1.5.3. (On utilise souvent l'expression plus complète semi-simple artinien, qui reflète des recherches passées de mode sur une notion plus générale de semi-simplicité.)

Remarques.

(1) Dans la propriété (i) du théorème 1.5.3, les données r, (n_1, Δ_1), ..., (n_r, Δ_r) sont essentiellement uniques. De fait, r est le nombre de blocs de A, les Δ_i^{op} sont, à isomorphisme près, les anneaux d'endomorphismes des A-modules simples, et les n_i sont les multiplicités de ces modules simples dans la représentation régulière.

(2) La preuve de l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) montre que si A est un anneau semi-simple, alors A^{op} en est aussi un. Il n'y a donc pas lieu de distinguer entre anneau semi-simple à gauche et anneau semi-simple à droite.

1.6 Suites exactes et extensions

Le paragraphe précédent montre qu'en général un anneau possède des modules de type fini qui ne sont pas complètement réductibles. Il est ainsi important de savoir analyser quels modules E peuvent être obtenus à partir de la donnée d'un sous-module N et du module quotient $M = E/N$. Les groupes d'extension Ext^1 sont un outil géneral pour étudier cela.

Dans ce paragraphe, A est un anneau quelconque. Commençons par des définitions classiques.

Définition.

(1) Un **monomorphisme** est un homomorphisme $f : M \to N$ simplifiable à gauche : pour toute paire d'homomorphismes g_1, $g_2 : L \to M$, si $f \circ g_1 = f \circ g_2$, alors $g_1 = g_2$. Un **monomorphisme scindé** est un homomorphisme $f : M \to N$ inversible à gauche : il existe $h : N \to M$ tel que $h \circ f = \mathrm{id}_M$.

(2) Un **épimorphisme** est un homomorphisme $f : M \to N$ simplifiable à droite : pour toute paire d'homomorphismes h_1, $h_2 : N \to L$, si $h_1 \circ f = h_2 \circ f$, alors $h_1 = h_2$. Un **épimorphisme scindé** est un homomorphisme $f : M \to N$ inversible à droite : il existe $g : N \to M$ tel que $f \circ g = \mathrm{id}_N$.

Ces définitions peuvent être reformulées de façon plus concrète [4].

1.6.1 Proposition.

(i) Un monomorphisme est un homomorphisme injectif. Un monomorphisme $f : M \to N$ est scindé si et seulement si l'image de f est un facteur direct dans N.

(ii) Un épimorphisme est un homomorphisme surjectif. Un épimorphisme $f : M \to N$ est scindé si et seulement si le noyau de f est un facteur direct dans M.

La preuve est laissée en exercice.

Dans une suite exacte
$$0 \to N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \to 0,$$
le monomorphisme f est scindé si et seulement si l'épimorphisme g l'est. On dit dans ce cas que la suite exacte est scindée.

Soit M et N deux A-modules. On note $\mathit{Ext}_A^1(M,N)$ la classe des suites exactes courtes de la forme
$$\xi :\ 0 \to N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \to 0.$$
Étant donné deux éléments ξ et
$$\xi' :\ 0 \to N \xrightarrow{f'} E' \xrightarrow{g'} M \to 0$$
de $\mathit{Ext}_A^1(M,N)$, on écrit $\xi \sim \xi'$ s'il existe un homomorphisme $\theta : E \to E'$ faisant commuter le diagramme
$$\begin{tikzcd} & & E \arrow[dd, "\theta"] \arrow[dr, "g"] & & \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & & M \arrow[r] & 0. \\ & & E' \arrow[ur, "g'"'] & & \end{tikzcd}$$
Le lemme des cinq impose à θ d'être un isomorphisme ; on en déduit que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathit{Ext}_A^1(M,N)$. On note $[\xi]$ la classe d'équivalence d'une suite exacte courte ξ. On note $\operatorname{Ext}_A^1(M,N)$ l'ensemble quotient $\mathit{Ext}_A^1(M,N)/\sim$. Les suites exactes courtes scindées forment une classe d'équivalence modulo $\sim$.

L'ensemble $\operatorname{Ext}_A^1(M,N)$ est un groupe abélien : pour construire la somme $[\xi]+[\xi']$, on choisit des représentants ξ et ξ' de ces classes, notés comme précédemment. On introduit alors deux sous-modules
$$K = \{(e,e') \mid g(e) = g'(e')\} \quad \text{et} \quad L = \{(f(n), -f'(n)) \mid n \in N\}$$
de $E \oplus E'$, on remarque que K contient L, et on pose $E'' = K/L$,
$$f'' : \begin{pmatrix} N \to E'' \\ n \mapsto (f(n),0)+L \end{pmatrix}, \quad g'' : \begin{pmatrix} E'' \to M \\ (e,e')+L \mapsto g(e) \end{pmatrix},$$
et
$$\xi'' :\ 0 \to N \xrightarrow{f''} E'' \xrightarrow{g''} M \to 0.$$

4. Elles peuvent également être reformulées de façon plus abstraite : un homomorphisme f est un monomorphisme (respectivement, épimorphisme) si pour tout A-module L, l'application $\operatorname{Hom}_A(L,f)$ (respectivement, $\operatorname{Hom}_A(f,L)$) est injective.

On constate que ξ'' est une suite exacte courte et on définit $[\xi]+[\xi'] = [\xi'']$. On vérifie que cela a un sens (c'est-à-dire que la classe d'équivalence de ξ'' ne dépend que de $[\xi]$ et $[\xi']$ et pas du choix de ξ et ξ'), que l'on obtient ainsi une loi associative et commutative sur $\mathrm{Ext}^1_A(M,N)$, que la classe des suites exactes scindées est l'élément neutre, et que l'opposé de $[\xi]$ est la classe de

$$0 \to N \xrightarrow{-f} E \xrightarrow{g} M \to 0.$$

Soit $u : M' \to M$ et $v : N \to N'$ des homomorphismes de A-modules. À partir d'une suite exacte courte ξ, on en produit deux autres $u^*\xi$ et $v_*\xi$ en formant le pull-back P de (g,u) et le push-forward Q de (f,v).

$$\begin{tikzcd}
u^*\xi : & 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & P \arrow[r] \arrow[d] & M' \arrow[r] \arrow[d, "u"] & 0 \\
\xi : & 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "v"'] & E \arrow[r, "g"] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
v_*\xi : & 0 \arrow[r] & N' \arrow[r] & Q \arrow[r] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Les classes d'équivalence $[u^*\xi]$ et $[v_*\xi]$ ne dépendent pas du choix de ξ dans sa classe, ce qui permet de définir sans ambiguïté $\mathrm{Ext}^1_A(u,N)[\xi] = [u^*\xi]$ et $\mathrm{Ext}^1_A(M,v)[\xi] = [v_*\xi]$. On obtient ainsi deux foncteurs additifs $\mathrm{Ext}^1_A(-,N)$ et $\mathrm{Ext}^1_A(M,-)$ de la catégorie des A-modules vers la catégorie des groupes abéliens (le premier foncteur est contravariant). Les deux compositions

$$\mathrm{Ext}^1_A(u,N') \circ \mathrm{Ext}^1_A(M,v) \quad \text{et} \quad \mathrm{Ext}^1_A(M',v) \circ \mathrm{Ext}^1_A(u,N)$$

définissent le même homomorphisme de groupes de $\mathrm{Ext}^1_A(M,N)$ dans $\mathrm{Ext}^1_A(M',N')$, que l'on note $\mathrm{Ext}^1(u,v)$.

Soit à nouveau une suite exacte courte ξ comme ci-dessus, et soit X et Y des A-modules. On dispose alors de deux suites exactes longues de groupes abéliens

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(X,N) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_A(X{,}f)"] & \mathrm{Hom}_A(X,E) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_A(X{,}g)"] & \mathrm{Hom}_A(X,M) \arrow[dll, rounded corners] \\
& \mathrm{Ext}^1_A(X,N) \arrow[r, "\mathrm{Ext}^1_A(X{,}f)"] & \mathrm{Ext}^1_A(X,E) \arrow[r, "\mathrm{Ext}^1_A(X{,}g)"] & \mathrm{Ext}^1_A(X,M)
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M,Y) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_A(g{,}Y)"] & \mathrm{Hom}_A(E,Y) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_A(f{,}Y)"] & \mathrm{Hom}_A(N,Y) \arrow[dll, rounded corners] \\
& \mathrm{Ext}^1_A(M,Y) \arrow[r, "\mathrm{Ext}^1_A(g{,}Y)"] & \mathrm{Ext}^1_A(E,Y) \arrow[r, "\mathrm{Ext}^1_A(f{,}Y)"] & \mathrm{Ext}^1_A(N,Y)
\end{tikzcd}$$

dans lesquelles les homomorphismes de liaison sont respectivement $u \mapsto \mathrm{Ext}^1_A(u,N)[\xi]$ et $v \mapsto \mathrm{Ext}^1_A(M,v)[\xi]$.

Il est ici cohérent d'écrire Ext^0 au lieu de Hom. On peut en fait poursuivre indéfiniment les suites exactes longues ci-dessus en introduisant des groupes $\mathrm{Ext}^i_A(M,N)$ pour chaque entier $i \geq 2$, définis comme ensembles de classes d'équivalence de suites exactes de la forme

$$0 \to N \to E_i \to E_{i-1} \to \cdots \to E_2 \to E_1 \to M \to 0.$$

La relation d'équivalence est toutefois un peu plus compliquée à décrire que dans le cas $i = 1$.

Mieux encore : si L, M et N sont trois A-modules et si i et j sont deux entiers naturels, il existe un « produit de Yoneda » $\mathrm{Ext}^j_A(M,N) \times \mathrm{Ext}^i_A(L,M) \to \mathrm{Ext}^{i+j}_A(L,N)$: pour $i = j = 0$, ce produit est la composition des homomorphismes ; pour $j = 0$ (respectivement, $i = 0$), il est donné par une opérations de push-forward (respectivement, pull-back) ; et quand i et j sont tous deux strictement positifs, le produit de deux éléments représentés par des suites exactes s'obtient en raboutant ces suites. Le cas particulier $L = M = N$ conduit à une structure d'anneau gradué sur le groupe $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Ext}^i_A(M,M)$.

Enfin, soit $P^\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$ une résolution projective de M. Étant donnée une suite exacte courte ξ, construisons un diagramme commutatif de la forme

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P^2 \arrow[r, "d^1"] & P^1 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "k"'] & P^0 \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "\varepsilon"] & & \\
& & & & M \arrow[r] & 0. \\
& 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"'] & E \arrow[ur, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

L'homomorphisme h tel que $g \circ h = \varepsilon$ est construit en utilisant la projectivité de P^0. Comme $\varepsilon \circ d^0 = 0$, l'homomorphisme $h \circ d^0 : P^1 \to E$ prend ses valeurs dans $\ker g = \operatorname{im} f$, donc il existe $k : P^1 \to N$ tel que $f \circ k = h \circ d^0$. On constate que $f \circ k \circ d^1 = 0$; comme f est un monomorphisme, il vient $k \circ d^1 = 0$. Par ailleurs, l'homomorphisme h n'est déterminé qu'à l'addition près d'un homomorphisme de la forme $f \circ s$, avec $s \in \mathrm{Hom}_A(P^0, N)$, et donc k, qui dépend du choix de h, n'est déterminé à l'addition près de $s \circ d^0$. Ainsi k est un 1-cocycle déterminé à un 1-cobord près dans le complexe

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(P^0, N) \to \mathrm{Hom}_A(P^1, N) \to \mathrm{Hom}_A(P^2, N) \to \cdots$$

La classe d'homologie de k ne depend donc que de ξ et pas des choix effectués pour définir h et k. On peut vérifier (voir par exemple la section 6.7 dans le livre de Jacobson) que cette construction permet d'identifier les deux définitions de $\mathrm{Ext}^1_A(M,N)$: comme un ensemble de classes d'équivalence de suites exactes courtes ou comme le foncteur derivé de $\mathrm{Hom}_A(-,N)$ évalué en M.

2 Radical de Jacobson d'un anneau

2.1 Définition

Rappel : on note $A^\times$ le groupe des unités (éléments inversibles) d'un anneau A.

2.1.1 Proposition. *Soit A un anneau. L'ensemble des idéaux bilatères I tels que*

$$1 + I = \{1 + a \mid a \in I\}$$

soit inclus dans $A^\times$ possède un plus grand élément pour l'inclusion.

Preuve. Soit $\mathscr{I}$ l'ensemble des idéaux bilatères I tels que $(1+I) \subset A^\times$. L'idéal $\{0\}$ appartient à $\mathscr{I}$ (même dans le cas $A = \{0\}$).

Commençons par montrer que $\mathscr{I}$ est stable par somme finie. Prenons deux éléments I et J de $\mathscr{I}$. Soit $a \in I + J$. On écrit $a = b + c$, avec $b \in I$ et $c \in J$. Comme $(1+I) \subset A^\times$, l'élement $1+b$ est inversible, et comme J est un idéal, $(1+b)^{-1}c \in J$, et puisque $(1+J) \subset A^\times$, l'élement $1+(1+b)^{-1}c$ est inversible. Ainsi $1+a = (1+b)(1+(1+b)^{-1}c)$ est produit de deux éléments inversibles donc est inversible. Nous avons montré que $(1+I+J) \subset A^\times$, donc que $I + J \in \mathscr{I}$.

Soit J la somme de tous les éléments de $\mathscr{I}$. C'est un idéal bilatère de A. Chaque élément a de J appartient à une somme finie $I_1 + \cdots + I_n$ d'idéaux appartenant à $\mathscr{I}$. L'étape précédente prouve que $I_1 + \cdots + I_n \in \mathscr{I}$; par suite l'élément $1 + a$ est inversible. Ainsi $(1 + J) \subset A^\times$, et donc $J \in \mathscr{I}$. Par construction, J est le plus grand élément de $\mathscr{I}$. □

Définition. Le **radical de Jacobson** d'un anneau A est le plus grand des idéaux bilatères I tels que $(1 + I) \subset A^\times$. On le note $J(A)$.

Exemples. Le radical de Jacobson de $\mathbb{Z}$ est réduit à $\{0\}$. Si k est un corps, le radical de Jacobson de l'anneau des polynômes $k[X]$ est réduit à $\{0\}$, mais celui de l'anneau des séries formelles $k[\![X]\!]$ est l'idéal principal (X).

2.1.2 Proposition. *Pour tout anneau A, l'idéal $J(A)$ coïncide avec les trois parties suivantes :*

$$J_1 = \{x \in A \mid \forall a \in A,\ 1 - ax \in A^\times\},$$
$$J_2 = \{x \in A \mid \forall a \in A,\ 1 - xa \in A^\times\},$$
$$J_3 = \{x \in A \mid \forall a \in A,\ 1 - ax \text{ possède un inverse à gauche}\}.$$

Preuve. Soit $x \in J_1$. Pour tout $a \in A$, l'élément $1 - ax$ possède un inverse, disons b. Partant des égalités $b(1 - ax) = (1 - ax)b = 1$, les calculs

$$(1 + xba)(1 - xa) = 1 - x(1 - b + bax)a = 1$$

et

$$(1 - xa)(1 + xba) = 1 - x(1 - b + axb)a = 1$$

prouvent alors que $1 - xa$ est inversible. Par conséquent $x \in J_2$. Nous avons établi l'inclusion $J_1 \subset J_2$, et par symétrie nous obtenons l'égalité $J_1 = J_2$.

Soit x et y deux éléments de J_1. Pour tout $a \in A$, l'élément $1 - ax$ est inversible, d'inverse disons b, et l'élément $1 - bay$ est inversible, d'inverse disons c. On vérifie alors que cb est l'inverse de $1 - a(x + y)$:

$$cb(1 - a(x + y)) = cb((1 - ax) - ayb(1 - ax)) = c(1 - bay)b(1 - ax) = b(1 - ax) = 1$$

et

$$(1 - a(x + y))cb = ((1 - ax) - (1 - ax)bay)cb = (1 - ax)(1 - bay)cb = (1 - ax)b = 1.$$

Ainsi $1-a(x+y)$ est inversible pour chaque $a \in A$, ce qui montre que $x+y \in J_1$. Nous venons de prouver que J_1 est stable par somme. Comme J_1 contient 0 et est stable par passage à l'opposé, c'est un sous-groupe additif de A. Enfin, de la définition de J_1 et J_2 découle directement le fait que J_1 (respectivement, J_2) est stable par multiplication à gauche (respectivement, à droite) par les éléments de A.

Puisque $J_1 = J_2$, nous voyons alors que J_1 est un idéal bilatère de A qui, par définition, vérifie $(1 + J_1) \subset A^\times$: ceci nous donne $J_1 \subset J(A)$, l'inclusion opposée étant banale.

Il reste à démontrer que $J_1 = J_3$. Soit $x \in J_3$. Pour tout $a \in A$, l'élément $1 - ax$ admet un inverse à gauche, disons b. Alors b est égal à $1+bax$, et puisque $x \in J_3$ l'élément $1+bax$ admet un inverse à gauche. Ainsi b possède un inverse à gauche, mais également un inverse à droite, à savoir $1 - ax$. Il est donc inversible, d'inverse $1 - ax$. Par conséquent $1 - ax$ est inversible pour tout $a \in A$, c'est-à-dire $x \in J_1$. Nous avons ainsi établi l'inclusion $J_3 \subset J_1$, et l'inclusion opposée est banale. □

Voyons à présent le lien entre le radical de Jacobson d'un anneau A et les A-modules. Comme dans le paragraphe 1.3, étant donnés un idéal bilatère I de A et un A-module M, on note IM le sous-module de M constitué des éléments $a_1m_1 + \cdots + a_nm_n$, où n est un entier naturel, a_i appartient à I, et m_i appartient à M pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

2.1.3 Théorème (lemme de Nakayama). *Un A-module M de type fini qui vérifie $J(A)M = M$ est nécessairement le module nul.*

Preuve. Raisonnons par l'absurde en supposant que M soit différent du module $\{0\}$. Choisissons une famille finie $(m_1, \ldots, m_n)$ d'éléments engendrant M, avec n minimal. Alors $n \geq 1$. Soit N le sous-module engendré par m_1, ..., m_{n-1}. Par construction, N est un sous-module strict de M, et donc le module quotient $Q = M/N$ n'est pas réduit à $\{0\}$. Ce module Q est engendré par la classe $\overline{m_n}$ de m_n modulo N et vérifie $Q = J(A)Q$. De ce fait, il existe $a \in J(A)$ tel que $\overline{m_n} = a\,\overline{m_n}$. L'inversibilité de $1-a$ entraîne alors que $\overline{m_n} = 0$, ce qui est contradictoire avec le fait que Q soit différent de $\{0\}$. □

Le lemme de Nakayama entraîne que $J(A)$ annule tous les modules simples. En effet, si M est un A-module simple, alors il est de type fini (car engendré par n'importe quel élément non-nul) et n'est pas réduit à $\{0\}$. Le lemme dit alors que le sous-module $J(A)M$ n'est pas M tout entier, et la seule alternative est $J(A)M = \{0\}$.

Un A-module simple S peut donc être regardé comme un $A/J(A)$-module (l'isomorphisme $A \to \operatorname{End}_{\mathbb{Z}}(S)$ se factorise à travers $A/J(A)$). Il y a donc une bjection naturelle entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de A-modules simples et l'ensemble des classes d'isomorphisme de $A/J(A)$-modules simples.

2.1.4 Proposition. *Soit A un anneau et soit M un A-module de type fini. On suppose que l'anneau $A/J(A)$ est semi-simple.*

(i) Le module M est complètement réductible si et seulement si $J(A)M = \{0\}$.

(ii) Le socle et le radical de M sont $\operatorname{soc} M = \{x \in M \mid J(A)x = \{0\}\}$ et $\operatorname{rad} M = J(A)M$.

Preuve. (i) Si M est complètement réductible, alors il est somme directe de A-modules simples, lesquels sont tous annulés par $J(A)$; par suite $J(A)M = \{0\}$. Réciproquement, si $J(A)$ est inclus dans l'annulateur de M, alors M peut être regardé comme un module de type fini sur l'anneau semi-simple $A/J(A)$. Le théorème 1.5.3 entraîne alors que M est complètement réductible en tant que module sur $A/J(A)$, donc en tant que A-module.

(ii) Les inclusions $\operatorname{soc} M \subset \{x \in M \mid J(A)x = \{0\}\}$ et $J(A)M \subset \operatorname{rad} M$ découlent du fait que $J(A)$ annule tous les A-modules simples.

Un sous-module de type fini de M annulé par $J(A)$ est complètement réductible d'après (i), donc est somme directe de sous-modules simples, et donc est inclus dans le socle de M. Appliquant ce résultat au sous-module engendré par un élément x de M annulé par $J(A)$, nous obtenons l'inclusion $\{x \in M \mid J(A)x = \{0\}\} \subset \operatorname{soc} M$.

Le module $M/J(A)M$ est de type fini et annulé par $J(A)$, donc est complètement réductible d'après (i), donc son radical est réduit à $\{0\}$. L'intersection des sous-modules maximaux de M contenant $J(A)M$ est donc égale à $J(A)M$. A fortiori $\operatorname{rad} M \subset J(A)M$. □

Le radical de Jacobson ne se comporte pas bien par passage à un sous-anneau. En revanche, il est compatible avec les constructions faisant intervenir des idempotents, un thème que nous retrouverons dans la section 5.

Exercices.

(1) Soit A un anneau. Montrer qu'un élément x de A est inversible si et seulement si $x + J(A)$ est inversible dans $A/J(A)$.

(2) Prouver que pour tout module M sur un anneau A, on a $J(A)M \subset \operatorname{rad} M$.

(3) Soit p un nombre premier et soit $\mathbb{Z}_{(p)}$ le sous-anneau de $\mathbb{Q}$ formé des fractions dont le dénominateur est premier avec p. Ainsi $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_{(p)} \subset \mathbb{Q}$. Calculer le radical de Jacobson de chacun de ces trois anneaux.

(4) Soit A un anneau, e un idempotent de A et n un entier positif. Prouver que $J(eAe) = eJ(A)e$ et $J(\mathbf{Mat}_n(A)) = \mathbf{Mat}_n(J(A))$.
(Indication : voir le corollaire 5.2.3 plus loin dans le cours.)

2.2 Anneaux locaux

2.2.1 Proposition. *Les conditions suivantes portant sur un anneau A sont équivalentes :*

(i) L'ensemble $A \setminus A^\times$ des éléments non inversibles de A est un idéal bilatère de A.

(ii) L'ensemble des éléments non inversibles de A est le radical de Jacobson $J(A)$.

(iii) Le quotient $A/J(A)$ est un anneau à division.

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (iii) : on observe d'abord que si A vérifie (i), alors $0 \notin A^\times$, d'où $A \neq \{0\}$ et $1 \notin J(A)$; en particulier $A/J(A) \neq \{0\}$. De plus, $I = A \setminus A^\times$ est un idéal bilatère de A par hypothèse, et $1 + I$ est certainement disjoint de I, donc est inclus dans $A^\times$. La définition du radical de Jacobson implique alors que $I \subset J(A)$.

Soit $\overline{x}$ un élément non-nul de $A/J(A)$ et soit x un représentant de $\overline{x}$. Alors x n'appartient pas à $J(A)$, donc pas à I non plus, donc x est inversible, donc $\overline{x}$ est inversible.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) : on observe d'abord que si A vérifie (iii), alors $A/J(A) \neq \{0\}$, ce qui implique que $J(A)$ est disjoint de $A^\times$. Soit maintenant x un élément de $A \setminus J(A)$. Sa classe modulo $J(A)$ est inversible dans $A/J(A)$, d'où un élément $y \in A$ tel que $1 - xy$ et $1 - yx$ appartiennent à $J(A)$. Ceci implique que xy et yx sont inversibles dans A, donc que x admet un inverse à gauche et un inverse à droite, et donc que x est inversible dans A. Des deux inclusions démontrées

$$J(A) \subset A \setminus A^\times \quad \text{et} \quad A \setminus J(A) \subset A^\times,$$

on déduit l'égalité $J(A) = A \setminus A^\times$.

L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) est banale. $\square$

Définition. Un anneau A est dit **local** s'il vérifie les conditions de la proposition 2.2.1.

2.2.2 Proposition. *Un anneau A est local si et seulement si il est différent de $\{0\}$ et si, pour chaque $x \in A$, au moins un des deux éléments x ou $1 - x$ est inversible.*

Preuve. Supposons que A vérifie la condition indiquée. Soit x un élement de $A \setminus J(A)$. La proposition 2.1.2 fournit des éléments a et b de A tels que $1 - ax$ et $1 - xb$ ne soient pas inversibles. Par hypothèse alors, ax et xb sont inversibles, donc x est inversible à gauche et à droite, donc x est inversible. Nous avons prouvé l'inclusion $A \setminus J(A) \subset A^\times$. L'hypothèse $A \neq \{0\}$ fournit l'inclusion opposée, et nous pouvons alors conclure que A est local.

L'autre direction s'obtient en observant que x et $1 - x$ ne peuvent pas appartenir tous les deux à $J(A)$. $\square$

En particulier, un anneau local a exactement deux idempotents, à savoir 0 et 1. (Si e est un idempotent, alors $e(1 - e) = 0$. Un des deux facteurs de ce produit est inversible, donc l'autre est nul.)

Exercice. Soit A une algèbre de dimension finie sur un corps k. Prouver que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) A est local.
(ii) Tout élément de A est soit inversible, soit nilpotent (ou exclusif).
(iii) A possède deux idempotents, à savoir 0 et 1.

(Ce résultat sera généralisé dans la proposition 4.3.3. Indication : l'implication délicate est (iii) $\Rightarrow$ (ii). La sous-algèbre engendrée par un élement x de A est isomorphe à $k[X]/(P)$, où P est le polynôme minimal de x. Si P a deux facteurs irréductibles distincts, alors d'après le lemme chinois $k[X]/(P)$ a des idempotents non triviaux, et (iii) est faux. Sinon, soit P est une puissance de X et dans ce cas x est nilpotent, soit P et X sont premiers entre eux et alors une identité de Bézout montre que x est inversible ; dans les deux cas de figure (ii) est vrai.)

2.3 Nilpotence et semi-simplicité pour les anneaux artiniens

Définition. L'**annulateur** d'un A-module M est le noyau de l'homomorphisme d'anneaux de A dans $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M)$ définissant la structure de A-module.

Rappelons que les sous-modules du module régulier ${}_AA$ sont les idéaux à gauche de l'anneau A.

2.3.1 Proposition. *Soit A un anneau noethérien à gauche. Le radical de Jacobson $J(A)$ coïncide avec les deux ensembles suivants :*

— *le radical* $\mathrm{rad}\,{}_AA$ *du module à gauche régulier, c'est-à-dire l'intersection de tous les idéaux à gauche maximaux de A ;*

— *l'intersection des idéaux annulateurs des A-modules simples.*

Preuve. Soit $z \in A$. Si $z \in J(A)$, alors z annule tous les A-modules simples, en particulier tous les A-modules de la forme ${}_AA/\mathfrak{m}$ avec $\mathfrak{m}$ idéal à gauche maximal. En particulier z envoie l'élément $1+\mathfrak{m}$ de ${}_AA/\mathfrak{m}$ sur zéro, c'est-à-dire $z \in \mathfrak{m}$. Nous voyons ainsi que z appartient à tous les idéaux à gauche maximaux, autrement dit que $z \in \mathrm{rad}\,{}_AA$. Inversement si $z \notin J(A)$, alors il existe $a \in A$ tel que $1 - az$ n'est pas inversible à gauche (proposition 2.1.2). L'idéal à gauche $A(1-az)$ est alors propre. Comme A est supposé noethérien à gauche, il existe un idéal à gauche maximal $\mathfrak{m}$ contenant $A(1-az)$. Alors $z \notin \mathfrak{m}$, et donc $z \notin \mathrm{rad}\,{}_AA$. Ces raisonnements prouvent l'égalité $J(A) = \mathrm{rad}\,{}_AA$.

Si $\mathfrak{m}$ est un idéal à gauche maximal de A, alors le quotient ${}_AA/\mathfrak{m}$ est un A-module simple et l'annulateur de ${}_AA/\mathfrak{m}$ est inclus dans $\mathfrak{m}$. L'intersection $\mathfrak{r}$ des annulateurs de tous les A-modules simples est donc incluse dans chacun de ces idéaux $\mathfrak{m}$, donc est incluse dans leur intersection $\mathrm{rad}\,{}_AA$. Réciproquement, soit S un A-module simple. Pour chaque élément non-nul x de S, l'action $a \mapsto ax$ définit un homomorphisme surjectif du module régulier ${}_AA$ sur S, et le noyau $\mathfrak{m}_x$ de cet homomorphisme est un sous-module maximal de ${}_AA$. L'annulateur de S est l'intersection pour $x \in S \setminus \{0\}$ de ces $\mathfrak{m}_x$; il contient donc $\mathrm{rad}\,{}_AA$. Ceci étant valable pour tout A-module simple S, il vient $\mathfrak{r} \supset \mathrm{rad}\,{}_AA$. Ainsi $\mathfrak{r} = \mathrm{rad}\,{}_AA$. □

Remarques.

(1) Dans l'énoncé de la proposition 2.3.1, on peut omettre l'hypothèse que A est noethérien à gauche, mais la démonstration requiert alors l'axiome du choix.

(2) La définition de $J(A)$ entraîne que $J(A^{\mathrm{op}}) = J(A)$. Il suit alors de la proposition 2.3.1 que les modules réguliers à gauche ${}_AA$ et à droite A_A ont même radical. En revanche, leurs socles peuvent être différents.

Définition.

(1) Le produit de deux idéaux bilatères I et J d'un anneau est défini par

$$IJ = \{a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \mid n \geq 0,\ a_i \in I,\ b_i \in J\}.$$

(2) Un idéal bilatère I d'un anneau est dit nilpotent s'il existe $n \geq 1$ tel que $I^n = \{0\}$.

2.3.2 Théorème. *Soit A un anneau. On suppose que A est artinien et noethérien à gauche.*

(i) Le radical de Jacobson $J(A)$ est un idéal nilpotent de A.

(ii) L'anneau quotient $A/J(A)$ est semi-simple.

Preuve. (i) La suite d'idéaux $(J(A)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, donc stationne à partir d'un certain rang puisque A est supposé artinien à gauche. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $J(A)J(A)^n = J(A)^n$. Comme A est supposé noethérien à gauche, $J(A)^n$ est un sous-module de type fini du module régulier ${}_AA$. Le lemme de Nakayama entraîne alors que $J(A)^n = \{0\}$.

(ii) L'application quotient $p : {}_AA \to A/J(A)$ définit une bijection entre l'ensemble des sous-modules maximaux de $A/J(A)$ et l'ensemble des sous-modules maximaux de ${}_AA$ (nous utilisons ici qu'un sous-module maximal de ${}_AA$ contient nécessairement $\operatorname{rad}{}_AA = J(A)$). Le radical du A-module $A/J(A)$ est ainsi déterminé par

$$p^{-1}\big(\operatorname{rad}(A/J(A))\big) = \bigcap_{\substack{M\subset A/J(A)\\ M \text{ maximal}}} p^{-1}(M) = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \text{ idéal à gauche}\\ \text{maximal de } A}} \mathfrak{m} = J(A)$$

(la dernière égalité provient de la proposition 2.3.1). Par suite le radical du A-module $A/J(A)$ est réduit à zéro. Ce module étant artinien en tant que quotient du module régulier ${}_AA$, il est complètement réductible (théorème 1.4.3). Ainsi le $A/J(A)$-module régulier à gauche est complètement réductible. □

Bien sûr, le même résultat vaut si l'anneau A est supposé artinien et noethérien à droite. Il est ici amusant de noter qu'il existe des anneaux artiniens et noethériens à gauche mais pas à droite. On peut également démontrer qu'un anneau artinien à gauche est nécessairement noethérien à gauche (théorème de Hopkins–Levitski), mais les preuves classiques font appel à l'axiome du choix.

Conséquences.

(1) Si A est un anneau artinien et noethérien à gauche, alors $J(A)$ est le plus grand idéal bilatère nilpotent de A. (Si I est un idéal bilatère nilpotent, alors I est formé d'éléments nilpotents, donc $1 + I \subset A^\times$, et donc $I \subset J(A)$.)

(2) Un anneau est semi-simple si et seulement si il est artinien et noethérien à gauche et si son radical de Jacobson est trivial.

Le théorème 2.3.2 est un cas particulier du théorème suivant, que nous démontrerons dans le paragraphe 5.3 (prendre pour M le module régulier ${}_AA$).

2.3.3 Théorème. *Soit M un module artinien et noethérien sur un anneau A. Notons B l'anneau des endomorphismes de M. Alors $J(B)$ est un idéal nilpotent de B et l'anneau quotient $B/J(B)$ est semi-simple.*

Exercice. Prouver qu'un anneau artinien et noethérien à gauche n'a qu'un nombre fini de modules simples, à isomorphisme près. Cette propriété est-elle encore vraie pour un anneau supposé seulement noethérien ?

3 Modules de longueur finie

Lorsque A est une algèbre sur un corps k, les A-modules sont nécessairement des k-espaces vectoriels, et il est fréquent qu'on ne s'intéresse qu'à ceux qui sont de dimension finie sur k. La définition suivante généralise ce cadre.

Définition. Un A-module est dit **de longueur finie** s'il est noethérien et artinien.

Les A-modules de longueur finie forment une sous-catégorie de Serre de la catégorie des A-modules ; en particulier cette catégorie est abélienne.

3.1 Théorème de Jordan–Hölder

Définition.

(1) Un **filtration croissante** d'un module M est une suite croissante $(M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de sous-modules de M ; on demande généralement que $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} M_n = M$ (la filtration est **exhaustive**) et que $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} M_n = \{0\}$ (la filtration est **séparante**). On demande parfois que la suite soit en fait finie.

(2) Les **facteurs** ou **sous-quotients** d'une filtration (M_n) sont les quotients successifs M_{n+1}/M_n.

(3) Une filtration (M_n) de M **raffine** une filtration (N_n) s'il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $N_n = M_{\varphi(n)}$ pour chaque $n \in \mathbb{Z}$.

(4) Une **série de composition** d'un module M est une filtration finie dont tous les quotients sont simples (en particulier, non-nuls ; c'est la définition traditionnelle).

3.1.1 Lemme du papillon. *Soit* $0 \subset M' \subset M \subset L$ *et* $0 \subset N' \subset N \subset L$ *deux filtrations de longueur* 3 *d'un module* L*. Alors*

$$\frac{(M \cap N) + M'}{(M \cap N') + M'} \cong \frac{M \cap N}{(M \cap N') + (M' \cap N)} \cong \frac{(M \cap N) + N'}{(M' \cap N) + N'}.$$

Preuve. La restriction à $M \cap N$ de la surjection canonique $M \to M/((M \cap N') + M')$ a pour noyau $(M \cap N') + (M' \cap N)$ et a pour image $((M \cap N) + M')/((M \cap N') + M')$. Le premier isomorphisme s'en déduit par factorisation. La preuve du second est analogue. □

3.1.2 Théorème de raffinement de Schreier. *On peut toujours raffiner deux filtrations finies d'un module de façon à avoir la même suite de facteurs, à permutation et isomorphisme près.*

Preuve. Soient $(M_s)_{0\leq s\leq m}$ et $(N_t)_{0\leq t\leq n}$ deux filtrations finies d'un même module M. Pour $(s,t) \in [\![0,m]\!] \times [\![0,n]\!]$, posons

$$M_{s,t} = (M_s \cap N_t) + M_{s-1} \quad \text{et} \quad N_{t,s} = (M_s \cap N_t) + N_{t-1}.$$

À s fixé, lorsque t croît de 0 à n, le sous-module $M_{s,t}$ croît de M_{s-1} à M_s. Ainsi

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
0 & = & M_{1,0} & \subseteq & M_{1,1} & \subseteq & M_{1,2} & \subseteq & \cdots & \subseteq M_{1,n-1} & \subseteq & M_{1,n} & = & & \\
 & & M_{2,0} & \subseteq & M_{2,1} & \subseteq & M_{2,2} & \subseteq & \cdots & \subseteq M_{2,n-1} & \subseteq & M_{2,n} & = & & \\
 & & M_{3,0} & \subseteq & M_{3,1} & \subseteq & M_{3,2} & \subseteq & \cdots & & & & & & \\
 & & & & & & & & & \cdots & \subseteq & M_{m-1,n} & = & & \\
 & & M_{m,0} & \subseteq & M_{m,1} & \subseteq & M_{m,2} & \subseteq & \cdots & \subseteq M_{m,n-1} & \subseteq & M_{m,n} & = & M &
\end{array}$$

est un filtration de M qui raffine

$$0 \quad = \quad M_0 \quad \subseteq \quad M_1 \quad \subseteq \quad M_2 \quad \subseteq \quad \cdots \quad \subseteq \quad M_{m-1} \quad \subseteq \quad M_m \quad = \quad M.$$

De même, les $N_{t,s}$, convenablement ordonnés, sont les termes d'une filtration de M qui raffine $(N_t)_{0\leq t\leq n}$.

Le lemme du papillon dit que $M_{s,t}/M_{s,t-1} \cong N_{t,s}/N_{t,s-1}$ pour tous entiers strictement positifs s et t. Les facteurs de nos deux filtrations sont donc identiques à permutation et isomorphisme près. □

3.1.3 Théorème de Jordan–Hölder. *Soit M un A-module artinien et noethérien. Alors M admet une série de composition. Deux séries de composition de M ont même suite de facteurs, à permutation et isomorphisme près.*

Preuve. Soit $\mathscr{M}$ l'ensemble des sous-modules de M possédant une série de composition. Certainement $\{0\}$ appartient à M, donc $\mathscr{M} \neq \varnothing$. Comme M est noethérien, $\mathscr{M}$ possède un élément maximal, disons N. Supposons $N \subsetneq M$; alors l'ensemble $\mathscr{N}$ des sous-modules de M contenant strictement N est non-vide. Comme M est artinien, nous pouvons trouver un élément minimal L dans $\mathscr{N}$. Alors L/N est simple, et ajouter L au bout d'une série de composition de N donne une série de composition de L : cela contredit le choix de N. La supposition $N \subsetneq M$ était donc incorrecte, et finalement $M \in \mathscr{M}$. Cela démontre la première des deux affirmations de l'énoncé, et la second est conséquence du théorème de Schreier. □

Exemple. Soit k un corps algébriquement clos. Un $k[X]$-module artinien et noethérien M est la donnée d'un k-espace vectoriel E de dimension finie munie d'un endomorphisme u. Un tel module est simple si et seulement si E est de dimension 1 ; u agit alors par un scalaire qui détermine la classe d'isomorphisme de M. Plus généralement, une série de composition de M est la donnée d'un drapeau complet

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n = E$$

formé de sous-espaces stables par u. Dans une base adaptée, la matrice de u est triangulaire, et la suite des coefficients diagonaux de cette matrice indique la suite des classes d'isomorphisme des $k[X]$-modules $(E_{i+1}/E_i, u_i)$, où u_i est l'endomorphisme induit par u sur E_{i+1}/E_i. A permutation près, cette suite ne dépend pas du choix du drapeau — ce sont les valeurs propres de u, répétées selon leurs multiplicités algébriques.

Notation. Soit M un A-module artinien et noethérien.

(1) La **longueur** $\ell(M)$ de M est le nombre de facteurs d'une série de composition de M. Ce nombre est nécessairement fini, ce qui justifie la terminologie « module de longueur finie » pour les modules artiniens et noethériens.

(2) Pour tout A-module simple S, le nombre de facteurs isomorphes à S dans une série de composition de M est la **multiplicité de Jordan–Hölder** de S dans M ; on désigne cet entier par la notation $(M : S)$.

3.2 Groupe de Grothendieck

3.2.1 Proposition. *Soit* $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ *une suite exacte courte de A-modules de longueur finie. Alors* $\ell(M) = \ell(L) + \ell(N)$ *et* $(M : S) = (L : S) + (N : S)$ *pour tout A-module simple S.*

Preuve. À partir de séries de composition

$$\{0\} = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_{\ell(L)} = L \quad \text{et} \quad \{0\} = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_{\ell(N)} = N$$

de L et N, on construit la série de composition

$$\{0\} = f(L_0) \subset f(L_1) \subset \cdots \subset f(L_{\ell(L)-1}) \subset \operatorname{im} f \subset g^{-1}(N_1) \subset \cdots \subset g^{-1}(N_{\ell(N)}) = M$$

de M. Elle est manifestement de longueur $\ell(L)+\ell(N)$ et l'ensemble de ses facteurs est l'union (au sens des multi-ensembles, c'est-à-dire avec multiplicités) des ensembles des facteurs des séries de composition de L et N. □

Soit $\mathscr{I}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de A-modules de longueur finie et $\mathbb{Z}^{(\mathscr{I})}$ le groupe abélien libre de base $\mathscr{I}$. À la classe d'isomorphisme d'un A-module M de longueur finie correspond donc un élément (M) de la base de $\mathbb{Z}^{(\mathscr{I})}$, et les éléments de $\mathbb{Z}^{(\mathscr{I})}$ sont les combinaisons $\mathbb{Z}$-linéaires de ces symboles.

Définition. Le **groupe de Grothendieck** $G_0(A)$ est le quotient de $\mathbb{Z}^{(\mathscr{I})}$ par le sous-groupe engendré par les éléments $(M) - (L) - (N)$, pour toutes les suites exactes courtes $0 \to L \to M \to N \to 0$. On note $[M]$ l'image de (M) dans $G_0(A)$.

Il suit alors de la proposition 3.2.1 que la longueur $\ell(M)$ et la multiplicité de Jordan–Hölder $(M : S)$ ne dépendent que de l'élément $[M]$ dans $G_0(A)$, et que les règles $[M] \mapsto \ell(M)$ et $[M] \mapsto (M : S)$ définissent des homomorphismes de groupes de $G_0(A)$ dans $\mathbb{Z}$. Autre observation : la suite exacte courte $0 \to \{0\} \to \{0\} \to \{0\} \to 0$ impose la relation $[\{0\}] = 0$ dans $G_0(A)$.

Nous noterons $\mathscr{S} \subset \mathscr{I}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de A-modules simples.

3.2.2 Proposition. *La règle $[M] \mapsto ((M : S))_{S\in\mathscr{S}}$ définit un isomorphisme de groupes de $G_0(A)$ sur $\mathbb{Z}^{(\mathscr{S})}$.*

Preuve. Soit $d : G_0(A) \to \mathbb{Z}^{(\mathscr{S})}$ l'homomorphisme de groupes définie par la règle donnée dans l'énoncé de la proposition. Soit $i : \mathbb{Z}^{(\mathscr{S})} \to \mathbb{Z}^{(\mathscr{I})}$ l'homomorphisme de groupes abéliens induit par l'inclusion $\mathscr{S} \subset \mathscr{I}$ — ainsi i envoie un vecteur de base sur un vecteur de base. Si S et T sont deux (classes d'isomorphisme de) A-modules simples, alors $(T : S)$ vaut 1 ou 0 selon que S et T sont isomorphes ou non. Traçant les définitions, ce fait se traduit par la relation $d \circ p \circ i = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}^{(\mathscr{S})}}$ dans le triangle

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^{(\mathscr{I})} \arrow[rr, "p"] & & G_0(A) \arrow[dl, "d"] \\ & \mathbb{Z}^{(\mathscr{S})} \arrow[ul, "i"] & \end{tikzcd}$$

La proposition sera ainsi démontrée dès que nous aurons établi la surjectivité de $p \circ i$.

Les éléments de la forme $[M]$ engendrent le groupe abélien $G_0(A)$. Prouvons par récurrence sur la longueur de M que $[M] \in \mathrm{im}(p \circ i)$. Si M est de longueur 0, alors $M = \{0\}$, et donc $[M] = 0$; par conséquent $[M]$ appartient bien à $\mathrm{im}(p \circ i)$ dans ce cas. Si M est de longueur 1, alors il est simple, donc $(M) \in \mathrm{im}\, i$; par conséquent $[M] \in \mathrm{im}(p \circ i)$ dans ce cas également. Enfin si M est de longueur supérieure ou égale à 2, alors on peut construire une suite exacte courte $0 \to L \to M \to N \to 0$ avec L et N non-nuls. Certainement $\ell(L)$ et $\ell(N)$ sont tous deux strictement inférieurs à $\ell(M)$, de sorte qu'on peut supposer connu par récurrence que $[L]$ et $[N]$ appartiennent tous deux à l'image de $p \circ i$. Par conséquent $[M] = [L] + [N]$ appartient aussi à $\mathrm{im}(p \circ i)$. □

3.2.3 Corollaire. *Le $\mathbb{Z}$-module $G_0(A)$ est libre et $\{[S] \mid S \in \mathscr{S}\}$ en est une base.*

Exercice. Soit A un anneau. Dans cet exercice, tous les modules considérés sont des A-modules de longueur finie. Justifier les égalités suivantes dans le groupe $G_0(A)$:

(i) Si M et N sont deux modules, alors $[M \oplus N] = [M] + [N]$.
(ii) Si N est un sous-module d'un module M, alors $[M] = [N] + [M/N]$.
(iii) Si M et N sont deux sous-modules d'un module, alors $[M+N]+[M\cap N] = [M]+[N]$.
(iv) Si $0 \to M_0 \to M_1 \to \cdots \to M_n \to 0$ est une suite exacte de modules , alors $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i[M_i] = 0$.
(v) Si $f : M \to N$ est un homomorphisme de modules, alors $[\ker f] - [\operatorname{coker} f] = [M] - [N]$.

3.3 Théorème de Krull–Schmidt–Azumaya

L'objectif de ce paragraphe est de prouver les deux résultats ci-dessous :

3.3.1 Proposition. *L'anneau des endomorphismes d'un module indécomposable de longueur finie est local.*

3.3.2 Théorème de Krull–Schmidt–Azumaya. *Soit M un A-module de longueur finie. Soit $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_m = N_1 \oplus \cdots \oplus N_n$ deux décompositions de M en somme directe de sous-modules indécomposables. Alors $m = n$ et il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $M_i \cong N_{\sigma(i)}$ et*

$$M = N_{\sigma(1)} \oplus \cdots \oplus N_{\sigma(i)} \oplus M_{i+1} \oplus \cdots \oplus M_n$$

pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$.

On sait qu'un anneau local n'a que deux idempotents : 0 et 1. Par conséquent, un module dont l'anneau des endomorphismes est local est indécomposable. La proposition 3.3.1 est une réciproque partielle de ce fait. L'exemple du $\mathbb{Z}$-module régulier, indécomposable mais dont l'anneau des endomorphismes n'est pas local, illustre l'importance d'ajouter l'hypothèse « de longueur finie ». La preuve commence par l'énoncé classique suivant, que nous réutiliserons dans les sections 4.2 et 5.3.

3.3.3 Lemme de Fitting. *Soit M un A-module de longueur finie, soit $f \in \operatorname{End}_A(M)$. Alors il existe une décomposition $M = M_0 \oplus M_1$ avec M_0, M_1 sous-modules stables par f tels que $f|_{M_0}$ est nilpotent et $f|_{M_1} \in \operatorname{Aut}_A(M_1)$.*

Preuve. La suite des noyaux itérés $(\ker f^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est croissante, donc stationne à partir d'un certain rang ; soit M_0 sa limite. La suite des images itérées $(\operatorname{im} f^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est décroissante, donc stationne à partir d'un certain rang ; soit M_1 sa limite. Ainsi il existe $n \geq 0$ tel que $M_0 = \ker f^n = \ker f^{2n}$ et $M_1 = \operatorname{im} f^n = \operatorname{im} f^{2n}$. Certainement M_0 et M_1 sont stables par f. C'est alors un jeu classique que de prouver $M = M_0 \oplus M_1$. Enfin $f|_{M_0}$ est nilpotent et $f|_{M_1}$ est un automorphisme, ce dernier point découlant de

$$\operatorname{im} f|_{M_1} = f(\operatorname{im} f^n) = \operatorname{im} f^{n+1} = M_1 \quad \text{et} \quad \ker f|_{M_1} \subset (\ker f^n) \cap M_1 = M_0 \cap M_1 = \{0\}.$$

□

Preuve de la proposition 3.3.1. Soit M un A-module indécomposable. Comme $M \neq \{0\}$, l'anneau $\operatorname{End}_A(M)$ n'est pas l'anneau nul. Le lemme de Fitting dit qu'un endomorphisme f de M est inversible ou nilpotent ; donc soit f est inversible, soit $1 - f$ l'est. L'anneau $\operatorname{End}_A(M)$ vérifie ainsi le critère de la proposition 2.2.2. □

3.3.4 Lemme. *Soit $M = M' \oplus M'' = N_1 \oplus \cdots \oplus N_n$ avec $\operatorname{End}_A(M')$ local et N_1, ..., N_n indécomposables. Alors il existe $s \in [\![1, n]\!]$ tel que $M' \cong N_s$ et $M = N_s \oplus M''$.*

Preuve. Pour $t \in [\![1, n]\!]$, notons $i_t : N_t \to M$ et $p_t : M \to N_t$ les inclusions et projections données par la somme directe $M = N_1 \oplus \cdots \oplus N_n$. Notons $\varphi' : M' \to M$, $\varphi'' : M'' \to M$, $\psi' : M \to M'$ et $\psi'' : M \to M''$ les inclusions et projections données par la somme directe $M = M' \oplus M''$. Alors

$$\operatorname{id}_{M'} = \psi' \circ \operatorname{id}_M \circ \varphi' = \sum_{t=1}^{n} \psi' \circ i_t \circ p_t \circ \varphi'.$$

Comme $\operatorname{End}_A(M')$ est local, il existe $s \in [\![1, n]\!]$ tel que $(\psi' \circ i_s) \circ (p_s \circ \varphi')$ soit inversible. Avec le vocabulaire du paragraphe 1.6, $p_s \circ \varphi'$ est un monomorphisme scindé et $\psi' \circ i_s$ est un épimorphisme scindé. L'indécomposabilité de N_s entraîne que $p_s \circ \varphi'$ et $\psi' \circ i_s$ sont des isomorphismes.

Notons $\chi \in \operatorname{Aut}_A(M')$ l'inverse de $(\psi' \circ i_s) \circ (p_s \circ \varphi')$. Ainsi $\chi \circ \psi' \circ i_s : N_s \to M'$ est un isomorphisme dont l'inverse est $p_s \circ \varphi'$, et l'on a

$$(\psi' \circ i_s) \circ (p_s \circ \varphi') \circ \chi = \mathrm{id}_{M'} \quad \text{et} \quad (p_s \circ \varphi') \circ (\chi \circ \psi' \circ i_s) = \mathrm{id}_{N_s}.$$

Définissons $\widetilde{p}_s : M \to N_s$ et $\widetilde{\psi}'' : M \to M''$ par

$$\widetilde{p}_s = (p_s \circ \varphi') \circ \chi \circ \psi' \quad \text{et} \quad \widetilde{\psi}'' = \psi'' \circ (\mathrm{id}_M - i_s \circ \widetilde{p}_s).$$

Alors $\widetilde{p}_s \circ i_s = \mathrm{id}_{N_s}$ et $(\psi' \circ i_s) \circ \widetilde{p}_s = \psi'$, et on vérifie que

$$\begin{pmatrix} \widetilde{p}_s \\ \widetilde{\psi}'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_s & \varphi'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{N_s} & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{M''} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} i_s & \varphi'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{p}_s \\ \widetilde{\psi}'' \end{pmatrix} = (\mathrm{id}_M).$$

Ceci montre que M est la somme directe de ses sous-modules $(\operatorname{im} i_s) = N_s$ et $(\operatorname{im} \varphi'') = M''$, les homomorphismes $\widetilde{p}_s$ et $\widetilde{\psi}''$ étant les projections associées à cette décomposition. □

Preuve du théorème 3.3.2. On construit par récurrence sur $\ell \in [\![0, n]\!]$ une application injective $\sigma : [\![1, \ell]\!] \to [\![1, n]\!]$ telle que pour chaque $i \in [\![1, \ell]\!]$, on ait $M_i \cong N_{\sigma(i)}$ et

$$M = N_{\sigma(1)} \oplus \cdots \oplus N_{\sigma(i)} \oplus M_{i+1} \oplus \cdots \oplus M_m.$$

L'initialisation $\ell = 0$ est banale. Prenons $\ell \in [\![1, m]\!]$ et supposons $\sigma(1)$, ..., $\sigma(\ell - 1)$ construits. On applique le lemme 3.3.4 aux décompositions

$$M = M_\ell \oplus (N_{\sigma(1)} \oplus \cdots \oplus N_{\sigma(\ell-1)} \oplus M_{\ell+1} \oplus \cdots \oplus M_n) = N_1 \oplus \cdots \oplus N_n$$

en observant que $\operatorname{End}_A(M_\ell)$ est local d'après le lemme de Fitting. Cela nous donne $s \in [\![1, n]\!]$ tel que $M_\ell \cong N_s$ et

$$M = N_s \oplus ((N_{\sigma(1)} \oplus \cdots \oplus N_{\sigma(\ell-1)} \oplus M_{\ell+1} \oplus \cdots \oplus M_n).$$

Manifestement $s \notin \{\sigma(1), \ldots, \sigma(\ell - 1)\}$ (sinon la dernière somme ne serait pas directe) et il suffit de poser $\sigma(\ell) = s$ pour conclure le pas de récurrence. □

Remarque. Le théorème de Krull–Schmidt–Azumaya affirme qu'un A-module M de longueur finie est caractérisé à isomorphisme près par les multiplicités apparaissant dans une décomposition de M en somme directe d'indécomposables. Pour classifier les classes d'isomorphisme de A-modules de longueur finie, il suffit donc de classifier les classes d'isomorphisme de A-modules indécomposables. Mais ce dernier problème s'avère généralement formidable : alors que les A-modules simples sont, à isomorphisme près, les quotients du A-module régulier par un idéal à gauche maximal, il arrive fréquemment que les A-modules indécomposables soient beaucoup plus gros que A. Par exemple, si k est un corps et si (x, y) désigne l'idéal engendré par x et y dans l'anneau de polynômes $k[x, y]$, alors $A = k[x, y]/(x, y)^2$ est une k-algèbre de dimension 3, et le quotient $(x, y)^n/(x, y)^{n+2}$, qui est de façon naturelle un A-module indécomposable, est de dimension $2n + 3$.

Exercice.

(i) Soient I et J deux idéaux à gauche d'un anneau A tels que $I + J = A$. Démontrer que $I \oplus J \cong A \oplus (I \cap J)$ en tant que A-modules à gauche.

(ii) Soit $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Soit I (respectivement, J) l'idéal engendré par $\{3, 2 + \sqrt{-5}\}$ (respectivement, $\{3, 2 - \sqrt{-5}\}$). Vérifier que $I + J = A$, que $I \neq A$ et $J \neq A$, et prouver que ni I, ni J n'est principal.
(Indication : pour vérifier que $I \neq A$ et $J \neq A$, on pourra observer que $IJ = (3)$. Pour montrer que I n'est pas principal, on pourra procéder par l'absurde et utiliser l'application norme $N : A \to \mathbb{Z}$ définie par $N(a + b\sqrt{-5}) = a^2 + 5b^2$.)

(iii) On se place dans le cadre de la question précédente. Justifier que I, J et $I \cap J$ sont des A-modules indécomposables. Qu'en déduire sur la nécessité des hypothèses du théorème de Krull-Schmidt ?

3.4 Filtrations par les socles et les radicaux

Les résultats présentés dans les sections 3.1 et 3.3 permettent d'associer des multiplicités à chaque A-module M (soit de modules simples apparaissant comme facteurs dans une série de composition, soit de modules indécomposables apparaissant dans une décomposition de Krull–Schmidt–Azumaya), mais les décompositions de M ne sont pas uniques. Du reste, un espace vectoriel (sauf s'il est de dimension 0 ou 1) peut s'écrire de plusieurs façons comme somme directe de droites et possède plusieurs drapeaux complets.

Il est toutefois possible de définir des filtrations canoniques sur un module. Nous en verrons de deux types : dans ce paragraphe, nous imposerons aux sous-quotients d'être complètement réductibles ; dans le suivant, nous demanderons qu'ils soient semi-stables.

Tout module de longueur finie admet une filtration dont les sous-quotients sont complètement réductibles : il suffit de prendre une série de composition. Cela justifie la définition suivante.

Définition. On appelle **longueur de Loewy** d'un module M de longueur finie la longueur minimale d'une filtration de M dont tous les facteurs sont complètement réductibles.

Soit M un module sur un anneau. On définit la suite des socles itérés $(\operatorname{soc}_i M)_{i\in\mathbb{N}}$ et la suite des radicaux itérés $(\operatorname{rad}_i M)_{i\in\mathbb{N}}$ par récurrence de la façon suivante :

$$\operatorname{soc}_0 M = \{0\}, \qquad (\operatorname{soc}_{i+1} M)/(\operatorname{soc}_i M) = \operatorname{soc}(M/(\operatorname{soc}_i M)),$$
$$\operatorname{rad}_0 M = M, \qquad \operatorname{rad}_{i+1} M = \operatorname{rad}(\operatorname{rad}_i M).$$

(La seconde formule ci-dessus définit $\operatorname{soc}_{i+1} M$ comme la préimage du socle de $M/(\operatorname{soc}_i M)$ par l'application quotient $M \to M/(\operatorname{soc}_i M)$.)

3.4.1 Proposition. *Soit M un module de longueur finie. Alors les facteurs*

$$(\operatorname{soc}_i M)/(\operatorname{soc}_{i-1} M) \quad \textit{et} \quad (\operatorname{rad}_i M)/(\operatorname{rad}_{i+1} M)$$

de ces deux filtrations sont des modules complètement réductibles. Si ℓ est la longueur de Loewy de M, alors $\operatorname{soc}_\ell M = M$ et $\operatorname{rad}_\ell M = \{0\}$.

Preuve. La première affirmation provient du fait que $(\operatorname{soc}_i M)/(\operatorname{soc}_{i-1} M)$, respectivement $(\operatorname{rad}_i M)/(\operatorname{rad}_{i+1} M)$, est le socle, respectivement la tête, d'un module de longueur finie. Pour la seconde affirmation, considérons une filtration

$$\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{\ell-1} \subset M_\ell = M$$

dont tous les facteurs sont complètement réductibles.

Établissons par récurrence que $M_i \subset \operatorname{soc}_i M$ pour chaque $i[\![0,\ell]\!]$. Cette propriété est certainement vraie pour $i = 0$. Supposons-la vraie pour i et prouvons-la pour $i+1$. Notant $p : M \to M/(\operatorname{soc}_i M)$ l'application quotient, nous avons $p(M_i) = \{0\}$ par hypothèse de récurrence, donc $p(M_{i+1})$ est isomorphe à un quotient du module complètement réductible M_{i+1}/M_i, donc est complètement réductible, et est donc inclus dans le socle de $M/(\operatorname{soc}_i M)$. Le sous-module M_{i+1} est donc inclus dans la préimage par p de ce socle, à savoir $\operatorname{soc}_{i+1} M$.

De façon analogue, nous établissons que $\operatorname{rad}_i M \subset M_{\ell-i}$. En conclusion, $\operatorname{soc}_\ell M = M$ et $\operatorname{rad}_\ell M = \{0\}$. □

3.5 Polytopes et filtrations de Harder–Narasimhan

Les travaux de Harder et Narasimhan concernaient l'étude géométrique des fibrés vectoriels sur une courbe, et notamment la construction de leurs espaces de modules. C'est dans ce cadre qu'ils ont énoncé et démontré le théorème 3.5.3. Notre exposé ne suit pas la présentation classique.

Nous nous donnons un anneau A. Nous utilisons les concepts, notations et résultats du paragraphe 3.2, notamment le corollaire 3.2.3.

Notations et définition.

(1) Pour un A-module M de longueur finie, nous notons $\mathscr{G}(M)$ l'ensemble des symboles $[N]$ pour N sous-module de M. C'est une partie finie de $G_0(A)$. (Les éléments de $\mathscr{G}(M)$ sont en effet de la forme $\sum_{S\in\mathscr{S}} a_S[S]$ avec a_S entier positif majoré par $(M : S)$, ce qui ne laisse qu'un nombre fini de possibilités.)

(2) On pose $G_0(A)_\mathbb{R} = G_0(A) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$. C'est un espace vectoriel réel qui admet $([S] \otimes 1)_{S\in\mathscr{S}}$ pour base. On regarde $G_0(A)$ comme un réseau de cet espace vectoriel ; si M est un A-module, on note donc simplement $[M]$ l'élément $[M] \otimes 1$.

(3) Un **paramètre de stabilité** est un élément de l'espace vectoriel dual $G_0(A)^*_\mathbb{R}$.

(4) Le polytope de Harder–Narasimhan [5] d'un A-module M de longueur finie est l'enveloppe convexe de $\mathscr{G}(M)$ dans $G_0(A)_\mathbb{R}$.

L'étude de ces polytopes et de leurs éventails normaux fait l'objet de recherches contemporaines, notamment en lien avec le τ-basculement. Nous n'exposerons cependant que la partie classique de la théorie.

5. La terminologie est récente et n'est pas très répandue.

3.5.1 Proposition. *Soit θ un paramètre de stabilité et soit M un A-module. Soit m la valeur maximum de θ sur $\mathscr{G}(M)$. Alors l'ensemble des sous-modules N de M vérifiant $\theta([N]) = m$ possède un plus petit et un plus grand élément (pour l'inclusion).*

Preuve. Soit $\mathscr{T}$ la classe des A-modules X de longueur finie dont tous les sous-modules Y autres que X vérifient $\theta([X/Y]) > 0$. Soit $\mathscr{F}$ la classe des A-modules X de longueur finie dont tous les sous-modules Y vérifient $\theta([Y]) \leq 0$.

Comme M est noethérien, l'ensemble des sous-modules de M appartenant à la classe $\mathscr{T}$ possède un élément maximal, disons T. Prouvons en raisonnant par l'absurde que M/T est dans la classe $\mathscr{F}$.

Supposons qu'il existe un sous-module Y de M/T tel que $\theta([Y]) > 0$. Parmi tous les sous-modules possibles, choisissons en un minimal, ce qui est possible puisque le module M/T est artinien. Ce sous-module Y est non-nul et s'écrit sous la forme U/T, avec U sous-module de M contenant strictement T. La condition de maximalité imposée à T fait que le sous-module U n'est pas dans la classe $\mathscr{T}$. Donc U contient un sous-module Z, autre que U lui-même, et tel que $\theta([U/Z]) \leq 0$. Alors $(T + Z)/T$ est un sous-module de M/T inclus dans Y, et la condition de minimalité imposée à Y entraîne que $\theta([(T + Z)/T]) \leq 0$ ou $(T + Z)/T = Y$. La relation de Grassmann $[T \cap Z] + [T + Z] = [T] + [Z]$ dans $G_0(A)$ conduit à

$$[Y] + [T/(T \cap Z)] = [U/Z] + [(T + Z)/T]. \qquad (*)$$

Puisque T est dans la classe $\mathscr{T}$, la forme linéaire θ prend une valeur positive sur $[T/(T \cap Z)]$, donc une valeur strictement positive sur le membre de gauche de $(*)$. Il n'est donc pas possible que $\theta([(T + Z)/T])$ soit négatif. Par conséquent, $(T + Z)/T = Y$, c'est-à-dire $U = T + Z$. La relation $(*)$ se simplifie en $[T/(T \cap Z)] = [U/Z]$. Comme $\theta([U/Z]) \leq 0$, le fait que T soit dans la classe $\mathscr{T}$ force le quotient $T/(T \cap Z)$ à être trivial. Nous avons donc $T \subset Z$, et par conséquent $U = Z$. Nous aboutissons à une contradiction. Ainsi M/T est bien dans la classe $\mathscr{F}$.

Soit maintenant N un sous-module de M. Puisque M/T appartient à la classe $\mathscr{F}$, le sous-module $(T + N)/T$ de M/T vérifie $\theta([(T + N)/T]) \leq 0$. Puisque T est dans la classe $\mathscr{T}$, le module quotient $T/(T \cap N)$ vérifie $\theta([T/(T \cap N)]) \geq 0$, avec égalité seulement si $T \subset N$. La relation dans $G_0(A)$

$$[N] = [T] - [T/(T \cap N)] + [(T + N)/T]$$

implique alors que $\theta([N]) \leq \theta([T])$, avec égalité seulement si $T \subset N$. Ceci étant valable pour tout sous-module N de M, nous voyons d'une part que $m = \theta([T])$ est la valeur maximale de θ sur $\mathscr{G}(M)$, et d'autre part que T est le plus petit des sous-modules N vérifiant $\theta([N]) = m$.

Les arguments établissant l'existence d'un plus grand élement parmi les sous-modules vérifiant cette égalité sont analogues. Il s'agit juste de modifier les définitions de $\mathscr{T}$ et $\mathscr{F}$ en remplaçant l'inégalité stricte dans la définition de $\mathscr{T}$ par une inégalité large et en imposant une inégalité stricte dans la définition de $\mathscr{F}$ pour tous les sous-modules Y non-nuls de X. □

Le couple $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ est un exemple de théorie de torsion dans la catégorie abélienne des modules de longueur finie. Nous reverrons cette notion avec le théorème de Brenner–Butler dans le paragraphe 5.5.

3.5.2 Corollaire. *Soit M un A-module de longueur finie. Pour chaque sommet a du polytope de Harder–Narasimhan de M, il existe un unique sous-module N de M tel que $[N] = a$.*

Preuve. Soit a un sommet (c'est-à-dire un point extrémal) du polytope convexe P de M. D'après le théorème de Hahn–Banach, $P \setminus \{a\}$ est inclus dans un demi-espace ouvert de $G_0(A)_{\mathbb{R}}$ dont la frontière contient a. En formules, cela signifie qu'il existe $\theta \in G_0(A)^*_{\mathbb{R}}$ tel que $\theta(x) < \theta(a)$ pour tout $x \in P \setminus \{a\}$. En particulier, pour tout sous-module N de M, nous avons $\theta([N] \leq \theta(a)$, avec égalité seulement si $[N] = a$.

D'après la proposition 3.5.1, l'ensemble des sous-modules N vérifiant $[N] = a$ possède un plus petit élement, disons T', et un plus grand élément, disons T''. Comme T' et T'' ont même classe dans le groupe de Grothendieck, ils ont même longueur, donc l'inclusion $T' \subset T''$ ne peut pas être stricte, et l'intervalle entre T' et T'' est un singleton. □

À chaque sommet du polytope de Harder–Narasimhan de M correspond donc un sous-module bien spécifié de N. Certes tous les sous-modules de M ne sont pas de cette forme, mais la proposition 3.5.1 donne non pas un, mais deux tels sous-modules, et l'un est inclus dans l'autre. Nous pouvons donc tenter d'exploiter cette construction pour définir des filtrations bien spécifiées de M. La méthode ici est de projeter le polytope de Harder–Narasimhan de M sur le plan.

Fixons-nous un paramètre de stabilité θ. Soit $\bar{\ell}$ la forme linéaire sur $G_0(A)_{\mathbb{R}}$ telle que $\bar{\ell}([N]) = \ell(N)$ pour tout module N de longueur finie, et soit $\pi : G_0(A)_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire $x \mapsto \big(\bar{\ell}(x), \theta(x)\big)$. L'image par π du polytope de Harder–Narasimhan d'un module M de longueur finie est alors l'enveloppe convexe de $\pi(\mathscr{G}(M))$. C'est un polygone convexe inclus dans la bande $[0, \ell(M)] \times \mathbb{R}$. Nous allons examiner le bord supérieur de ce polygone : c'est une ligne polygonale concave joignant l'origine du plan au point $\pi([M])$. Si cette ligne polygonale est un segment de droite, alors le module M est dit semi-stable. De façon formelle :

Définition.

(1) La **pente** d'un module M non-nul de longueur finie est le quotient $\theta([M])/\ell(M)$.
(2) Un module de longueur finie est dit **semi-stable** si tous ses sous-modules non-nuls sont de pente plus petite que lui.

3.5.3 Théorème. *Soit M un module de longueur finie. Il existe une unique filtration*

$$\{0\} = T_0 \subsetneq T_1 \subsetneq \cdots \subsetneq T_{n-1} \subsetneq T_n = M$$

pour laquelle chaque facteur T_i/T_{i-1} est semi-stable et les pentes des modules T_i/T_{i-1} forment une suite strictement décroissante.

Preuve. Numérotons de gauche à droite les sommets du bord supérieur de l'image par π du polytope de Narder–Narasimhan de M, disons $a_0 = (0, 0)$, a_1, a_2, ..., $a_n = \pi([M])$.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$ et soit $y = \mu x + m$ l'équation de la droite passant par les points a_{i-1} et a_i. Par construction, m est la valeur maximale de $\theta - \mu\bar{\ell}$ sur $\mathscr{G}(M)$. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des sous-modules N de M tels que $(\theta - \mu\bar{\ell})([N]) = m$; les points a_{i-1} et a_i sont de la forme $\pi([N])$ pour $N \in \mathscr{E}$, et tout point de cette forme est sur le segment joignant a_{i-1} et a_i.

D'après la proposition 3.5.1, l'ensemble $\mathscr{E}$ possède un plus petit élément, disons T', et un plus grand élément, disons T''. Pour des questions de longueur, si $N \in \mathscr{E}$, alors $\pi([N])$ est situé à droite de $\pi([T'])$ et à gauche de $\pi([T''])$ sur le segment $a_{i-1}a_i$, avec coïncidence seulement si $N = T'$ ou $N = T''$. Par conséquent, $\pi([T']) = a_{i-1}$ et $\pi([T'']) = a_i$, et ces équations caractérisent T' et T''.

Les arguments ci-dessus prouvent que pour chaque sommet $i \in [\![0, n]\!]$, il existe un unique sous-module T_i de M tel que $[T_i] = a_i$, et que pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, l'inclusion $T_{i-1} \subset T_i$ a lieu.

Chaque sous-module de T_i/T_{i-1} s'écrit sous la forme U/T_{i-1} avec U sous-module de T_i contenant T_{i-1}. Le point $\pi([U])$ appartient à $\pi(\mathscr{G}(M))$ et son abscisse est comprise entre celles de a_{i-1} et a_i ; il est donc dans la bande située sous le segment $a_{i-1}a_i$. La pente du segment joignant a_{i-1} à $\pi([U])$ est donc inférieure à celle du segment $a_{i-1}a_i$. Autrement dit, la pente du module U/T_{i-1} est inférieure à celle du module T_i/T_{i-1}. Nous concluons que T_i/T_{i-1} est semi-stable. La filtration (T_i) que nous avons construite et caractérisée jouit donc des propriétés demandées.

La rédaction des détails de la justification de l'unicité seront laissés au lecteur. Le principe de la preuve est le suivant. On considère une filtration

$$\{0\} = U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq \cdots \subsetneq U_{p-1} \subsetneq U_p = M$$

dont les facteurs successifs sont semi-stables, les pentes formant une suite strictement décroissante. Si N est un sous-module de M, alors pour chaque $j \in [\![1, p]\!]$, le module $(N \cap U_j)/(N \cap U_{j-1})$ est isomorphe à un sous-module de U_j/U_{j-1}. En combinant les inégalités provenant de la semi-stabilité des U_j/U_{j-1}, on montre alors que le point $\pi([N])$ est situé sous la ligne polygonale passant successivement par les points $\pi([U_0])$, $\pi([U_1])$, ..., $\pi([U_p])$. Ceci étant vrai pour chaque sous-module N de M, on conclut que cette ligne polygonale est le bord supérieur de la projection du polytope de Harder–Narasimhan de M. On en déduit que $p = n$ et que $\pi([U_i]) = a_i$ pour chaque $i \in [\![0, n]\!]$, d'où $U_i = T_i$. □

La filtration dont le théorème 3.5.3 établit l'existence et l'unicité est appelée **filtration de Harder–Narasimhan**. Elle dépend du choix du paramètre de stabilité θ utilisé pour projeter le polytope sur le plan.

4 Couvertures projectives et carquois d'une algèbre basique

4.1 Survol

Rappelons que pour un anneau A quelconque, un A-module P est dit **projectif** s'il vérifie les propriétés équivalentes suivantes :

(i) Si $f : M \to N$ est un épimorphisme de A-modules, alors $\mathrm{Hom}_A(P, f) : \mathrm{Hom}_A(P, M) \to \mathrm{Hom}_A(P, N)$ est surjectif.
(ii) $\mathrm{Ext}^1_A(P, L) = 0$ pour tout A-module L.
(iii) Tout épimorphisme $X \to P$ est scindé.
(iv) P est facteur direct d'un A-module libre.

Les modules projectifs sont donc les objets acycliques pour tous les foncteurs de la forme $\mathrm{Hom}_A(-, L)$, ce qui leur confère un rôle central. De plus ils abondent : tout module libre est projectif, donc tout module est quotient d'un module projectif. Ceci permet d'appliquer les méthodes de l'algèbre homologique aux modules.

Dans la suite de ce paragraphe, l'anneau A est supposé être artinien et noethérien à gauche. (Les résultats de la section 4 sont plus généralement valables quand A est un anneau semi-primaire, voir la définition p. 38.)

D'après le théorème de Krull–Schmidt–Azumaya, les A-modules projectifs de type fini indécomposables sont alors (à isomorphisme près) les facteurs directs indécomposables de ${}_AA$. On démontre de plus que l'application $P \mapsto \operatorname{top} P$ (qui à un module associe sa tête) induit une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphisme de A-modules projectifs de type fini indécomposables vers l'ensemble des classes d'isomorphisme de A-modules simples. La bijection réciproque est donnée par la notion de couverture projective : la couverture projective d'un module M est un module projectif P muni d'un homomorphisme surjectif $f : P \to M$, soumis à une condition de minimalité.

La tête du module régulier ${}_AA$ est le module quotient $A/J(A)$, et réciproquement la couverture projective de $A/J(A)$ est ${}_AA$. De la compatibilité de la tête et de la couverture projective avec les sommes directes finies, on déduit que l'application quotient $A \to A/J(A)$ induit une bijection entre l'ensemble des décompositions de ${}_AA$ en sommes directes de sous-modules indécomposables et l'ensemble des décompositions de $A/J(A)$ en sommes directes de sous-modules simples. Dans le langage du paragraphe 1.2, la réduction modulo $J(A)$ induit une bijection entre l'ensemble des décompositions idempotentes orthogonales primitives de l'unité dans A et l'ensemble de celles dans $A/J(A)$. En fait, cette propriété, appelée « relèvement des idempotents », peut être démontrée indépendamment et est une des façons de prouver l'existence des couvertures projectives.

L'anneau semi-simple $A/J(A)$ est isomorphe à un produit $\mathbf{Mat}_{n_1}(\Delta_1) \times \cdots \times \mathbf{Mat}_{n_r}(\Delta_r)$, où les n_i sont des entiers strictement positifs et les Δ_i sont des anneaux à division. Plaçons-nous dans le cas où A est une algèbre de dimension finie sur un corps algébriquement clos k : les anneaux Δ_i sont alors tous égaux à k. Supposons en outre que tous les entiers n_s sont égaux à 1. (Cette hypothèse est moins restrictive qu'il n'y paraît, voir le corollaire 5.4.5.) Alors $A/J(A)$ est simplement l'algèbre k^r. Relevant à A les idempotents de blocs de cette algèbre, nous obtenons une famille $(e_1, \ldots, e_r)$ d'idempotents primitifs de A, deux à deux orthogonaux et de somme 1. Le sous-espace vectoriel engendré par les e_i est alors une sous-algèbre S de A isomorphe à k^r et telle que $A = S \oplus J(A)$ [6]. Nous pouvons maintenant regarder A comme un S-bimodule. Comme l'algèbre $S \otimes_k S^{\mathrm{op}}$ est semi-simple, la suite exacte de S-bimodules

$$0 \to J(A)^2 \to J(A) \to J(A)/J(A)^2 \to 0$$

est scindée, ce qui permet de trouver un sous-S-bimodule V de $J(A)$ tel que $J(A) = V \oplus J(A)^2$. La propriété universelle de l'algèbre tensorielle permet alors de définir un homomorphisme d'algèbres de T_SV dans A, dont on vérifie qu'il est surjectif. Qui plus est, l'algèbre T_SV se

6. L'existence d'une sous-algèbre S de A telle que $A = S \oplus J(A)$ (et du sous-bimodule V supplémentaire de $J(A)^2$ dans $J(A)$) est valable sous des hypothèses plus faibles que celles mentionnées ci-dessus : le théorème de Wedderburn (ou Wedderburn–Malcev si on ajoute une clause d'unicité à conjugaison près) affirme en effet qu'il suffit de savoir que $A/J(A)$ est séparable, au sens où le centre de chacune des algèbres à division Δ_s est une extension séparable de k. Pour une preuve, voir les exercices du §6.11 du livre de Jacobson.

visualise comme la k-algèbre des chemins sur un carquois, appelé carquois (de Gabriel) de A. Nous avons ainsi réalisé A comme l'algèbre des chemins d'un carquois avec relations.

Enfin, revenons sur la notion de bloc d'un anneau A. Soit $\approx$ la relation binaire sur l'ensemble des A-modules simples définie par $S \approx S'$ si S et S' apparaissent tous deux comme facteurs d'une série de composition d'un même A-module indécomposable de type fini. On appelle « liaison » la clôture transitive de $\approx$; c'est une relation d'équivalence. On peut alors démontrer que deux A-modules simples sont liés si et seulement s'ils appartiennent au même bloc de A. Quand A est une algèbre basique de dimension finie sur un corps algébriquement clos, les classes de liaison sont les composantes connexes du carquois de A.

4.2 Couvertures projectives

Définition.

(1) Un épimorphisme de A-modules $f : M \to N$ est dit **essentiel** si tout homomorphisme $g : L \to M$ tel que $f \circ g$ soit surjectif est surjectif.

(2) Une **couverture projective** d'un A-module de type fini M est un couple (P, f) où P est un A-module projectif de type fini et $f : P \to M$ est un épimorphisme essentiel [7].

Par abus, on dit simplement que P est une couverture projective. La façon dont cette notion est utilisée en pratique est résumée dans l'énoncé suivant.

4.2.1 Proposition. *Soit M un module de type fini et soit (P, f) une couverture projective de M. Alors tout module projectif Q muni d'un homomorphisme surjectif $g : Q \to M$ se décompose en une somme directe $P \oplus K$, avec $g|_P = f$ et $g|_K = 0$.*

Preuve. Comme Q est projectif et f est surjectif, il existe un homomorphisme $h : Q \to P$ tel que $g = f \circ h$. Le fait que f soit essentiel entraîne alors que h est surjectif. Comme P est projectif, h est un épimorphisme scindé : Q est donc la somme directe du noyau de h et d'un sous-module que h met en isomorphisme avec P. □

On voit ainsi que la notion de couverture projective reflète une condition de minimalité. Ceci étant, pour prouver l'existence des couvertures projectives, il est préférable de se placer dans un cadre sécurisant.

Définition. On dit qu'un anneau A est **semi-primaire** si son radical de Jacobson $J(A)$ est nilpotent et si $A/J(A)$ est semi-simple.

C'est un concept un peu exotique, mais propice à des énoncés agréables sur les modules projectifs de type fini. Une algèbre de dimension finie sur un corps, un anneau artinien et

7. Les définitions classiques de la notion n'imposent pas à M et P d'être de type fini, mais dans les faits cette restriction permet des énoncés plus simples, ne nuit pas aux applications concrètes, et évite le recours systématique au lemme de Zorn. Pour une analyse plus fine de la situation générale, une bonne référence est le livre *Rings and Categories of Modules* de F. Anderson et K. Fuller, Graduate Texts in Mathematics vol. 13, Springer-Verlag, 1992.

noethérien à gauche (ou à droite), ou plus généralement l'anneau des endomorphismes d'un module de longueur finie (sur un anneau quelconque) est semi-primaire.

Dans la suite de cette section, A sera un anneau semi-primaire.

En particulier, la proposition 2.1.4 pourra être utilisée pour décrire le radical des A-modules de type fini.

4.2.2 Proposition. *Soit M un A-module de type fini. Alors un épimorphisme $f : M \to N$ est essentiel si et seulement si son noyau est inclus dans $J(A)M$.*

Preuve. Le quotient $M/J(A)M$ est complètement réductible, car c'est un module de type fini sur l'anneau semi-simple $A/J(A)$. Soit L un sous-module de M, contenant $J(A)M$, tel que $L/J(A)M$ soit un supplémentaire de $(\ker f + J(A)M)/J(A)M$ dans $M/J(A)M$, et soit $g : L \to M$ l'inclusion. Par construction, $f \circ g : L \to N$ est un homomorphisme surjectif. Si f est un épimorphisme essentiel, alors g est surjectif, autrement dit $L = M$, et ceci entraîne que $(\ker f + J(A)M)/J(A)M = 0$, c'est-à-dire $\ker f \subset J(A)M$.

Réciproquement, supposons que cette dernière inclusion ait lieu. Soit $g : L \to M$ un homomorphisme tel que $f \circ g$ soit surjectif. Alors $\operatorname{im} g + \ker f = M$, et a fortiori $\operatorname{im} g + J(A)M = M$. Appliquant le lemme de Nakayama au module de type fini $M/(\operatorname{im} g)$, nous en déduisons que g est surjectif. Ceci démontre que f est essentiel. □

4.2.3 Théorème.

(i) Tout A-module M de type fini possède une couverture projective (P, f). Si (P, f) et (Q, g) sont deux couvertures projectives de M, alors il existe un isomorphisme $h : Q \to P$ tel que $g = f \circ h$.

(ii) Soit M' et M'' deux A-modules de type fini. Si (P', f') et (P'', f'') sont des couvertures projectives de M' et M'', respectivement, alors $(P' \oplus P'', f' \oplus f')$ est une couverture projective de $M' \oplus M''$.

Preuve. L'existence dans l'énoncé (i) sera prouvée dans la section 4.3. Pour l'unicité, adoptons les notations de l'énoncé. La preuve de la proposition 4.2.1 montre l'existence d'épimorphismes scindés $h : Q \to P$ et $k : P \to Q$ tels que $g = f \circ h$ et $f = g \circ k$. Alors $k \circ h$ est un épimorphisme scindé de Q sur lui-même, d'où l'existence d'un isomorphisme $Q \cong Q \oplus \ker(k \circ h)$. Prenant les têtes, nous obtenons $\operatorname{top} Q \cong \operatorname{top} Q \oplus \operatorname{top}(\ker(k \circ h))$. Les deux membres sont des modules de type fini sur l'anneau semi-simple $A/J(A)$, donc sont de longueur finie. Nous concluons que $\operatorname{top}(\ker(k \circ h)))$ est de longueur zéro, et avec le lemme de Nakayama, que le noyau de $k \circ h$ est trivial. Ainsi h est injective, donc est un isomorphisme.

L'énoncé (ii) est un corollaire de la proposition 4.2.2. □

Remarque. Il est possible de donner une preuve courte de l'existence des couvertures projectives dans le cas où l'anneau A est artinien et noethérien à gauche, selon les lignes suivantes. Soit M un A-module de type fini. Il existe alors des couples (P, f) formés d'un module projectif P de type fini et d'un homomorphisme surjectif $f : P \to M$. Choisissons (P, f) avec P de longueur minimale (c'est ici qu'intervient l'hypothèse faite sur A) et prouvons que f est un épimorphisme essentiel. Soit $g : L \to P$ un homomorphisme tel que $f \circ g$ soit surjective. Par projectivité de P, il existe $h : P \to L$ tel que $(f \circ g) \circ h = f$. Appliquant le lemme de Fitting à l'endomorphisme $g \circ h$, on décompose $P = P_0 \oplus P_1$ avec $(g \circ h)|_{P_0}$ nilpotent et $(g \circ h)|_{P_1}$ automorphisme. L'égalité $f = f \circ (g \circ h)$ entraîne alors que la restriction de f à P_0 est nulle, et donc que $f : P_1 \to M$ est encore surjectif. L'hypothèse de minimalité de f force alors $P_0 = 0$ et $P_1 = P$. Ainsi $g \circ h$ est un automorphisme et g est surjective, comme désiré.

4.2.4 Proposition.

(i) Soit $f : P \to M$ un homomorphisme de modules, où P et M sont de type fini et P est projectif. Alors (P, f) est une couverture projective de M si et seulement si f induit un isomorphisme $\operatorname{top} P \to \operatorname{top} M$ entre les têtes de P et M.

(ii) Un module projectif de type fini indécomposable a une tête simple et est la couverture projective de sa tête. Un module simple a une couverture projective indécomposable et est la tête de cette couverture projective.

Preuve. (i) Si (P, f) est une couverture projective de M, alors $\ker f$ est inclus dans le radical $J(A)P$ du module P, donc dans tous les sous-modules maximaux de P. Utilisant la surjectivité de f, on vérifie sans peine que l'image directe par f et la préimage par f définissent une paire de bijections réciproques entre l'ensemble des sous-modules maximaux de P et l'ensemble de ceux de M. Ceci implique que $\operatorname{rad} P = f^{-1}(\operatorname{rad} M)$, puis que f induit un isomorphisme de $P/\operatorname{rad} P$ sur $M/\operatorname{rad} M$.

Dans l'autre sens, supposons que $f : P \to M$ induise un isomorphisme entre les têtes de P et de M. Alors la composée $P \xrightarrow{f} M \to M/\operatorname{rad} M$ est surjective et a pour noyau $\operatorname{rad} P$. Le noyau de f est ainsi inclus dans $\operatorname{rad} P = J(A)P$. Par ailleurs, f est surjective modulo le radical de M, autrement dit $\operatorname{im} f + J(A)M = M$, et donc $\operatorname{im} f = M$ par le lemme de Nakayama. Ainsi f est un épimorphisme essentiel, c'est-à-dire une couverture projective.

(ii) Soit P un module projectif de type fini indécomposable. Le point (i) montre que P est une couverture projective de sa tête. Cette tête est non-nulle d'après le lemme de Nakayama, et s'il était possible de l'écrire comme somme directe $M' \oplus M''$ de deux sous-modules non-triviaux, alors on pourrait prendre des couvertures projectives P' et P'' de M' et M'' et invoquer l'unicité et l'additivité de la couverture projective pour obtenir $P \cong P' \oplus P''$, en contradiction avec l'indécomposabilité de P. Nous voyons ainsi que la tête de P est indécomposable. Cette tête étant en outre complètement réductible d'après la proposition 2.1.4, elle est en fait simple.

Dans l'autre sens, soit S un A-module simple, et soit (P, f) la couverture projective de S. Alors f induit un isomorphisme entre la tête de P et celle de S, c'est-à-dire entre la tête de P et S. Si P était décomposable en $P' \oplus P''$, la tête de P serait la somme directe des têtes de P' et P'' (proposition 1.4.1), toutes deux non-nulles, ce que la simplicité de S interdit. □

Un intérêt de la notion de couverture projective est le résultat suivant.

4.2.5 Proposition. *Soit S un A-module simple et P la couverture projective de S. Alors pour tout A-module M de type fini, la longueur du $\operatorname{End}_A(P)^{\mathrm{op}}$-module $\operatorname{Hom}_A(P, M)$ est égale à la multiplicité de Jordan–Hölder $(M : S)$.*

Preuve. Chaque suite exacte courte $0 \to L \to M \to N \to 0$ de A-modules donne lieu à une suite exacte de $\mathrm{End}_A(P)^{\mathrm{op}}$-modules

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(P, L) \to \mathrm{Hom}_A(P, M) \to \mathrm{Hom}_A(P, N) \to 0$$

et donc à des égalités

$$(M : S) = (L : S) + (N : S) \quad \text{et} \quad \ell(\mathrm{Hom}_A(P, M)) = \ell(\mathrm{Hom}_A(P, L)) + \ell(\mathrm{Hom}_A(P, N)).$$

Il suffit ainsi d'établir l'égalité lorsque M est un module simple.

La tête de P est simple, isomorphe à S. Par conséquent, si M est simple et pas isomorphe à S, alors $\mathrm{Hom}_A(P, M) = 0$, et les deux membres de l'égalité annoncée sont nuls.

Regardons à présent le cas $M = S$. Si f et g sont deux éléments de $\mathrm{Hom}_A(P, S)$ avec $f \neq 0$, alors f est surjectif par simplicité de S, et il existe $h \in \mathrm{End}_A(P)$ tel que $g = f \circ h$ par projectivité de P. Le $\mathrm{End}_A(P)^{\mathrm{op}}$-module $\mathrm{Hom}_A(P, S)$ est donc simple, et les deux membres de l'égalité annoncée valent 1. □

La notion duale de couverture projective est celle d'enveloppe injective : une **enveloppe injective** d'un A-module M est un couple (I, f) où I est un A-module injectif et $f : M \to I$ est un monomorphisme essentiel, cette dernière condition signifiant qu'un homomorphisme $g : I \to N$ tel que $g \circ i$ est injectif est nécessairement injectif. Il y a toujours existence et unicité de l'enveloppe injective (théorème de Eckmann–Schöpf), sans avoir besoin de faire des hypothèses sur A ou M, mais aussi sans pouvoir imposer que I est de type fini lorsque M l'est (et au prix de l'utilisation de l'axiome du choix dans le cas général).

La symétrie entre les deux situations est cependant rétablie lorsque A est une algèbre de dimension finie sur un corps k, car les deux notions sont alors échangées par le foncteur de Nakayama $\mathrm{Hom}_k(A, k) \otimes_A -$. La proposition 4.2.4 et son analogue pour les enveloppes injectives entraînent alors l'existence de bijections

$$\left\{\begin{matrix}\text{classes d'isom. de} \\ \text{projectifs indécomp.}\end{matrix}\right\} \underset{\text{tête}}{\overset{\text{couv. proj.}}{\leftrightarrows}} \left\{\begin{matrix}\text{classes d'isom. de} \\ \text{modules simples}\end{matrix}\right\} \underset{\text{socle}}{\overset{\text{env. inj.}}{\rightleftarrows}} \left\{\begin{matrix}\text{classes d'isom. de} \\ \text{injectifs indécomp.}\end{matrix}\right\}.$$

Exercice. Soit A l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{R}^2$, un sous-anneau de $\mathbf{Mat}_2(\mathbb{R})$.

(i) Vérifier que les idéaux à gauche de A sont 0, A,

$$J = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; (a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \;\middle|\; (b, c) \in \mathbb{R}^2 \right\},$$

et les idéaux

$$I_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & \lambda b \end{pmatrix} \;\middle|\; b \in \mathbb{R} \right\} \quad (\text{pour } \lambda \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad I_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \;\middle|\; c \in \mathbb{R} \right\}.$$

(ii) Démontrer que A est un anneau artinien à gauche mais pas noethérien à droite.

(iii) Vérifier que I_0 est le radical de Jacobson de A. Démontrer qu'il y a deux classes d'isomorphisme de A-modules simples, à savoir J/I_0 et I_∞, et que les couvertures projectives de ces deux modules simples sont J et I_∞.

(iv) Soit E l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des vecteurs colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$. C'est manifestement un A-module. Quel est son socle ? Prouver que E est indécomposable mais n'est pas de type fini.

On peut vérifier que J/I_0 et E sont des A-modules injectifs ; de fait, ces deux modules sont les enveloppes injectives de J/I_0 et I_∞, respectivement. En particulier, le A-module I_∞ ne se plonge pas dans un A-module injectif de type fini, et la catégorie des A-modules de type fini ne contient pas assez d'injectifs.

4.3 Relèvement des idempotents

Définition. Deux idempotents e et f d'un anneau A sont dits **équivalents** s'il existe $u \in eAf$ et $v \in fAe$ tels que $uv = e$ et $vu = f$.

4.3.1 Proposition. *Soit e et f deux idempotents d'un anneau A. Alors les A-modules Ae et Af sont isomorphes si et seulement si $e \simeq f$.*

Preuve. Soit $\varphi : Ae \to Af$ et $\psi : Af \to Ae$ des isomorphismes réciproques de A-modules. Alors $u = \varphi(e)$ appartient à eAf et $v = \psi(f)$ appartient à fAe, et on a $uv = u\psi(f) = \psi(uf) = \psi(u) = (\psi \circ \varphi)(e) = e$ et de même $vu = f$, donc e et f sont équivalents. Réciproquement, partant de $u \in eAf$ et $v \in fAe$ tels que $uv = e$ et $vu = f$, on définit φ et ψ par $\varphi(x) = xu$ et $\psi(y) = yv$. □

Dans la suite de ce paragraphe, l'anneau A est supposé semi-primaire.

4.3.2 Théorème. *Soit A un anneau et I un idéal nilpotent de A. On note $a \mapsto \overline{a}$ l'homomorphisme canonique $A \to A/I$.*

(i) Pour chaque idempotent $\overline{c}$ dans A/I, il existe un idempotent e dans A tel que $\overline{e} = \overline{c}$. De plus, pour n'importe quel relèvement c de $\overline{c}$ dans A, l'idempotent e peut être construit comme un polynôme en c à coefficients entiers et sans terme constant.

(ii) Soit e un idempotent de A. Pour chaque décomposition $\overline{e} = \overline{c}_1 + \cdots + \overline{c}_n$ en somme d'idempotents deux à deux orthogonaux dans A/I, il existe une décomposition $e = e_1 + \cdots + e_n$ en somme d'idempotents deux à deux orthogonaux dans A telle que $\overline{e}_i = \overline{c}_i$ pour chaque i.

(iii) Un idempotent e de A est primitif si et seulement si $\overline{e}$ est primitif dans A/I.

(iv) Deux idempotents e et f de A sont équivalents si et seulement si les idempotents $\overline{e}$ et $\overline{f}$ de A/I sont équivalents.

Preuve. (i) Soit $c \in A$ un relevé de $\overline{c}$. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des éléments a de la classe $\overline{c}$ s'écrivant comme polynôme en c à coefficients entiers et sans terme constant. Si $a \in \mathscr{E}$, alors $a^2 - a$ appartient à I donc est nilpotent : notons $n(a)$ le plus petit entier strictement positif n tel que $(a^2-a)^n=0$. Choisissons $e\in\mathscr{E}$ de sorte que $n(e)$ soit minimal. Posons $t=e^2-e$ et $e'=e-2et+t$. Certainement $t\in I$ et $e'\in\mathscr{E}$. Un calcul facile fournit $(e')^2-e'=4t^3-3t^2$, d'où $n(e')\leq (n(e)+1)/2$. La condition de minimalité imposée à e force alors $n(e)=1$, autrement dit e est le relèvement cherché de c.

(ii) On procède par récurrence sur n, le cas $n=1$ étant banal. Admettons le résultat pour $n-1$. On peut relever $\overline{c_1}$ en un idempotent e_1 dans A. On peut même construire e_1 comme polynôme sans terme constant en ec_1e, où c_1 est un relevé de $\overline{c_1}$, vu que ec_1e est aussi un relevé de $\overline{c_1}$; ceci entraîne que e_1 vérifie $e_1=ee_1=e_1e$. Dès lors, $e'=e-e_1$ est un idempotent orthogonal à e_1. L'hypothèse de récurrence appliquée à l'idempotent e' et à la décomposition en $n-1$ termes $\overline{e'}=\overline{c_2}+\cdots+\overline{c_n}$ donne une décomposition idempotente orthogonale $e'=e_2+\cdots+e_n$ telle que $\overline{e_i}=\overline{c_i}$. Pour $i\geq 2$, nous avons $e_i=e'e_i=e_ie'$, ce qui implique $e_1e_i=e_ie_1=0$. L'écriture $e=e_1+\cdots+e_n$ est ainsi une décomposition idempotente orthogonale dans A qui relève $\overline{e}=\overline{c_1}+\cdots+\overline{c_n}$.

(iii) Supposons que e ne soit pas primitif : soit il est nul, soit il s'écrit e_1+e_2 avec e_1, e_2 non-nuls et orthogonaux. Dans le premier cas, $\overline{e}$ est nul donc n'est pas primitif. Dans le second, $\overline{e}=\overline{e_1}+\overline{e_2}$ avec $\overline{e_1}$ et $\overline{e_2}$ orthogonaux et non-nuls, donc $\overline{e}$ n'est pas primitif non plus. (Si par exemple $\overline{e_1}$ était nul, alors e_1 appartiendrait à I, donc une puissance de e_1 serait nulle, ce qui est incompatible avec le fait que e_1 soit un idempotent non-nul.) En conclusion : si e n'est pas primitif, alors $\overline{e}$ ne l'est pas non plus. La réciproque provient de (ii).

(iv) Il est clair que si e et f sont équivalents, alors $\overline{e}$ et $\overline{f}$ le sont. Réciproquement, supposons que $\overline{e}\simeq\overline{f}$. Il existe $\overline{u}\in\overline{eAf}$ et $\overline{v}\in\overline{fAe}$ tels que $\overline{u}\,\overline{v}=\overline{e}$ et $\overline{v}\,\overline{u}=\overline{f}$. Remontons $\overline{u}$ et $\overline{v}$ en des éléments u et v de A. Quitte à remplacer u par euf et v par fve, on peut supposer que $u\in eAf$ et $v\in fAe$. Ensuite, $e-uv\in I\cap eAe$. La nilpotence de I entraîne alors que uv est un élément inversible de eAe. De même, vu est un élément inversible de fAf. Soit $x\in eAe$ et $y\in fAf$ tels que $uvx=e$ et $yvu=f$. Alors $yv=yve=yvuvx=fvx=vx$, et donc e et f sont équivalents. □

Preuve de l'existence dans le théorème 4.2.3 (i). L'énoncé (ii) du théorème 4.2.3 et l'énoncé (i) de la proposition 4.2.4, dont les démonstrations n'utilisent pas l'existence des couvertures projectives, permettent de se réduire au cas où M est un A-module simple. On peut alors écrire M sous la forme $\overline{A}\overline{e}$, où $\overline{e}$ est un idempotent primitif de $\overline{A}=A/J(A)$, et relever $\overline{e}$ en un idempotent e de A. Alors Ae est un A-module projectif et l'homomorphisme $Ae\to Ae/J(A)e$ est une couverture projective de $\overline{A}\overline{e}$. □

4.3.3 Proposition. *Soit A un anneau semi-primaire. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *(i) A est local.*
- *(ii) Tout élément de A est soit inversible, soit nilpotent (ou exclusif).*
- *(iii) A possède deux idempotents, à savoir* 0 *et* 1.

Preuve. L'implication (i) ⇒ (ii) résulte de la nilpotence de $J(A)$. L'implication (ii) ⇒ (iii) résulte du fait que dans un anneau, 0 est le idempotent nilpotent et 1 est le seul idempotent inversible.

Supposons que A vérifie (iii). Alors A n'est pas l'anneau nul (l'anneau nul ne possède qu'un seul idempotent), et $A/J(A)$ vérifie aussi (iii), par relèvement des idempotents. La structure de $A/J(A)$ est décrite par le théorème de Wedderburn : $A/J(A)$ contient des idempotents non triviaux sauf s'il contient un seul bloc de matrices, et si ces matrices sont de taille 1×1. Nous concluons que $A/J(A)$ est un anneau à division, autrement dit que (i) est vraie. □

Exercice. Soit A un anneau semi-primaire et soit P un A-module projectif de type fini indécomposable. Prouver que $\mathrm{End}_A(P)$ est un anneau local.
(Indication : un endomorphisme surjectif de P est nécessairement un épimorphisme scindé, donc est un automorphisme. Par ailleurs, la tête $P/J(A)P$ de P est simple, et comme P est de type fini, cela entraîne que $J(A)P$ est le plus grand sous-module propre de P. De tout ceci, on déduit que l'ensemble des éléments non-inversibles de $\mathrm{End}_A(P)$ est l'ensemble des endomorphismes d'image incluse dans $J(A)P$, donc est un idéal de $\mathrm{End}_A(P)$.)

4.4 Modules principaux indécomposables et blocs

Dans tout ce paragraphe, l'anneau A est supposé semi-primaire.

Notons $\overline{A}$ l'anneau quotient $A/J(A)$. Comme il est semi-simple, il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de $\overline{A}$-modules simples, et par conséquent il n'y a qu'un nombre fini de classes d'équivalence d'idempotents primitifs de $\overline{A}$ pour la relation $\simeq$. De plus, l'isomorphisme $\overline{A} \cong \mathbf{Mat}_{n_1}(\Delta_1) \times \cdots \times \mathbf{Mat}_{n_p}(\Delta_p)$ entraîne que l'unité de $\overline{A}$ peut s'écrire comme une somme finie d'idempotents primitifs deux à deux orthogonaux. Le théorème de relèvement des idempotents implique que ces deux propriétés sont également vraies pour l'anneau A.

La définition suivante introduit une terminologie un peu vieillotte.

Définition. Un **module principal indécomposable** sur A est un facteur direct indécomposable du A-module régulier ${}_AA$; autrement dit, c'est un module de la forme Ae avec e idempotent primitif de A.

On note $\pi(A)$ l'ensemble des idempotents primitifs de A et on le munit de la relation d'équivalence suivante : $e \sim f$ s'il existe une suite finie $e = e_0$, e_1, ..., $e_\ell = f$ dans $\pi(A)$ telle que pour tout $i \in [\![1, \ell]\!]$, on a $\mathrm{Hom}_A(Ae_{i-1}, Ae_i) \neq 0$ ou $\mathrm{Hom}_A(Ae_i, Ae_{i-1}) \neq 0$.

Cette relation $\sim$ peut être interprétée de la façon suivante. Soit e et f deux idempotents primitifs de A. Le module principal indécomposable Ae est la couverture projective de sa tête. D'après la proposition 4.2.5, $\mathrm{Hom}_A(Ae, Af) \neq 0$ si et seulement si la tête de Ae est un facteur de composition de Af. Ainsi $e \sim f$ si et seulement s'il existe une suite de modules projectifs indécomposables reliant Ae à Af telle que deux termes consécutifs de cette suite ont un facteur de composition commun.

La relation d'équivalence $\sim$ est moins fine que la relation $\simeq$ du paragraphe précédent : si $e \simeq f$, alors $Ae \cong Af$ en tant que A-module, donc certainement $\mathrm{Hom}_A(Ae, Af) \neq 0$ et $e \sim f$. Nous en déduisons que l'ensemble $\pi(A)/\sim$ des classes d'équivalence pour $\sim$ est fini.

Soit C_1, ..., C_r les éléments de $\pi(A)/\sim$. Pour $s \in [\![1, r]\!]$, notons B_s la somme des modules principaux indécomposables Ae pour $e \in C_s$.

4.4.1 Proposition. *Avec les hypothèses et notations ci-dessus, les B_s sont des idéaux bilatères de A (c'est-à-dire, des sous-bimodules du bimodule régulier ${}_AA_A$) indécomposables, et l'on a $A = B_1 \oplus \cdots \oplus B_r$.*

Preuve. Soit $1 = e_1 + \cdots + e_n$ une décomposition de l'unité de A en somme d'idempotents primitifs deux à deux orthogonaux. Ainsi A est la somme directe $Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_n$. Pour $s \in [\![1, r]\!]$, notons $\widetilde{B}_s$ la somme des sous-modules Ae_i pour les $i \in [\![1, n]\!]$ tels que $e_i \in C_s$. Alors A est la somme directe des $\widetilde{B}_s$.

Soit $f \in \pi(A)$. L'inclusion $Af \to Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_n$ est décrite par une matrice par blocs, avec des éléments de matrice dans $\operatorname{Hom}_A(Af, Ae_i)$. Ici le groupe $\operatorname{Hom}_A(Af, Ae_i)$ est réduit à $\{0\}$ sauf si $f \sim e_i$. On voit ainsi que si $f \in C_s$, alors $Af \subset \widetilde{B}_s$. L'inclusion évidente $\widetilde{B}_s \subset B_s$ est donc une égalité, et nous concluons que A est la somme directe des B_s.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$ et $s \in [\![1, r]\!]$. Si $i \in C_s$, alors $B_sAe_i \subset Ae_i \subset B_s$; sinon, $fAe_i \cong \operatorname{Hom}_A(Af, Ae_i)$ est réduit à $\{0\}$ pour chaque $f \in C_s$, et donc $B_sAe_i = 0$. Dans les deux cas $B_sAe_i \subset B_s$. En faisant la somme sur tous les i, nous obtenons que $B_sA \subset B_s$, c'est-à-dire que B_s est un idéal bilatère de A.

Considérons une écriture de B_s comme somme directe $B'_s \oplus B''_s$ de deux idéaux bilatères. D'après la proposition 1.3.1, chaque module Ae avec $e \in C_s$ s'écrit $Ae = (Ae \cap B'_s) \oplus (Ae \cap B''_s)$. Le fait qu'il soit indécomposable force alors le module Ae à être inclus dans B'_s ou dans B''_s. Ceci partitionne C_s en deux sous-ensembles C'_s et C''_s. Si $e' \in C'_s$ et $e'' \in C''_s$, alors $e'Ae''$ et $e''Ae'$ sont tous deux inclus dans $B'_s \cap B''_s = \{0\}$, et donc $\operatorname{Hom}_A(Ae', Ae'')$ et $\operatorname{Hom}_A(Ae'', Ae')$ sont réduits à 0. Pour que C_s forme une seule classe d'équivalence pour $\sim$, il est ainsi nécessaire que C'_s ou C''_s soit C_s tout entier et que l'autre soit vide. Ceci implique que B'_s ou B''_s soit B_s tout entier et que l'autre soit réduit à $\{0\}$. La décomposition $B_s = B'_s \oplus B''_s$ est donc nécessairement triviale. Ces arguments prouvent que B_s est indécomposable. □

De cette proposition, nous déduisons que les B_s sont les blocs de A (et que A a des blocs).

4.4.2 Corollaire. *Deux A-modules simples S et T appartiennent au même bloc de A si et seulement s'il existe une suite finie de modules indécomposables partant de S et se terminant en T telle que deux termes consécutifs de cette suite ont un facteur de composition commun.*

Preuve. Tout A-module simple apparaît dans la tête $A/J(A)$ de A. On peut donc trouver des idempotents primitifs $\overline{e}$ et $\overline{f}$ de $\overline{A}$ tels que $S \cong A\overline{e}$ et $T \cong A\overline{f}$. Relevons ces idempotents en des idempotents primitifs e et f de A. Alors S et T sont les têtes des modules principaux indécomposables Ae et Af. Supposons que S et T appartiennent au même bloc de A. Certainement Ae et Af appartiennent eux aussi à ce bloc. La proposition 4.4.1 affirme qu'alors $e \sim f$. Par définition, il existe donc une suite finie de modules principaux indécomposables Ae, Ae_1, ..., $Ae_{\ell-1}$, Af telle que deux termes consécutifs de cette suite ont un facteur de composition commun. Il suffit alors d'ajouter S au début et T à la fin de cette suite. □

4.5 Carquois d'une algèbre basique de dimension finie

Dans cette section, nous prouvons un théorème de Gabriel, qui affirme qu'une k-algèbre basique de dimension finie sur un corps algébriquement clos est isomorphe à l'algèbre des chemins d'un carquois avec relations. On cherche ici une représentation de cette algèbre qui permet de comprendre comment les modules simples s'assemblent pour former les modules indécomposables.

Définition. Soit k un corps et A une k-algèbre de dimension finie. On dit que A est **basique** si, lorsqu'on écrit l'algèbre semi-simple $A/J(A)$ comme produit $\mathbf{Mat}_{d_1}(\Delta_1)\times\cdots\times\mathbf{Mat}_{d_n}(\Delta_n)$, tous les d_i sont égaux à 1.

Autrement dit, une algèbre A est basique si, dans une décomposition du A-module $A/J(A)$ en somme directe de modules simples, les termes de la somme directe sont deux à deux non-isomorphes. D'après le théorème du relèvement des idempotents, cette condition équivaut à ce que, dans une décomposition du A-module régulier ${}_AA$ en somme directe de modules (projectifs) indécomposables, les termes de la somme directe sont deux à deux non-isomorphes.

Nous verrons dans le chapitre suivant (corollaire 5.4.5) comment transformer une algèbre quelconque en une algèbre basique.

Dans la suite de ce paragraphe, nous supposons que A est une algèbre basique de dimension finie sur un corps k algébriquement clos.

Sous ces hypothèses, k est la seule k-algèbre à division de dimension finie, et donc $A/J(A)$ est isomorphe à k^n, où n est le nombre de blocs de $A/J(A)$. Notons e_1, ..., e_n des idempotents de A deux à deux orthogonaux relevant les idempotents de blocs de $A/J(A)$. Par construction, le sous-espace vectoriel S engendré par les éléments e_1, ..., e_n est une sous-algèbre de A telle que $A = S \oplus J(A)$.

4.5.1 Lemme. *Avec la notation ci-dessus, tout S-bimodule M se décompose comme la somme directe*

$$M = \bigoplus_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} e_jMe_i.$$

Preuve. Chaque e_i définit deux endomorphismes du k-espace vectoriel M : l'un, disons L_{e_i}, définit l'action à gauche de e_i, l'autre, disons R_{e_i}, l'action à droite. D'après la proposition 1.2.1, la somme $\mathrm{id}_M = R_{e_1} + \cdots + R_{e_n}$ d'idempotents deux à deux orthogonaux donne la décomposition $M = \bigoplus_{i=1}^n Me_i$. De même, la somme $\mathrm{id}_M = L_{e_1} + \cdots + L_{e_n}$ fournit la décomposition $M = \bigoplus_{j=1}^n e_jM$. Pour conclure, on observe que tous ces endomorphismes idempotents L_{e_j} et R_{e_i} commutent deux à deux dans $\mathrm{End}_k(M)$; ils sont donc simultanément diagonalisables. □

Pour alléger l'écriture, nous désignerons le radical de Jacobson $J(A)$ par la lettre $\mathfrak{r}$. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, posons $P_i = Ae_i$ et $S_i = \operatorname{top} P_i = P_i/\mathfrak{r}P_i$. Ainsi P_i est un A-module principal indécomposable, S_i est un A-module simple, et P_i est la couverture projective de S_i. Les modules P_i (respectivement, S_i) sont deux à deux non isomorphes, et tout A-module projectif de type fini indécomposable (respectivement, simple) est isomorphe à l'un des P_i (respectivement, à l'un des S_i). Enfin, $\mathrm{End}_A(S_i) \cong k$ d'après le lemme de Schur.

4.5.2 Proposition. *Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a*

$$\dim_k e_j(\mathfrak{r}/\mathfrak{r}^2)e_i = \bigl(\mathfrak{r}P_i/\mathfrak{r}^2P_i : S_j\bigr) = \dim_k \mathrm{Ext}^1_A(S_i,S_j).$$

Preuve. On applique $\mathrm{Hom}_A(-, S_j)$ à la suite exacte courte $0 \to \mathfrak{r}P_i \to P_i \to S_i \to 0$:

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(S_i, S_j) \to \mathrm{Hom}_A(P_i, S_j) \xrightarrow{h} \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{r}P_i, S_j) \to \mathrm{Ext}^1_A(S_i, S_j) \to 0.$$

Tout homomorphisme de P_i dans S_j se factorise à travers la tête de P_i, donc sa restriction à $\mathfrak{r}P_i$ est nulle ; ceci entraîne que $h = 0$, d'où $\mathrm{Ext}^1_A(S_i, S_j) \cong \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{r}P_i, S_j)$ (c'est un isomorphisme de groupes abéliens, en fait de k-espaces vectoriels). À nouveau, un homomorphisme de $\mathfrak{r}P_i$ dans S_j se factorise à travers la tête de $\mathfrak{r}P_i$. Désignons par $M = \mathfrak{r}P_i/\mathfrak{r}^2P_i$ cette dernière ; alors

$$\mathrm{Ext}^1_A(S_i, S_j) \cong \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{r}P_i, S_j) \cong \mathrm{Hom}_A(M, S_j).$$

En décomposant M en somme directe de sous-modules simples et en utilisant le lemme de Schur, on trouve $(M : S_j) = \dim_k \mathrm{Hom}_A(M, S_j)$, ce qui entraîne la seconde des égalités annoncées.

Des arguments analogues conduisent à $(M : S_j) = \dim_k \mathrm{Hom}_A(S_j, M)$ et

$$\mathrm{Hom}_A(S_j, M) = \mathrm{Hom}_A(P_j/\mathfrak{r}P_j, M) \cong \mathrm{Hom}_A(P_j, M) = \mathrm{Hom}_A(Ae_j, M) \cong e_jM.$$

Décomposant chaque terme de la suite exacte de A-bimodules $0 \to \mathfrak{r}^2 \to \mathfrak{r} \to \mathfrak{r}/\mathfrak{r}^2 \to 0$ selon l'action à droite des idempotents e_i, on obtient

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{r}^2 e_i \to \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{r}e_i \to \bigoplus_{i=1}^n (\mathfrak{r}/\mathfrak{r}^2)e_i \to 0$$

d'où $0 \to \mathfrak{r}^2P_i \to \mathfrak{r}P_i \to (\mathfrak{r}/\mathfrak{r}^2)e_i \to 0$ pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$. Il vient ainsi $M \cong (\mathfrak{r}/\mathfrak{r}^2)e_i$ puis $e_jM = e_j(\mathfrak{r}/\mathfrak{r}^2)e_i$. $\square$

Définition.

(1) Le **carquois (de Gabriel)** de A est le graphe orienté avec $[\![1, n]\!]$ comme ensemble de sommets et avec $\dim_k \mathrm{Ext}^1_A(S_i, S_j)$ flèches de i vers j pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

(2) Soit Q un carquois, soit kQ l'algèbre des chemins de Q sur k, et soit J l'idéal de kQ linéairement engendré par les chemins de longueur strictement positive. Un idéal I de kQ est dit **admissible** s'il existe un entier $t \geq 2$ tel que $J^t \subset I \subset J^2$.

Le carquois de A comprend généralement des boucles et des cycles orientés. Il est bien défini à la numérotation des sommets près. (Il serait en fait plus intrinsèque d'indexer les sommets par l'ensemble des classes d'isomorphisme de A-modules simples, ou par l'ensemble des classes d'isomorphisme de A-modules projectifs de type fini indécomposables.)

4.5.3 Théorème (Gabriel). *Soit A une algèbre basique de dimension finie sur un corps k algébriquement clos, soit Q le carquois de A, et soit kQ l'algèbre des chemins de Q sur k. On peut alors construire un idéal admissible I de kQ et un isomorphisme $A \cong kQ/I$.*

Preuve. On reprend la sous-algèbre $S = ke_1 \oplus \cdots \oplus ke_n$ de A. Comme la composée $S \to A \to A/\mathfrak{r}$ est un isomorphisme, on a $A = S \oplus \mathfrak{r}$.

La suite exacte de A-bimodules $0 \to \mathfrak{r}^2 \to \mathfrak{r} \to /\mathfrak{r}^2 \to 0$ se scinde quand on la regarde comme une suite exacte de S-bimodules. Pour le voir, il suffit de décomposer chaque terme selon le lemme 4.5.1

$$0 \to \bigoplus_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} e_j\mathfrak{r}^2 e_i \to \bigoplus_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} e_j\mathfrak{r} e_i \to \bigoplus_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} e_j(\mathfrak{r}/\mathfrak{r}^2)e_i \to 0$$

et de scinder les suites courtes de k-espaces vectoriels $0 \to e_j\mathfrak{r}^2 e_i \to e_j\mathfrak{r} e_i \to e_j(\mathfrak{r}/\mathfrak{r}^2)e_i \to 0$ ainsi mises en évidence. (On peut aussi raisonner en disant qu'un S-bimodule est la même chose qu'un $S \otimes_k S^{\mathrm{op}}$-module et que l'algèbre $S \otimes_k S^{\mathrm{op}}$ est semi-simple car isomorphe à k^{n^2}.) On peut donc trouver un sous-S-bimodule V de $\mathfrak{r}$ tel que $\mathfrak{r} = V \oplus \mathfrak{r}^2$.

Formons l'algèbre tensorielle

$$T_S V = \bigoplus_{d\geq 0} T_d \quad \text{avec} \quad T_0 = S, \quad T_1 = V, \quad T_d = \underbrace{V \otimes_S \cdots \otimes_S V}_{d \text{ facteurs}}.$$

D'après la proposition 4.5.2, la dimension de $e_j V e_i$ est égale au nombre de flèches de i vers j dans le carquois Q. L'algèbre tensorielle $T_S V$ s'identifie donc à l'algèbre des chemins de Q[8] ; plus précisément, T_d s'identifie au sous-espace vectoriel de kQ engendré par les chemins de longueur d, pour chaque $d \geq 0$.

Par la propriété universelle des algèbres tensorielles, les deux applications $S \to A$ et $V \to A$ définissent un homomorphisme d'algèbres $\Phi : T_S V \to A$. Comme $V \subset \mathfrak{r}$, on a $\Phi(T_d) \subset \mathfrak{r}^d \subset \mathfrak{r}^2$ pour tout $d \geq 2$. De plus, $A = S \oplus V \oplus \mathfrak{r}^2$. Par conséquent, $\ker \Phi \subset \bigoplus_{d\geq 2} T_d$. Par ailleurs, la nilpotence de $\mathfrak{r}$ entraîne l'existence d'un entier $t \geq 2$ tel que $\mathfrak{r}^t = 0$, de sorte que $\ker \Phi \supset \bigoplus_{d\geq t} T_d$. Ceci prouve que $\ker \Phi$ est un idéal admissible de $T_S V$, identifié à kQ.

Enfin, en développant le produit

$$\underbrace{(V \oplus \mathfrak{r}^2) \otimes_S \cdots \otimes_S (V \oplus \mathfrak{r}^2)}_{d \text{ fois}}$$

et en utilisant l'inclusion $V \subset \mathfrak{r}$, on trouve $\mathfrak{r}^d = \Phi(T_d) + \mathfrak{r}^{d+1}$. Une récurrence initialisée par $A = S + V + \mathfrak{r}^2 = \Phi(T_0 + T_1) + \mathfrak{r}^2$ montre alors que $A = \Phi(T_0 + \cdots + T_{d-1}) + \mathfrak{r}^d$ pour tout $d \geq 2$. De la nilpotence de $\mathfrak{r}$ découle alors la surjectivité de Φ. $\square$

Remarques.

(1) Le carquois de A ne dépend que de l'algèbre $A/\mathfrak{r}$ et du $(A/\mathfrak{r})$-bimodule $\mathfrak{r}/\mathfrak{r}^2$. Le reste de la structure de A est encodée dans l'idéal admissible I.

(2) On dit qu'un anneau A est **héréditaire** si tout sous-module d'un A-module projectif de type fini est projectif. Les algèbres de chemins de carquois acycliques sont héréditaires. On peut prouver qu'une algèbre de la forme kQ/I, avec Q carquois et I idéal admissible, est héréditaire si et seulement si Q est acyclique et $I = 0$. Ainsi, sur un corps algébriquement clos, les algèbres basiques héréditaires de dimension finie sont les algèbres de chemins de carquois acycliques et sans relation.

8. Notre convention est que le produit $\alpha\beta$ de deux chemins n'est non-nul que si le terminus de β est la source de α (règle de composition des applications). Pour le carquois à deux sommets $1 \to 2$, cela fait que le module indécomposable de longueur 2 est $P_1 = (kQ)e_1$, de tête S_1 et de socle S_2.

EXERCICES.

(1) Soit Q un carquois fini, soit J l'idéal de kQ linéairement engendré par les chemins de longueur strictement positive, et soit I un idéal admissible de kQ. Démontrer que kQ/I est une algèbre de dimension finie sur k, de radical de Jacobson J/I.
(Indication : J/I est un idéal nilpotent de kQ/I et kQ/J est une algèbre semi-simple.)

(2) Cet exercice vise à déterminer les représentations indécomposables du groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$ sur un corps k de caractéristique 3. On note $\mathfrak{A}_3$ le sous-groupe alterné de $\mathfrak{S}_3$. Toutes les représentations considérées ici sont sur k et de dimension finie.

(i) Prouver que $\mathfrak{A}_3$ a une seule représentation irréductible : la représentation triviale.
(Indication : la k-algèbre du groupe $\mathfrak{A}_3$ est isomorphe à $k[x]/(x-1)^3$.)

(ii) Soit V une représentation de $\mathfrak{S}_3$. Justifier que l'ensemble des éléments de V invariants sous l'action de $\mathfrak{A}_3$ est une sous-représentation de V non-réduite à $\{0\}$.
(Indication : considérer le socle de la restriction à $\mathfrak{A}_3$ de V.)

(iii) Prouver que $\mathfrak{S}_3$ a deux représentations irréductibles, toutes deux de dimension 1 : la représentation triviale et la signature.

Soit A l'algèbre sur k du groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$. On désigne l'élément neutre du groupe $\mathfrak{S}_3$ par id et on introduit les éléments suivants de A :

$$e_1 = 2(\mathrm{id} + (12)), \quad e_2 = 2(\mathrm{id} - (12)), \quad a = \mathrm{id} - (123),$$
$$\alpha = e_2 a e_1, \quad \beta = e_1 a e_2, \quad \gamma = e_1 a e_1, \quad \delta = e_2 a e_2.$$

(iv) Vérifier que e_1 et e_2 sont des idempotents orthogonaux de A et montrer que leurs classes résiduelles forment une base de l'algèbre quotient $A/J(A)$.

(v) Justifier que a appartient au radical de Jacobson $J(A)$ et que $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ est une base de $J(A)$.

Des calculs directs dans A montrent que

$$\gamma = \beta\alpha, \quad \delta = \alpha\beta, \quad \alpha\beta\alpha = \beta\alpha\beta = 0.$$

Soit Q le carquois $1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} 2$.

(vi) Justifier que l'algèbre A est basique et que Q est le carquois de Gabriel de A, puis déterminer un idéal admissible I de kQ tel que $A \cong kQ/I$.

(vii) Trouver tous les A-modules de type fini indécomposables (il y en a six).

(3) Soit k un corps et Q le carquois $1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} 2 \circlearrowleft \gamma$. On considère les idéaux

$$I = \left\langle \alpha\beta - \gamma^2, \beta\alpha, \gamma^3 \right\rangle \quad \text{et} \quad J = \left\langle \alpha\beta - \gamma^2, \beta\alpha - \beta\gamma\alpha, \gamma^3 \right\rangle$$

de kQ.

(i) Calculer les dimensions de kQ/I et kQ/J, justifier que $I \neq J$, et vérifier que I et J sont des idéaux admissibles de kQ.

(ii) Prouver que les algèbres kQ/I et kQ/J sont isomorphes.

5 Catégories additives : radical, équivalence de Morita et basculement

5.1 Philosophie

De la même façon qu'un groupe n'est rien s'il n'agit pas, un anneau n'est rien sans ses modules. Nous sommes donc amenés à regarder un anneau A par le prisme de la catégorie des A-modules. Comme on sait, c'est une catégorie abélienne. Il est cependant intéressant de regarder aussi des sous-catégories additives, telle la catégorie A-proj des A-modules projectifs de type fini.

Définitions et notation.

(1) Une **catégorie pré-additive** est une catégorie dans lequel les ensembles Hom sont munis d'une structure de groupes abéliens et la composition des morphismes est une opération bilinéaire, au sens où elle se distribue par rapport à l'addition [9].

(2) Une **catégorie additive** est une catégorie pré-additive dans laquelle les (co)produits finis existent. Une catégorie additive est donc une catégorie pré-additive avec un objet 0 et une opération $\oplus$.

(3) Un foncteur $\mathbf{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ entre deux catégories pré-additives est un **foncteur additif** si pour tous objets X, Y de $\mathscr{C}$, l'application de $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ dans $\operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(\mathbf{F}(X), \mathbf{F}(Y))$ définie par $\mathbf{F}$ est un homomorphisme de groupes abéliens.

(4) Si X est un A-module, on note $\operatorname{add} X$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des A-modules formée des modules isomorphes à des facteurs directs de $X^{\oplus n}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Un foncteur additif entre deux catégories additives respecte les sommes directes, au vu de la définition p. 4. La catégorie $\operatorname{add} X$ du point (4) est additive [10].

Regardant ces définitions, on se rend compte qu'un anneau est une catégorie pré-additive à un seul objet : la seule donnée pour une telle catégorie est en effet le monoïde des endomorphismes de son unique objet, et la structure pré-additive confère à ce monoïde une structure d'anneau. Il est alors naturel de vouloir généraliser les notions de radical de Jacobson et de module au cadre des catégories pré-additives.

Soit maintenant X un A-module et soit $B = \operatorname{End}_A(X)^{\mathrm{op}}$. Nous pouvons considérer le foncteur $e_X = \operatorname{Hom}_A(X, -)$ de la catégorie des A-modules vers la catégorie des B-modules. (Si M est un A-module, alors l'action à droite de B sur X définit une action à gauche de B sur $e_X(M)$.) Ce foncteur e_X se restreint en une équivalence de catégories de $\operatorname{add} X$ sur B-proj : c'est la méthode de projectivisation, qui permet de ramener des questions sur des modules à des questions sur des modules *projectifs* mais sur un autre anneau.

Si X est projectif et générateur, c'est-à-dire si $\operatorname{add} X$ est la catégorie A-proj des A-modules projectifs de type fini, alors e_X est une équivalence entre les catégories des A- et des B-modules : c'est la théorie de Morita. La version simplifiée offerte dans le théorème 5.4.4 est suffisante pour la plupart des applications.

9. Une variante est la notion de catégorie k-linéaire, où k est un anneau commutatif : on demande que les Hom soient des k-modules et que la composition des morphismes soit donnée par des homomorphismes de k-modules $\operatorname{Hom}(Y, Z) \otimes_k \operatorname{Hom}(X, Y) \to \operatorname{Hom}(X, Z)$. La notion générale est celle de catégorie enrichie.

10. Elle est même « karoubienne » : les endomorphismes idempotents ont un (co)noyau et une (co)image.

Le théorème de Brenner–Butler, avec lequel nous conclurons cette section, considère quant à lui le cas où X est un module basculant : cela permet de couper en deux morceaux les catégories des A- et des B-modules et faire se correspondre les morceaux.

Les paragraphes 5.3 et 5.5 peuvent être omis en première (et même en deuxième) lecture.

5.2 Radical d'une catégorie pré-additive

Dans ce paragraphe, $\mathscr{C}$ est une catégorie pré-additive.

5.2.1 Lemme. *Soit M et N deux objets de $\mathscr{C}$ et soit $f \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(M,N)$. Les deux énoncés suivants sont équivalents :*

(a) Pour tout $g \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(N,M)$, l'endomorphisme $\operatorname{id}_M - gf$ de M est inversible.

(b) Pour tout $g \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(N,M)$, l'endomorphisme $\operatorname{id}_N - fg$ de N est inversible.

Preuve. Supposons que f vérifie (a). Soit $g \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(N,M)$. Comme $\operatorname{id}_M - gf$ est inversible, il existe $k \in \operatorname{End}_{\mathscr{C}}(M)$ tel que

$$k(\operatorname{id}_M - gf) = (\operatorname{id}_M - gf)k = \operatorname{id}_M.$$

Alors

$$(\operatorname{id}_N + fkg)(\operatorname{id}_N - fg) = \operatorname{id}_N - f(\operatorname{id}_M - k + kgf)g = \operatorname{id}_N$$

et de même $(\operatorname{id}_N - fg)(\operatorname{id}_N + fkg) = \operatorname{id}_N$, ce qui prouve que $\operatorname{id}_N - fg$ est inversible. Ainsi f vérifie (b). On démontre de façon semblable l'implication réciproque. □

Notation. Pour M et N deux objets de $\mathscr{C}$, nous désignons par $R(M,N)$ le sous-ensemble de $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(M,N)$ formé des homomorphismes f vérifiant les deux énoncés du lemme.

Observons que pour tout objet M de $\mathscr{C}$, $R(M,M)$ est le radical de Jacobson de $\operatorname{End}_{\mathscr{C}}(M)$ (proposition 2.1.2). Ceci justifie :

Définition. La donnée des sous-groupes $R(M,N)$ est appelée le **radical** de la catégorie $\mathscr{C}$.

5.2.2 Proposition. *Soit L, M, N des objets de $\mathscr{C}$.*

(i) $R(M,N)$ est un sous-groupe de $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(M,N)$.

(ii) Pour tout $f \in R(M,N)$ et tout $g \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(L,M)$, $fg \in R(L,N)$.

(iii) Pour tout $f \in R(M,N)$ et tout $g \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(N,L)$, $gf \in R(M,L)$.

Preuve. Soit $f \in R(M,N)$ et $g \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(L,M)$. Pour $h \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(N,L)$, on peut considérer $gh \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(N,M)$, et alors $\operatorname{id}_N - f(gh)$ est inversible dans $\operatorname{End}_{\mathscr{C}}(N)$ par l'énoncé (b) du lemme. Après reparenthésage $f(gh) = (fg)h$, nous obtenons la définition de $fg \in R(L,N)$. Ainsi (ii) est vrai. On prouve (iii) de façon analogue.

Soit maintenant f et g dans $R(M,N)$. Prenons $h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(N,M)$: alors $\mathrm{id}_M - hf$ est inversible, d'où $k \in \mathrm{End}_{\mathscr{C}}(M)$ tel que

$$k(\mathrm{id}_M - hf) = (\mathrm{id}_M - hf)k = \mathrm{id}_M.$$

Également, $\mathrm{id}_M - (kh)g$ est inversible, d'où $l \in \mathrm{End}_{\mathscr{C}}(M)$ tel que

$$l(\mathrm{id}_M - khg) = (\mathrm{id}_M - khg)l = \mathrm{id}_M.$$

On calcule alors

$$(lk)(\mathrm{id}_M - h(f+g)) = l(\mathrm{id}_M - khg) = \mathrm{id}_M$$

et

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_M - h(f+g))(lk) &= (\mathrm{id}_M - hf)(\mathrm{id}_M - khg)(lk)\\ &= (\mathrm{id}_M - hf)k\\ &= \mathrm{id}_M\end{aligned}$$

et on constate que $\mathrm{id}_M - h(f+g)$ est inversible. Ceci étant vrai pour tout $h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(N,M)$, nous obtenons $f+g \in R(M,N)$. Ainsi $R(M,N)$ est stable par somme. De plus, il possède 0 et est stable par passage à l'opposé (composition par $-\mathrm{id}_M$). C'est donc bien un sous-groupe de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,N)$. □

Le corollaire suivant généralise le dernier exercice du paragraphe 2.1.

5.2.3 Corollaire. *On se donne deux sommes directes $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_m$ et $N = N_1 \oplus \cdots \oplus N_n$ dans $\mathscr{C}$. On peut voir un homomorphisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,N)$ comme la donnée d'une matrice par blocs (f_{rs}) où $f_{rs} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M_s,N_r)$ pour $1 \leq r \leq n$ et $1 \leq s \leq m$. Alors f appartient à $R(M,N)$ si et seulement si chaque f_{rs} appartient à $R(M_s,N_r)$.*

Preuve. Pour chaque $s \in [\![1,m]\!]$, on note $i_s : M_s \to M$ l'inclusion et $p_s : M \to M_s$ la projection définissant la somme directe $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_m$. De même, pour chaque $r \in [\![1,n]\!]$, on note $j_r : N_r \to N$ l'inclusion et $q_r : N \to N_r$ la projection définissant la somme directe $N = N_1 \oplus \cdots \oplus N_n$. On a alors les relations $f_{rs} = q_r f i_s$ et

$$f = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{m} j_r f_{rs} p_s.$$

L'équivalence désirée découle alors de la proposition 5.2.2. □

Exercice. Soit A un anneau, soit e et f deux idempotents de A. On se place dans la catégorie des A-modules. Définir un isomorphisme naturel $R(Ae,Af) \cong eJ(A)f$ et en déduire que $J(eAe) = eJ(A)e$.
(Indication : partir de $R(Ae,Af) \subset \mathrm{Hom}_A(Ae,Af) \cong eAf$ et appliquer le corollaire 5.2.3.)

5.3 Structure de l'anneau des endomorphismes d'un module de longueur finie

Dans ce paragraphe, nous revenons au cadre des modules sur un anneau, même si le résultat que nous allons voir reste vrai dans une catégorie abélienne quelconque.

5.3.1 Théorème. *Soit A un anneau et soit M un A-module de longueur finie. Alors l'anneau* $\operatorname{End}_A(M)$ *est semi-primaire.*

Preuve. Posons $B = \operatorname{End}_A(M)$. Nous devons démontrer deux choses : (1) L'anneau $B/J(B)$ est semi-simple. (2) L'idéal $J(B)$ est nilpotent.

(1) Rassemblons les termes isomorphes d'une décomposition de Krull–Schmidt–Azumaya de M en écrivant $M \cong \bigoplus_{i\in I} N_i^{\oplus n_i}$, où I est un ensemble fini et où les A-modules N_i sont indécomposables et deux à deux non isomorphes. La catégorie $\operatorname{add} M$ est la catégorie des modules isomorphes à une somme directe finie de copies de ces modules N_i. Soit R le radical de la catégorie $\operatorname{add} M$.

Démontrons d'abord que si i et j sont deux éléments différents de I, alors $R(N_i, N_j) = \operatorname{Hom}_A(N_i, N_j)$. Soit $u \in \operatorname{Hom}_A(N_i, N_j)$ et $v \in \operatorname{Hom}_A(N_j, N_i)$. Certainement $v \circ u$ ne peut pas être un automorphisme de N_i, sinon u serait un monomorphisme scindé et N_i serait facteur direct de N_j, alors que par construction N_j est indécomposable et non isomorphe à N_i. Il suit alors des propositions 3.3.1 et 2.2.2 que $\mathrm{id}_{N_i} - v \circ u$ est inversible dans B_i. Ceci étant vrai pour tout $v \in \operatorname{Hom}_A(N_j, N_i)$, notre u appartient à $R(N_i, N_j)$, et ceci vaut pour chaque $u \in \operatorname{Hom}_A(N_i, N_j)$. Nous avons donc bien l'égalité $R(N_i, N_j) = \operatorname{Hom}_A(N_i, N_j)$.

Posons $i \in I$, posons $B_i = \operatorname{End}_A(N_i)$; alors $R(N_i, N_i)$ est le radical de Jacobson de B_i.

Nous regardons B comme un un ensemble de matrices par blocs, le bloc (i, j) devant appartenir à $\mathbf{Mat}_{n_i,n_j}(\operatorname{Hom}_A(N_j, N_i))$. Le corollaire 5.2.3 nous dit alors que le radical de Jacobson de B est formé des matrices dont les blocs diagonaux appartiennent à $\mathbf{Mat}_{n_i}(J(B_i))$. Nous en déduisons que le quotient $B/J(B)$ est l'ensemble des matrices diagonales par blocs, le i-ème bloc diagonal appartenant à $\mathbf{Mat}_{n_i}(B_i)/\mathbf{Mat}_{n_i}(J(B_i)) \cong \mathbf{Mat}_{n_i}(B_i/J(B_i))$.

Comme B_i est un anneau local, le quotient $B_i/J(B_i)$ est un anneau à division, et le résultat souhaité suit du théorème de Wedderburn.

(2) Commençons par démontrer que tous les éléments de $J(B)$ sont nilpotents. Soit f un élément de $J(B)$. Le lemme de Fitting nous donne une décomposition $M = M_0 \oplus M_1$, avec $f|_{M_0}$ nilpotent et $f|_{M_1} \in \operatorname{Aut}_A(M_1)$. Soit g l'endomorphisme de M tel que $g|_{M_0} = 0$ et $g|_{M_1}$ est l'inverse de $f|_{M_1}$. Comme f appartient à $J(B)$, nécessairement $\mathrm{id}_M - g \circ f$ est inversible. Cela n'est possible que si $M_1 = 0$, et donc f est nécessairement nilpotent.

Soit C l'ensemble des éléments s de $J(B)$ pour lesquels il existe une suite $(s_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $J(B)$ telle que $ss_1 \cdots s_n \neq 0$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Nous affirmons que $C = \varnothing$.

Supposons que ce ne soit pas le cas. Comme le A-module M est artinien, nous pouvons trouver $s_1 \in C$ de sorte que $\operatorname{im} s_1$ soit minimal parmi $\{\operatorname{im} s \mid s \in C\}$. Il existe alors $s_2 \in J(B)$ tel que $s_1 s_2 \in C$, et nous le choisissons de sorte que $\operatorname{im} s_2$ soit minimal parmi tous les choix possibles. Continuant le processus, nous choisissons pour tout $n \geq 1$ un élément $s_n \in J(B)$ tel que $s_1 s_2 \cdots s_n \in C$, avec $\operatorname{im} s_n$ minimal. Pour $n \geq m$, l'image de $s_m s_{m+1} \cdots s_n$ est incluse dans celle de s_m. La condition de minimalité imposée à s_m force cette inclusion à être une égalité : $\operatorname{im}(s_m s_{m+1} \cdots s_n) = \operatorname{im} s_m$.

Soit $p_n = s_1 s_2 \cdots s_n$. Nous venons de voir que $\operatorname{im} p_n = \operatorname{im} s_1 = \operatorname{im}(p_n s_{n+1})$; par conséquent

$$M = \ker p_n + \operatorname{im} s_{n+1} \qquad (*_n)$$

pour tout $n \geq 1$. Par ailleurs, pour $k \geq m$, l'endomorphisme $s_m \cdots s_k$ appartient à $J(B)$ donc est nilpotent, ce qui implique qu'on a une inclusion stricte $\operatorname{im}(s_m \cdots s_k s_m) \subsetneq \operatorname{im} s_m$. Pour ne pas violer la condition de minimalité imposée à s_m, il est alors nécessaire que $s_1 \cdots s_{m-1}(s_m \cdots s_k s_m)$ n'appartienne pas à C. Il existe donc un entier $n \geq m$ tel que $(p_k s_m) s_{m+1} \cdots s_n = 0$. Par conséquent, $0 = p_k(\operatorname{im}(s_m s_{m+1} \cdots s_n)) = p_k(\operatorname{im} s_m)$, autrement dit $\operatorname{im} s_m \subset \ker p_k$. On vérifie alors par une récurrence décroissante sur $j \in [\![1, n]\!]$ que

$$M = \bigcap_{k=j}^{n} \ker p_k + \sum_{k=j+1}^{n+1} \operatorname{im} s_k. \tag{$\dagger_j$}$$

De fait, $(\dagger_j)$ s'obtient en combinant $(\dagger_{j+1})$ et $(*_j)$:

$$M = \left((\ker p_j + \operatorname{im} s_{j+1}) \cap \bigcap_{k=j+1}^{n} \ker p_k \right) + \sum_{k=j+2}^{n+1} \operatorname{im} s_k$$

puis en distribuant l'intersection par rapport à la somme dans la grande parenthèse, ce qui est licite au vu de l'inclusion $\operatorname{im} s_{j+1} \subset \bigcap_{k=j+1}^{n} \ker p_k$.

Regardons la formule $(\dagger_1)$ et laissons n devenir de plus en plus grand. Le noyau $\ker p_{n+1}$ contient toutes les images $\operatorname{im} s_k$ pour $k \in [\![2, n+1]\!]$, mais il ne contient pas M. Par conséquent, $\ker p_{n+1}$ ne contient pas l'intersection $\bigcap_{k=1}^{n} \ker p_k$. La suite formée par ces intersections est donc strictement décroissante, ce qui est contradictoire avec le fait que le A-module M est artinien.

Notre raisonnement par l'absurde est terminé, et nous avons démontré que $C = \varnothing$.

Soit L_n la somme des images des endomorphismes appartenant à $J(B)^n$. Le A-module M étant artinien, la suite (décroissante) de terme général L_n stationne à partir d'un certain rang : nous pouvons trouver un entier n tel que $L_n = L_{n+1}$, c'est-à-dire

$$L_n = \sum_{s \in J(B)} s(L_n).$$

Supposons que $L_n \neq 0$. Nous pouvons alors trouver $s_1 \in J(B)$ tel que $s_1(L_n) \neq 0$, puis $s_2 \in J(B)$ tel que $s_1 s_2(L_n) \neq 0$, etc. Nous construisons ainsi une suite $(s_1, s_2, s_3, \ldots)$ d'éléments de $J(B)$ telle que $s_1 \cdots s_k \neq 0$ pour chaque $k \geq 1$, en contradiction avec le fait que $C = \varnothing$.

Nous concluons donc que $L_n = 0$, autrement dit que $J(B)^n = 0$. □

La nilpotence du radical de Jacobson de $\operatorname{End}_A(M)$ est due à Fisher (*Nil subrings of endomorphism rings of modules*, Proc. Amer. Math. Soc. **34** (1972), 75–78) et à Small.

5.4 Projectivisation

Dans ce paragraphe, nous présentons une approche due à Bass (voir H. Bass, *Algebraic K-theory*, W. A. Benjamin, 1968).

Définition.

(1) Un foncteur covariant $\mathbf{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ est **fidèle** si $\mathbf{F} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(\mathbf{F}X, \mathbf{F}Y)$ est injectif pour tous objets $X, Y \in \mathscr{C}$.

(2) Un foncteur covariant $\mathbf{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ est **plein** si $\mathbf{F} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(\mathbf{F}X, \mathbf{F}Y)$ est surjectif pour tous objets $X, Y \in \mathscr{C}$.

(3) Un foncteur $\mathbf{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ est **essentiellement surjectif** (ou **dense**) si tout objet de $\mathscr{D}$ est isomorphe à un objet de la forme $\mathbf{F}X$ avec $X \in \mathscr{C}$.

(4) Une **équivalence de catégorie** est la donnée d'un foncteur covariant fidèle, plein et essentiellement surjectif.

Remarque. Si $\mathbf{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ est un foncteur plein et fidèle, alors deux objets X et Y de $\mathscr{C}$ sont isomorphes si et seulement si $\mathbf{F}X$ et $\mathbf{F}Y$ sont isomorphes dans $\mathscr{D}$. En effet, une paire d'isomorphismes réciproques entre $\mathbf{F}X$ et $\mathbf{F}Y$ est l'image par $\mathbf{F}$ d'une paire d'homomorphismes $X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y$ (en utilisant que $\mathbf{F}$ est plein), et les relations $gf = \mathrm{id}_X$, $fg = \mathrm{id}_Y$ sont vraies puisqu'elles le sont après avoir appliqué $\mathbf{F}$ (en utilisant que $\mathbf{F}$ est fidèle).

Notations. Ici A est un anneau quelconque.

(1) On note A-Mod la catégorie des A-modules et A-mod la sous-catégorie pleine des modules de type fini.

(2) Comme précédemment, pour un A-module X, on note $\operatorname{add} X$ la sous-catégorie pleine de A-Mod formée des modules M isomorphes à un facteur direct d'un module $X^{\oplus n}$, avec $n \in \mathbb{N}$. On désigne par A-proj la catégorie des A-modules projectifs de type fini ; ainsi $A\text{-proj} = \operatorname{add} {}_A A$.

(3) Enfin on note $\operatorname{fp} X$ (pour *finitely presented*) la sous-catégorie pleine de A-Mod formée des modules M pour lesquels existe une suite exacte courte $Q_1 \to Q_0 \to M \to 0$ avec Q_0 et Q_1 dans $\operatorname{add} X$.

La catégorie A-Mod est abélienne, mais A-mod, A-proj, $\operatorname{add} X$ et $\operatorname{fp} X$ ne sont en général que des catégories additives. Dans le cas où A est un anneau noethérien, tous les A-modules de type fini admettent une résolution par des A-modules projectifs de type fini ; en particulier $A\text{-mod} = \operatorname{fp} {}_A A$.

5.4.1 Proposition. *Soit X un A-module et $B = \mathrm{End}_A(X)^{\mathrm{op}}$. Soit $e_X = \mathrm{Hom}_A(X, -)$; c'est un foncteur de A-Mod dans B-Mod, l'action de B sur un $\mathrm{Hom}_A(X, M)$ provenant de l'action de $\mathrm{End}_A(X)$ sur X.*

(i) Pour tout $Q \in \operatorname{add} X$ et tout $M \in A$-Mod, l'application

$$e_X : \mathrm{Hom}_A(Q, M) \to \mathrm{Hom}_B(e_X(Q), e_X(M))$$

est bijective.

(ii) Si $Q \in \operatorname{add} X$, alors $e_X(Q)$ est un B-module projectif.

(iii) Le foncteur e_X définit une équivalence de catégories $\operatorname{add} X \xrightarrow{\simeq} B$-proj.

Preuve. (i) Pour $Q = X$, le groupe $\mathrm{Hom}_B(e_X(Q), e_X(M))$ est

$$\mathrm{Hom}_B(B, \mathrm{Hom}_A(X, M)) \cong \mathrm{Hom}_A(X, M),$$

et dans cette identification, l'application $e_X : \mathrm{Hom}_A(Q, M) \to \mathrm{Hom}_B(e_X(Q), e_X(M))$ de l'énoncé est simplement l'identité de $\mathrm{Hom}_A(X, M)$. Le résultat annoncé est donc vrai dans ce cas.

Le cas de $Q = X^{\oplus n}$ pour $n \geq 0$ s'en déduit par additivité du (bi)foncteur $\mathrm{Hom}(-, -)$. Toujours par additivité, on déduit ensuite le cas où Q est un facteur direct d'un $X^{\oplus n}$.

(ii) Pour $Q = X$, le module $e_X(Q)$ est le module régulier ${}_BB$, donc est un B-module projectif. Le cas général s'en déduit à nouveau par additivité.

(iii) La restriction de e_X à $\mathrm{add}\, X$ est un foncteur fidèle et plein d'après le (i). Il reste à voir l'essentielle surjectivité. Soit donc P un B-module projectif de type fini. Il est isomorphe à un facteur direct d'un B-module libre de type fini $B^{\oplus n}$, autrement dit au noyau d'un idempotent $f \in \mathrm{End}_B(B^{\oplus n})$. Avec (i), on écrit $f = e_X(u)$ où $u \in \mathrm{End}_A(X^{\oplus n})$ est un idempotent. Alors $Q = \ker u$ est un facteur direct de $X^{\oplus n}$, donc un objet de $\mathrm{add}\, X$, et comme e_X est exact à gauche, il préserve les noyaux : $e_X(Q) = \ker f \cong P$. □

En passant de l'anneau A à l'anneau B, nous avons remplacé le module X par un module projectif, d'où le nom de « projectivisation » donné parfois à cette construction. L'équivalence de catégories obtenue établit une bijection entre les classes d'isomorphisme de modules indécomposables de $\mathrm{add}\, X$ et les classes d'isomorphisme de B-modules projectifs indécomposables de type fini. Si X est de longueur finie, alors B est semi-primaire (théorème 5.3.1), de sorte que les classes d'isomorphismes de B-modules projectifs de type fini indécomposables sont en correspondance bijective avec les classes d'isomorphisme de B-modules simples. On obtient alors une correspondance bijective entre les classes d'isomorphisme de A-modules indécomposables apparaissant comme facteurs directs de X et les classes d'isomorphisme de B-modules simples.

Dans ce contexte, des invariants numériques sont préservés, ou plutôt échangés. Pour formuler simplement ce résultat, il est commode de composer le foncteur $\mathrm{Hom}_A(-, X)$ par la restriction, notée $*$, du foncteur $\mathrm{Hom}_B(-, B)$ à la catégorie des B-modules projectifs de type fini [11]. On troque la covariance contre une contravariance, mais on arrive dans une catégorie de $\mathrm{End}_A(X)$-modules à gauche (au lieu de $\mathrm{End}_A(X)$-modules à droite), ce qui permet une comparaison avec X. Les mêmes arguments que précédemment montrent que le foncteur $\mathrm{Hom}_A(X, -)^*$ est plein, fidèle et essentiellement surjectif de la catégorie $\mathrm{add}\, X$ vers la catégorie $\mathrm{End}_A(X)$-proj.

Dans l'énoncé de la proposition qui suit et celui de son corollaire, la notation B désigne exceptionnellement l'anneau $\mathrm{End}_A(X)$, et non son opposé.

5.4.2 Proposition. *Soit A un anneau, soit X un A-module de longueur finie, et soit M un module indécomposable appartenant à* $\mathrm{add}\, X$. *On pose $B = \mathrm{End}_A(X)$ et $C = \mathrm{End}_A(M)$.*

11. Ce foncteur $*$ définit une dualité entre la catégorie des B-modules projectifs de type fini à gauche et celle des mêmes modules, mais à droite. L'usage est de placer le symbole $*$ en exposant de l'objet sur lequel le foncteur agit. Le foncteur composé $\mathrm{Hom}_A(X, -)^* : \mathrm{add}\, X \to \mathrm{End}_A(X)$-proj est naturellement isomorphe au foncteur $\mathrm{Hom}_A(-, X)$. Nous retrouverons le foncteur $*$ dans le paragraphe 6.4.

L'anneau C est local, et on note $\Delta = C/J(C)$ son anneau à division résiduel. Le B-module $P = \mathrm{Hom}_A(X, M)^*$ est projectif indécomposable de type fini ; on note S sa tête.

(i) L'anneau des endomorphismes du B-module S est isomorphe à Δ^{op}. La dimension de S en tant qu'espace vectoriel sur Δ^{op} est égale à la multiplicité avec laquelle M apparaît dans une décomposition de Krull–Schmidt–Azumaya de M.

(ii) Si X est de longueur finie en tant que B-module, alors la multiplicité de Jordan–Hölder de S dans ce B-module est égale à la longueur de M en tant que C-module.

Preuve. Le théorème 5.3.1 nous dit que B est un anneau semi-primaire. Notons $\overline{B}$ l'anneau quotient $B/J(B)$. Fixons un idempotent primitif e de B dont l'image est isomorphe à M. Le B-module $\mathrm{Hom}_A(X, M)^*$ est isomorphe au B-module principal indécomposable $(eB)^* \cong Be$. Notant $\overline{e}$ la classe de e modulo $J(B)$, la tête S de Be est $\overline{B}\overline{e}$.

(i) Reprenant les notations de la démonstration du théorème 5.3.1, point (1), nous écrivons $X \cong \bigoplus_{i\in I} N_i^{\oplus n_i}$ et regardons B comme un anneau de matrices. L'anneau quotient $\overline{B}$ est alors un ensemble de matrices diagonales par blocs, le i-ème bloc diagonal appartenant à $\mathbf{Mat}_{n_i}(C_i/J(C_i))$, où $C_i = \mathrm{End}_A(N_i)$. Il existe $i \in I$ tel que le module M soit isomorphe à N_i. Pour rendre les choses concrètes, nous prenons pour e la projection sur la première copie de N_i dans la décomposition de M. Dans notre représentation matricielle, $\overline{e}$ est la matrice élémentaire $E_{1,1}$ du i-ème bloc diagonal et $S = \overline{B}\overline{e}$ est l'ensemble des vecteurs colonnes de hauteur n_i à coefficients dans Δ. Les endomorphismes du $\overline{B}$-module S sont alors les multiplications à droite par les éléments de Δ, d'où $\mathrm{End}_B(S) \cong \Delta^{\mathrm{op}}$, et S est un Δ^{op}-espace vectoriel de dimension n_i.

(ii) Conservons les notations précédentes. Le B-module Be est la couverture projective de S. Supposons que le B-module M soit de longueur finie. D'après la proposition 4.2.5, la multiplicité de Jordan–Hölder de S dans ce module est égale à la longueur de $\mathrm{Hom}_B(Be, X) \cong eX = M$ en tant que module sur $\mathrm{End}_B(Be)^{\mathrm{op}}$. Nous concluons en observant que le foncteur contravariant plein et fidèle $\mathrm{Hom}_A(X, -)^*$ identifie cet anneau à $\mathrm{End}_A(M) = C$. □

5.4.3 Corollaire (réciprocité de Brauer). *Soit A une algèbre sur un corps algébriquement clos k, soit X un A-module de dimension finie sur k, et soit $B = \mathrm{End}_A(X)$.*

(i) L'application qui à M associe la tête du B-module $\mathrm{Hom}_A(X, M)^*$ définit une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphisme de A-modules indécomposables apparaissant comme facteurs directs de X sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de B-modules simples.

(ii) Soit M un facteur direct indécomposable du A-module X et soit S la tête du B-module $\mathrm{Hom}_A(X, M)^*$. Notons $[X : M]$ la multiplicité de M dans une décomposition de Krull–Schmidt–Azumaya du A-module X et notons $(X : S)$ la multiplicité de Jordan–Hölder de S dans le B-module X. Alors

$$[X : M] = \dim_k S \quad \textit{et} \quad (X : S) = \dim_k M.$$

Preuve. Reprenons les notations de la proposition 5.4.2. Par hypothèse, les k-espaces vectoriels X et M sont de dimension finie sur k. L'anneau local C et son anneau à division résiduel Δ sont donc des k-algèbres de dimension finie. Le corps k étant algébriquement clos, Δ est égal à k. Enfin Δ, vu comme quotient du C-module régulier, est l'unique C-module simple, d'où l'égalité $\dim_k M = \ell(M)$. □

Revenons à notre foncteur e_X et approfondissons le cas où le A-module X est projectif.

5.4.4 Théorème. *Soit P un A-module projectif et $B = \mathrm{End}_A(P)^{\mathrm{op}}$. Alors le foncteur exact $e_P : A\text{-Mod} \to B\text{-Mod}$ se restreint en une équivalence de catégories $\mathrm{fp}\, P \xrightarrow{\simeq} \mathrm{fp}\, {}_BB$.*

Preuve. Comme P est projectif, le foncteur e_P est exact. En particulier, il préserve les conoyaux.

Justifions que e_P envoie un objet M de $\mathrm{fp}\, P$ sur un objet dans $\mathrm{fp}\, {}_BB$. Pour cela, écrivons M comme le conoyau d'un homomorphisme $u : Q_1 \to Q_0$, avec Q_0 et Q_1 dans $\mathrm{add}\, P$. Alors $e_P(M)$ est le conoyau de $e_P(u) : e_P(Q_1) \to e_P(Q_0)$, avec $e_P(Q_0)$ et $e_P(Q_1)$ dans $\mathrm{add}\, {}_BB$ d'après la proposition précédente. Ainsi $e_P(M)$ est bien dans $\mathrm{fp}\, {}_BB$.

Le foncteur e_P se restreint donc en un foncteur $\mathrm{fp}\, P \to \mathrm{fp}\, {}_BB$, et cette restriction est essentiellement surjective. En effet, un B-module N dans $\mathrm{fp}\, {}_BB$ s'écrit comme conoyau d'un homomorphisme $v : R_1 \to R_0$ entre deux B-modules projectifs de type fini. La proposition précédente fournit deux modules Q_0 et Q_1 dans $\mathrm{add}\, P$ tels que $R_0 \cong e_P(Q_0)$ et $R_1 \cong e_P(Q_1)$, puis un homomorphisme $u : Q_1 \to Q_0$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
e_P(Q_1) \arrow[r, "e_P(u)"] \arrow[d, "\simeq"] & e_P(Q_0) \arrow[d, "\simeq"] & & \\
R_1 \arrow[r, "v"] & R_0 \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

commute. On obtient alors $N \cong e_P(\mathrm{coker}\, u)$, avec $\mathrm{coker}\, u \in \mathrm{fp}\, P$ par construction.

Il reste à établir que $e_P : \mathrm{fp}\, P \to \mathrm{fp}\, {}_BB$ est fidèle et plein. Soit M et N dans $\mathrm{fp}\, P$. Écrivant $Q_1 \to Q_0 \to M \to 0$ avec Q_0 et Q_1 dans $\mathrm{add}\, P$, nous obtenons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M,N) \arrow[r] \arrow[d, "e_P"'] & \mathrm{Hom}_A(Q_0,N) \arrow[r] \arrow[d, "e_P"'] & \mathrm{Hom}_A(Q_1,N) \arrow[d, "e_P"'] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(e_P(M), e_P(N)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(e_P(Q_0), e_P(N)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(e_P(Q_1), e_P(N))
\end{tikzcd}$$

dont les lignes sont exactes. Les deux flèches verticales de droite sont bijectives d'après le (i) de la proposition 5.4.1, par suite la flèche verticale de gauche l'est également. □

5.4.5 Corollaire. *Soit A une algèbre de dimension finie sur un corps k. Alors il existe une algèbre B basique de dimension finie sur k telle que les catégories A-mod et B-mod soient équivalentes.*

Preuve. Soit P_1, ..., P_n un jeu complet de A-modules projectifs de type fini indécomposables et soit $P = P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$. Alors chaque P_i est un k-espace vectoriel de dimension finie, donc $B = \mathrm{End}_A(P)^{\mathrm{op}}$ est une k-algèbre de dimension finie. L'équivalence de catégorie $e_P : \mathrm{add}\, P \to B\text{-proj}$ de la proposition 5.4.1 montre que les B-modules projectifs indécomposables de type fini sont les $e_P(P_i)$ et qu'ils sont deux à deux non isomorphes. Comme ${}_BB = e_P(P) = e_P(P_1) \oplus \cdots \oplus e_P(P_n)$, on voit que B est basique.

Par construction de P, les objets de $\operatorname{add} P$ sont les A-modules projectifs de type fini, et ceux de B-proj sont les B-modules projectifs de type fini. Comme A et B sont des k-algèbres de dimension finie, et donc a fortiori des anneaux noethériens à gauche, tout A- et tout B-module de type fini admet une résolution par des modules projectifs de type fini, et en particulier $\operatorname{fp} P = A\text{-mod}$ et $\operatorname{fp}{}_B B = B\text{-mod}$. À l'aide du théorème 5.4.4, nous concluons que e_P définit une équivalence $A\text{-mod} \xrightarrow{\simeq} B\text{-mod}$. $\square$

5.5 Équivalence de Morita et basculement

Avant de nous plonger dans les détails concrets de la preuve du théorème de Morita, il est instructif d'explorer la notion de module sur une catégorie pré-additive. Le concept est excessivement abstrait, mais ressemble à la définition des représentations d'un carquois.

Un module sur une catégorie pré-additive $\mathscr{C}$ est un foncteur M de $\mathscr{C}$ dans la catégorie des groupes abéliens : c'est la donnée d'un groupe abélien M_a pour chaque objet a de $\mathscr{C}$ et d'une flèche $M_f : M_a \to M_b$ pour chaque morphisme $f \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(a, b)$, de sorte que $M_{g \circ f} = M_g \circ M_f$ chaque fois que ces compositions ont un sens. En particulier, chaque M_a est un $\operatorname{End}_{\mathscr{C}}(a)$-module.

Soit A un anneau, soit X un A-module, soit $B = \operatorname{End}_A(X)^{\mathrm{op}}$, et soit $\mathscr{C} = (\operatorname{add} X)^{\mathrm{op}}$ la catégorie opposée à la catégorie $\operatorname{add} X$; ainsi X est un objet de $\mathscr{C}$ et $\operatorname{End}_{\mathscr{C}}(X) = B$. Alors tout $\mathscr{C}$-module $\widetilde{M}$ définit un B-module M, en prenant simplement $M = \widetilde{M}_X$. Inversement, tout B-module M s'étend de façon unique en un $\mathscr{C}$-module $\widetilde{M}$ en posant $\widetilde{M} = \operatorname{Hom}_A(-, X) \otimes_B M$. Ces deux constructions sont des équivalences de catégories inverses l'une de l'autre entre la catégorie des B-modules et celle des $\mathscr{C}$-modules.

Le module X détermine la catégorie $\operatorname{add} X$, mais la réciproque n'est pas vraie. On peut ainsi changer le module X, et donc l'anneau $B = \operatorname{End}_A(X)^{\mathrm{op}}$, sans changer la catégorie $\mathscr{C} = (\operatorname{add} X)^{\mathrm{op}}$, donc sans changer la catégorie des $\mathscr{C}$-modules.

Un A-module X est dit progénérateur si $\operatorname{add} X$ est la catégorie A-proj des A-modules projectifs de type fini. De la discussion précédente, nous concluons que les catégories des B-modules, où B est l'opposé de l'anneau des endomorphismes d'un module progénérateur X, sont toutes équivalentes, car équivalentes à la catégorie des $(A\text{-proj})^{\mathrm{op}}$-modules. Prenant pour X le A-module régulier, nous voyons que ces catégories sont équivalentes à la catégorie des A-modules. Reformulons : si X est un progénérateur de la catégorie des A-modules et si $B = \operatorname{End}_A(X)^{\mathrm{op}}$, alors les catégories des A- et des B-modules sont équivalentes.

Voyons maintenant la preuve terre à terre de cette équivalence, qui en révélera d'autres aspects. Nous commençons par un concept fondamental en théorie des catégories.

Définition. Soit $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ deux catégories. Une **adjonction** entre $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ est la donnée de deux foncteurs $\mathbf{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ et $\mathbf{G} : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ et d'un isomorphisme naturel

$$\Phi : \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(\mathbf{F}-, -) \xrightarrow{\simeq} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-, \mathbf{G}-)$$

de $\mathscr{C}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{D}$ vers la catégorie des ensembles. En formules, on demande la donnée de bijections

$$\Phi_{X,Y} : \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(\mathbf{F}(X), Y) \xrightarrow{\simeq} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \mathbf{G}(Y))$$

pour tous objets X de $\mathscr{C}$ et Y de $\mathscr{D}$, telles que si $a : X' \to X$ et $b : Y \to Y'$ sont des morphismes dans $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$, respectivement, alors le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(\mathbf{F}(X), Y) \arrow[r, "\Phi_{X,Y}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(\mathbf{F}(a),b)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \mathbf{G}(Y)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(a,\mathbf{G}(b))"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(\mathbf{F}(X'), Y') \arrow[r, "\Phi_{X',Y'}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X', \mathbf{G}(Y'))
\end{tikzcd}$$

commute. On dit que $\mathbf{F}$ est l'adjoint à gauche de $\mathbf{G}$ et que $\mathbf{G}$ est l'adjoint à droite de $\mathbf{F}$.

Cette donnée définit une transformation naturelle $\eta : 1_{\mathscr{C}} \to \mathbf{GF}$ appelée **unité** et une transformation naturelle $\varepsilon : \mathbf{FG} \to 1_{\mathscr{D}}$ appelée **coünité** de l'adjonction, définies par

$$\eta_X = \Phi_{X,\mathbf{F}(X)}(\mathrm{id}_{\mathbf{F}(X)}) \quad \text{et} \quad \varepsilon_Y = \Phi^{-1}_{\mathbf{G}(Y),Y}(\mathrm{id}_{\mathbf{G}(Y)})$$

pour tous objets X de $\mathscr{C}$ et Y de $\mathscr{D}$. L'unité et la coünité vérifient les équations

$$\mathrm{id}_{\mathbf{F}(X)} = \varepsilon_{\mathbf{F}(X)} \circ \mathbf{F}(\eta_X) \quad \text{et} \quad \mathrm{id}_{\mathbf{G}(Y)} = \mathbf{G}(\varepsilon_Y) \circ \eta_{\mathbf{G}(Y)}.$$

Inversement, partant de foncteurs $\mathbf{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ et $\mathbf{G} : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ et de transformations naturelles $\eta : 1_{\mathscr{C}} \to \mathbf{GF}$ et $\varepsilon : \mathbf{FG} \to 1_{\mathscr{D}}$ vérifiant les deux équations ci-dessus, on peut définir une adjonction en posant

$$\Phi_{X,Y} : f \mapsto \mathbf{G}(f) \circ \eta_X, \qquad \Phi^{-1}_{X,Y} : g \mapsto \varepsilon_Y \circ \mathbf{F}(g)$$

pour $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(\mathbf{F}(X), Y)$ et $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \mathbf{G}(Y))$.

Le lemme suivant affirme que les modules de type fini sont des objets compacts au sens de la théorie des catégories.

5.5.1 Lemme. *Soit X un module à gauche de type fini sur un anneau A. Alors le foncteur* $\mathrm{Hom}_A(X, -)$ *(de la catégorie des A-modules à gauche vers la catégorie des groupes abéliens) commute aux sommes directes arbitraires (finies ou non).*

Preuve. Soit $(M_i)_{i\in I}$ une famille de A-modules à gauche. La propriété universelle des sommes directes (coproduits) permet d'assembler les homomorphismes de groupes $\mathrm{Hom}_A(X, M_i) \to \mathrm{Hom}_A\Big(X, \bigoplus_{i\in I} M_i\Big)$ en un homomorphisme

$$u : \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}_A(X, M_i) \to \mathrm{Hom}_A\Big(X, \bigoplus_{i\in I} M_i\Big).$$

Par additivité du foncteur $\mathrm{Hom}_A(X, -)$, pour chaque partie finie J de I, la restriction u_J de u à $\bigoplus_{j\in J} \mathrm{Hom}_A(X, M_j)$ s'identifie à l'application naturelle

$$\mathrm{Hom}_A\Big(X, \bigoplus_{j\in J} M_j\Big) \to \mathrm{Hom}_A\Big(X, \bigoplus_{i\in I} M_i\Big).$$

Les restrictions u_J sont des applications injectives (par exactitude à gauche du foncteur $\mathrm{Hom}_A(X, -)$ ou parce que $\bigoplus_{j\in J} M_j$ est un facteur direct de $\bigoplus_{i\in I} M_i$). Le noyau de u ne rencontre donc aucun sous-espace de la forme $\bigoplus_{j\in J}\operatorname{Hom}_A(X,M_j)$. Il est ainsi réduit à 0, ce qui montre que u est injective.

Comme X est de type fini, l'image d'un homomorphisme $f\in\operatorname{Hom}_A\Bigl(X,\bigoplus_{i\in I}M_i\Bigr)$ est toujours incluse dans un sous-module de la forme $\bigoplus_{j\in J}M_j$ avec J partie finie de I. Ainsi le groupe $\operatorname{Hom}_A\Bigl(X,\bigoplus_{i\in I}M_i\Bigr)$ est l'union, sur toutes les parties finies J de I, des images des u_J. Cela montre que u est surjectif. □

Par comparaison, un foncteur de la forme $Y\otimes_A-$ commute toujours aux sommes directes (possiblement infinies), sans qu'il soit besoin de faire des hypothèses sur le A-module à droite Y.

Définition. Soit A un anneau. Un A-module P est dit **progénérateur** si $\operatorname{add}P=A\text{-proj}$.

Autrement dit, un progénérateur est un module projectif de type fini tel que le module régulier ${}_AA$ soit facteur direct d'une somme directe $P^{\oplus n}$ avec $n\in\mathbb{N}$.

5.5.2 Théorème (Morita). *Soit P un module progénérateur sur un anneau A et soit $B=\operatorname{End}_A(P)^{\mathrm{op}}$. On regarde P comme un A-B-bimodule. On définit deux foncteurs adjoints l'un de l'autre $\mathbf{F}:B\text{-Mod}\to A\text{-Mod}$ et $\mathbf{G}:A\text{-Mod}\to B\text{-Mod}$ par*

$$\mathbf{F}=P\otimes_B-\quad\textit{et}\quad\mathbf{G}=\operatorname{Hom}_A(P,-).$$

(i) L'unité et la coünité de l'adjonction sont des isomorphismes de foncteurs. En particulier, les deux foncteurs $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ sont des équivalences de catégories.
(ii) L'application structurelle $A\to\operatorname{End}_B(P)$ est un isomorphisme d'anneaux et le B-module à droite P est un progénérateur.

Soit $Q=\operatorname{Hom}_A(P,{}_AA)$. Les actions à droite de B sur P et de A sur ${}_AA$ munissent Q d'une structure de B-A-bimodule. De même, les actions à droite de A sur Q et de B sur ${}_BB$ munissent $\operatorname{Hom}_B(Q,{}_BB)$ d'une structure de A-B-bimodule.

On définit une application $\psi:P\to\operatorname{Hom}_B(Q,{}_BB)$ en décrétant, pour tout $(p,q)\in P\times Q$, que $\psi(p)(q)$ est l'endomorphisme $x\mapsto q(x)p$ de P.

(iii) Le B-module Q est un progénérateur, l'action à droite de A sur Q définit un isomorphisme $A^{\mathrm{op}}\cong\operatorname{End}_B(Q)$, et l'application ψ est un isomorphisme de A-B-bimodules.
(iv) La transformation naturelle s de $\mathbf{F}$ dans $\operatorname{Hom}_B(Q,-)$ définie par

$$s_N:P\otimes_B N\to\operatorname{Hom}_B(Q,N),\quad p\otimes n\mapsto\bigl(q\mapsto(\psi(p)(q))n\bigr)$$

pour tout B-module N est un isomorphisme de foncteurs. La transformation naturelle t de $Q\otimes_A-$ vers $\mathbf{G}$ définie par

$$t_M:Q\otimes_A M\to\operatorname{Hom}_A(P,M),\quad q\otimes m\mapsto(x\mapsto q(x)m)$$

pour tout A-module M est un isomorphisme de foncteurs. En particulier, les applications s_Q et t_P définissent des isomorphismes de bimodules

$$P\otimes_B Q\to A\quad\textit{et}\quad Q\otimes_A P\to B.$$

Preuve. Nous ne prouverons que les énoncés (i) et (ii) et renvoyons aux sections 3.12–3.15 du livre de Jacobson pour la fin de la démonstration.

Puisque P est un module projectif de type fini sur l'anneau A, le foncteur $\mathbf{G}$ est exact et commute aux sommes directes infinies, d'après le lemme 5.5.1. Le foncteur $\mathbf{F}$ est exact à droite et commute aussi aux sommes directes infinies.

L'identification naturelle $P \otimes_B B = P$ entraîne que ε_P est un isomorphisme. Par conséquent, ε_X est un isomophisme si X est une somme directe (possiblement infinie) de copies de P. Comme P est générateur, tout A-module M admet une présentation de la forme $X_1 \to X_0 \to M \to 0$, où X_0 et X_1 sont de telles sommes directes. Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{FG}(X_1) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_{X_1}"] & \mathbf{FG}(X_0) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_{X_0}"] & \mathbf{FG}(M) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_M"] & 0 \\
X_1 \arrow[r] & X_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

est à lignes exactes et commute par naturalité de la coünité. Les deux flèches verticales de gauche sont des isomorphismes, donc ε_M est un isomorphisme.

De même, on vérifie que η_B est un isomorphisme. En utilisant que tout B-module N admet une présentation de la forme $Y_1 \to Y_0 \to N \to 0$, où Y_0 et Y_1 sont des B-modules libres, des arguments identiques montrent que η_N est un isomorphisme.

Le module P est facteur direct d'un A-module libre de type fini ; appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_A(-, P)$, nous en déduisons que le B-module à droite $\mathrm{Hom}_A(P, P)$ est facteur direct d'un module de la forme $\mathrm{Hom}_A({}_AA^{\oplus n}, P) \cong P^{\oplus n}$, autrement dit que le B-module régulier B_B appartient à $\mathrm{add}\, P$, où P est regardé comme un B-module à droite. De la même façon, le fait que le A-module régulier ${}_AA$ appartienne à $\mathrm{add}\, P$ implique que le B-module à droite $\mathrm{Hom}_A({}_AA, P) \cong P$ appartient à la catégorie additive karoubienne engendrée par $\mathrm{Hom}_A(P, P) \cong B_B$. En fin de compte, nous obtenons que P est un progénérateur de la catégorie des B-modules à droite.

Enfin, considérons la transformation naturelle u du foncteur identité de la catégorie A-Mod vers l'endofoncteur $\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(-, P), P)$ de cette même catégorie définie par

$$u_M : M \to \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(M, P), P), \quad m \mapsto (f \mapsto f(m)).$$

Comme u_P est un isomorphisme, u_M est un isomorphisme pour chaque $M \in \mathrm{add}\, P$, et en particulier u_A est un isomorphisme. Ainsi l'application naturelle $A \to \mathrm{Hom}_B(P, P)$ est bijective. $\square$

Les points (iii) et (iv), dont nous avons omis la démonstration, montrent que la construction est complètement symétrique en A et B. Par ailleurs, les isomorphismes $P \otimes_B Q \to A$ et $Q \otimes_A P \to B$ dans l'énoncé (iv) signifient que Q est l'inverse de P dans le groupoïde de Picard. La multiplication dans ce groupoïde correspond à la composition des équivalences de catégories. Le lecteur intéressé trouvera un exposé complet sur la théorie de Morita dans le livre de Jacobson.

Nous allons partir dans une autre direction et tenter d'étendre le domaine d'application de ce genre de résultat en relâchant les hypothèses sur P. Concrètement, nous allons remplacer les conditions $P \in A$-proj et ${}_A A \in \operatorname{add} P$ par des résolutions de longueur 1. La théorie qui en résulte, appelée basculement, se rencontre dans de nombreux exemples. Ainsi Auslander, Platzeck et Reiten ont montré que les foncteurs de réflexion (foncteurs de Bernstein–Gelfand–Ponomarëv) utilisés dans l'étude des représentations de carquois proviennent de modules basculants.

Définition. Un A-module T est dit **basculant** (*tilting* en anglais) si

(i) il existe une suite exacte courte $0 \to P_1 \to P_0 \to T \to 0$ avec P_0 et P_1 dans A-proj ;
(ii) il existe une suite exacte courte $0 \to {}_A A \to T_0 \to T_1 \to 0$ avec T_0 et T_1 dans $\operatorname{add} T$;
(iii) $\operatorname{Ext}^1_A(T,T) = 0$.

Définition. Soit $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne. Une **théorie de torsion** dans $\mathscr{A}$ est un couple $(\mathscr{T},\mathscr{F})$ de deux classes d'objets de $\mathscr{A}$ tel que :

(i) Pour tout $(M',M'') \in \mathscr{T} \times \mathscr{F}$, on a $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(M',M'') = 0$.
(ii) Chaque objet M de $\mathscr{A}$ a un sous-objet M_t tel que $(M_t, M/M_t) \in \mathscr{T} \times \mathscr{F}$.

Le sous-objet M_t dont (ii) affirme l'existence est nécessairement unique ; on l'appelle le sous-objet de torsion de M relativement à la théorie de torsion. Les éléments de $\mathscr{T}$ sont dits de torsion ; les éléments de $\mathscr{F}$ sont dits sans torsion. Un module M appartient à $\mathscr{T}$ (respectivement, $\mathscr{F}$) si et seulement si $\operatorname{Hom}_A(M,\mathscr{F}) = 0$ (respectivement, $\operatorname{Hom}_A(\mathscr{T},M) = 0$).

5.5.3 Théorème (Brenner–Butler). *Soit T un module basculant sur un anneau A et soit $B = \operatorname{End}_A(T)^{\mathrm{op}}$. On regarde T comme un A-B-bimodule. On définit deux foncteurs $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}'$: B-Mod $\to$ A-Mod et deux foncteurs $\mathbf{G}$, $\mathbf{G}'$: A-Mod $\to$ B-Mod par*

$$\mathbf{F} = T \otimes_B -, \quad \mathbf{F}' = \operatorname{Tor}^B_1(T,-), \quad \mathbf{G} = \operatorname{Hom}_A(T,-), \quad \mathbf{G}' = \operatorname{Ext}^1_A(T,-).$$

Certainement $(\mathbf{F},\mathbf{G})$ est un couple de foncteurs adjoints ; on note $\eta : 1_{B\text{-Mod}} \to \mathbf{GF}$ l'unité et $\varepsilon : \mathbf{FG} \to 1_{A\text{-Mod}}$ la coünité de cette adjonction.

(i) Le couple $(\mathscr{T},\mathscr{F})$ défini ci-dessous est une théorie de torsion dans A-Mod :

$$\mathscr{T} = \{M \mid \mathbf{G}'(M) = 0\}, \qquad \mathscr{F} = \{M \mid \mathbf{G}(M) = 0\}.$$

Le sous-module de torsion relatif à cette théorie d'un A-module M est l'image de ε_M. Si $M \in \mathscr{T}$, alors ε_M est un isomorphisme.

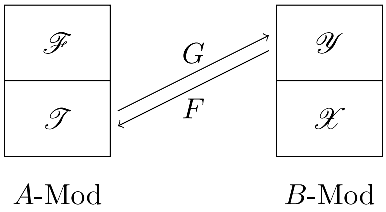
(ii) Le couple $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ défini ci-dessous est une théorie de torsion dans B-Mod :

$$\mathscr{X} = \{N \mid \mathbf{F}(N) = 0\}, \qquad \mathscr{Y} = \{N \mid \mathbf{F}'(N) = 0\}.$$

Le sous-module de torsion relatif à cette théorie d'un B-module N est le noyau de η_N. Si $N \in \mathscr{Y}$, alors η_N est un isomorphisme.

(iii) Les restrictions des foncteurs $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ établissent des équivalences de catégories mutuellement inverses entre $\mathscr{T}$ et $\mathscr{Y}$. Les restrictions des foncteurs $\mathbf{F}'$ et $\mathbf{G}'$ établissent des équivalences de catégories mutuellement inverses entre $\mathscr{F}$ et $\mathscr{X}$.

(iv) L'application structurelle $A \to \operatorname{End}_B(P)$ est un isomorphisme d'anneaux et le B-module à droite P est basculant.



La preuve ci-dessous s'inspire de l'article de D. Happel et C. M. Ringel, *Tilted algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **274** (1982), 399–443. Quelques aménagements de détail ont été effectués pour atteindre la généralité annoncée.

Preuve. La coünité de l'adjonction est la transformation naturelle donnée par les applications d'évaluation
$$\varepsilon_M : T \otimes_B \operatorname{Hom}_A(T, M) \to M, \quad t \otimes f \mapsto f(t),$$
pour chaque A-module M, et l'unité de l'adjonction est donnée par les applications
$$\eta_N : N \to \operatorname{Hom}_A(T, T \otimes_B N), \quad n \mapsto (t \mapsto t \otimes n),$$
pour chaque B-module N.

Le foncteur $\mathbf{F}'$ est le premier foncteur dérivé de $\mathbf{F}$, et de même $\mathbf{G}'$ est le premier foncteur dérivé de $\mathbf{G}$. Comme T est de dimension projective au plus 1, les foncteurs dérivés suivants sont nuls. Par conséquent, toute suite exacte courte de A-modules $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ donne lieu, après application de $\mathbf{G}$, à une suite exacte longue
$$0 \to \mathbf{G}(M') \to \mathbf{G}(M) \to \mathbf{G}(M'') \to \mathbf{G}'(M') \to \mathbf{G}'(M) \to \mathbf{G}'(M'') \to 0,$$
et toute suite exacte courte de B-modules $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ donne lieu, après application de $\mathbf{F}$, à une suite exacte longue
$$0 \to \mathbf{F}'(N') \to \mathbf{F}'(N) \to \mathbf{F}'(N'') \to \mathbf{F}(N') \to \mathbf{F}(N) \to \mathbf{F}(N'') \to 0.$$
En particulier, les foncteurs $\mathbf{G}$ et $\mathbf{F}'$ sont exacts à gauche et les foncteurs $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}'$ sont exacts à droite.

(1) Préliminaires.

(1a) Pour tout ensemble I, on a $\operatorname{Ext}^1_A\big(T, T^{(I)}\big) = 0$.

Pour tout A-module X, le groupe $\operatorname{Ext}^1_A(T, X)$ est le conoyau du morphisme $\operatorname{Hom}_A(P_0, X) \to \operatorname{Hom}_A(P_1, X)$ induit par la suite exacte courte $0 \to P_1 \to P_0 \to T \to 0$. Comme P_0 et P_1 sont de type fini, les foncteurs $\operatorname{Hom}_A(P_0, -)$ et $\operatorname{Hom}_A(P_1, -)$ commutent aux sommes directes infinies d'après le lemme 5.5.1, et il en est donc de même pour $\operatorname{Ext}^1_A(T, -)$. Ceci vu, le résultat est conséquence de l'axiome $\operatorname{Ext}^1_A(T, T) = 0$.

(1b) $\mathscr{T} \cap \mathscr{F}$ est réduit au module nul.

Soit M un A-module. Appliquant le foncteur $\operatorname{Hom}_A(-, M)$ à la suite exacte $0 \to {}_AA \to T_0 \to T_1 \to 0$, nous obtenons la suite exacte
$$\operatorname{Hom}_A(T_0, M) \to \operatorname{Hom}_A({}_AA, M) \to \operatorname{Ext}^1_A(T_1, M).$$

Si $M \in \mathscr{T} \cap \mathscr{F}$, alors $\operatorname{Hom}_A(T, M) = \operatorname{Ext}^1_A(T, M) = 0$, et comme T_0 et T_1 sont dans $\operatorname{add} T$, les termes extrêmes de notre suite exacte sont nuls. Le terme du milieu, c'est-à-dire M, est donc nul aussi.

(1c) $\mathbf{G}'\mathbf{F} = 0$.

Soit N un B-module. On peut le représenter comme l'image d'un module libre : il existe un ensemble I et un épimorphisme $f : {}_B B^{(I)} \to N$. Les foncteurs $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}'$ étant exacts à droite, cela nous donne un épimorphisme $\mathbf{G}'\mathbf{F}(f) : \mathbf{G}'\mathbf{F}\big({}_B B^{(I)}\big) \to \mathbf{G}'\mathbf{F}(N)$. Le point (1a) donne $\mathbf{G}'\mathbf{F}\big({}_B B^{(I)}\big) = 0$, ce qui permet de conclure.

(1d) Soit $M \in \mathscr{T}$, soit I un ensemble et soit $f : T^{(I)} \to M$ un homomorphisme tel que $\mathbf{G}(f)$ soit surjectif ; alors f est surjectif.

Le diagramme

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r] & \ker f \arrow[r] & T^{(I)} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "s"'] & & M \arrow[r] & \operatorname{coker} f \arrow[r] & 0 \\
& & & \operatorname{im} f \arrow[ur, "t"'] \arrow[dr] & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

contient trois suites exactes : la ligne du haut et deux suites exactes courtes passant par $\operatorname{im} f$. La surjectivité de $\mathbf{G}(f)$ et l'égalité $\mathbf{G}(f) = \mathbf{G}(t)\mathbf{G}(s)$ entraînent la surjectivité de $\mathbf{G}(t)$. L'exactitude à gauche de $\mathbf{G}$ implique que $\mathbf{G}(t)$ est également un monomorphisme : c'est donc un isomorphisme. L'exactitude à droite de $\mathbf{G}'$ et le fait que $\mathbf{G}'\big(T^{(I)}\big) = 0$ (point (1a)) impliquent que $\mathbf{G}'(\operatorname{im} f) = 0$. Enfin $\mathbf{G}'(M) = 0$ par hypothèse. De la suite exacte

$$0 \to \mathbf{G}(\operatorname{im} f) \xrightarrow{\mathbf{G}(t)} \mathbf{G}(M) \to \mathbf{G}(\operatorname{coker} f) \to \mathbf{G}'(\operatorname{im} f) \to \mathbf{G}'(M) \to \mathbf{G}'(\operatorname{coker} f) \to 0,$$

nous déduisons que $\mathbf{G}(\operatorname{coker} f) = \mathbf{G}'(\operatorname{coker} f) = 0$. Le point (1b) donne alors $\operatorname{coker} f = 0$.

(1e) Les conditions suivantes portant sur un A-module M sont équivalentes : (α) ε_M est un épimorphisme ; (β) $M \in \mathscr{T}$; (γ) il existe un ensemble I et un épimorphisme $T^{(I)} \to M$.

Supposons que l'homomorphisme ε_M soit surjectif. En lui appliquant le foncteur exact à droite $\mathbf{G}'$, on obtient un épimorphisme $\mathbf{G}'\mathbf{F}\mathbf{G}(M) \to \mathbf{G}'(M)$. Le point (1c) nous donne $\mathbf{G}'\mathbf{F}\mathbf{G}(M)$, et nous concluons que $\mathbf{G}'(M) = 0$. Ceci démontre l'implication $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$.

Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille génératrice du B-module $\operatorname{Hom}_A(T, M)$ et soit $f : T^{(I)} \to M$ l'homomorphisme de A-modules défini par cette famille. Par construction $\mathbf{G}(f)$ est surjectif. Le point (1d) montre alors que si $M \in \mathscr{T}$, alors f est un épimorphisme. Ceci démontre l'implication $(\beta) \Rightarrow (\gamma)$.

Supposons qu'il existe un ensemble I et un épimorphisme $f : T^{(I)} \to M$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}\mathbf{G}\big(T^{(I)}\big) \arrow[r, "\mathbf{F}\mathbf{G}(f)"] \arrow[d, "\varepsilon_{T^{(I)}}"] & \mathbf{F}\mathbf{G}(M) \arrow[d, "\varepsilon_M"] \\
T^{(I)} \arrow[r, "f"'] & M
\end{tikzcd}$$

commute par naturalité de la coünité. La flèche de gauche est un isomorphisme parce que ε_T en est un et que $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ commutent aux sommes directes infinies. Par suite, la composée

$\varepsilon_M \circ \mathbf{FG}(f)$ est un épimorphisme, et donc ε_M est un épimorphisme. Ceci démontre l'implication $(\gamma) \Rightarrow (\alpha)$.

Notons que la construction employée pour prouver l'implication $(\beta) \Rightarrow (\gamma)$ fournit un épimorphisme f tel que $\mathbf{G}(f)$ soit aussi surjectif.

(1f) Si $M \in \mathscr{T}$, alors ε_M est un isomorphisme.

Soit M un module de la classe $\mathscr{T}$. Le point (1e) nous donne un ensemble I et un épimorphisme $f : T^{(I)} \to M$ tel que $\mathbf{G}(f)$ soit surjectif. Soit K le noyau de f. De la suite exacte

$$0 \to \mathbf{G}(K) \to \mathbf{G}\big(T^{(I)}\big) \xrightarrow{\mathbf{G}(f)} \mathbf{G}(M) \to \mathbf{G}'(K) \to \mathbf{G}'\big(T^{(I)}\big)$$

et du fait que $\mathbf{G}'\big(T^{(I)}\big) = 0$, nous déduisons d'une part que $\mathbf{G}(K)$ est le noyau de $\mathbf{G}(f)$, mais aussi que $\mathbf{G}'(K) = 0$, c'est-à-dire que K est dans la classe $\mathscr{T}$. Nous pouvons alors recommencer, trouver un ensemble J et un épimorphisme $g : T^{(J)} \to K$ tel que $\mathbf{G}(g)$ soit surjectif. En fin de compte nous disposons d'une résolution $T^{(J)} \to T^{(I)} \to M \to 0$ dont l'image par $\mathbf{G}$ est exacte. Appliquant le foncteur exact à droite $\mathbf{F}$ à cette image, nous obtenons l'exactitude de la première ligne du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{FG}\big(T^{(J)}\big) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_{T^{(J)}}"] & \mathbf{FG}\big(T^{(I)}\big) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_{T^{(I)}}"] & \mathbf{FG}(M) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_M"] & 0 \\
T^{(J)} \arrow[r] & T^{(I)} \arrow[r] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Ce diagramme commute par naturalité de la coünité, et comme ε_T est un isomorphisme, les deux flèches verticales de gauche sont des isomorphismes, et nous concluons que ε_M est un isomorphisme.

(1g) Tout A-module se plonge dans un module de la classe $\mathscr{T}$.

Soit M un A-module. On peut le présenter comme un quotient d'un A-module libre ${}_AA^{(I)}$. La suite exacte $0 \to {}_AA \to T_0 \to T_1 \to 0$ dans la définition de module basculant permet de plonger ${}_AA$ dans une somme directe $T^{\oplus n}$, et par suite de plonger ${}_AA^{(I)}$ dans $T^{([n]\times I)}$. Le module M apparaît ainsi comme sous-module d'un quotient de $T^{([n]\times I)}$, et on conclut avec le point (1e).

(1h) $\mathbf{F}'\mathbf{G} = 0$.

Soit $M \in \mathscr{T}$. Il existe un ensemble I et un épimorphisme $f : T^{(I)} \to M$ tel que $\mathbf{G}(f)$ soit surjectif. Soit K le noyau de f. Comme dans la démonstration du point (1f), nous avons $K \in \mathscr{T}$. Dans le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}'\mathbf{G}\big(T^{(I)}\big) \arrow[r] & \mathbf{F}'\mathbf{G}(M) \arrow[r] & \mathbf{FG}(K) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_K"] & \mathbf{FG}\big(T^{(I)}\big) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_{T^{(I)}}"] & \mathbf{FG}(M) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_M"] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & K \arrow[r] & T^{(I)} \arrow[r] & M \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

les flèches verticales sont des isomorphismes en vertu du point (1f), et le module $\mathbf{F}'\mathbf{G}\big(T^{(I)}\big)$ est nul parce que $\mathbf{G}\big(T^{(I)}\big)$ est le B-module libre ${}_BB^{(I)}$. Nous en déduisons que $\mathbf{F}'\mathbf{G}(M) = 0$.

Soit maintenant L un A-module. D'après le point (1g), nous pouvons trouver un module $M \in \mathscr{T}$ et un monomorphisme $i : L \to M$. Les deux foncteurs $\mathbf{F}'$ et $\mathbf{G}$ étant exacts à gauche, le morphisme $\mathbf{F}'\mathbf{G}(i)$ est injectif. De la nullité de $\mathbf{F}'\mathbf{G}(M)$ découle alors celle de $\mathbf{F}'\mathbf{G}(L)$.

(2) Preuve de (i).

(2a) Si $(L, M) \in \mathscr{T} \times \mathscr{T}$, alors $\mathrm{Hom}_A(L, M) = 0$.

Soit $f \in \mathrm{Hom}_A(L, M)$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbf{FG}(L) \arrow[r, "\mathbf{FG}(f)"] \arrow[d, "\varepsilon_L"] & \mathbf{FG}(M) \arrow[d, "\varepsilon_M"] \\ L \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd}$$

commute par naturalité de la coünité. La flèche ε_L est un isomorphisme par le point (1f) et le module $\mathbf{G}(M)$ est nul par hypothèse. Nous concluons que $f = 0$.

(2b) Soit M un A-module et soit L l'image de $\varepsilon_M : \mathbf{FG}(M) \to M$. Alors $(L, M/L) \in \mathscr{T} \times \mathscr{F}$.

Par définition de L, chaque homomorphisme $f : T \to M$ prend ses valeurs dans L. L'homomorphisme $\mathrm{Hom}_A(T, M) \to \mathrm{Hom}_A(T, M/L)$ induit par l'application quotient $M \to M/L$ est donc nul. La suite exacte longue obtenue en appliquant $\mathbf{G}$ à la suite exacte courte $0 \to L \to M \to M/L \to 0$ est donc de la forme

$$0 \to \mathbf{G}(L) \to \mathbf{G}(M) \xrightarrow{0} \mathbf{G}(M/L) \to \mathbf{G}'(L),$$

donc $\mathbf{G}(L) \cong \mathbf{G}(M)$ et $\mathbf{G}(M/L)$ se plonge dans $\mathbf{G}'(L)$. Du diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbf{FG}(L) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\varepsilon_L"'] & \mathbf{FG}(M) \arrow[d, "\varepsilon_M"] \arrow[dl, two heads] \\ L \arrow[r] & M, \end{tikzcd}$$

on déduit que ε_L est un épimorphisme, donc $L \in \mathscr{T}$ d'après le point (1e). Ceci donne $\mathbf{G}'(L) = 0$, d'où $\mathbf{G}(M/L) = 0$, et ainsi $M/L \in \mathscr{F}$.

(3) Preuve de (ii).

(3a) Si N est un B-module tel que η_N est injectif, alors $N \in \mathscr{Y}$.

Supposons que l'homomorphisme η_N soit injectif. En lui appliquant le foncteur exact à gauche $\mathbf{F}'$, on obtient un monomorphisme $\mathbf{F}'(N) \to \mathbf{F}'\mathbf{GF}(N)$. Le point (1h) nous donne $\mathbf{F}'\mathbf{GF}(N) = 0$, et nous concluons que $\mathbf{F}'(N) = 0$.

(3b) Si $N \in \mathscr{Y}$, alors η_N est un isomorphisme.

Soit N un module de la classe $\mathscr{Y}$. C'est certainement l'image d'un B-module libre : il existe un ensemble I et un épimorphisme $f : {}_BB^{(I)} \to N$. Notant L le noyau de f, appliquant $\mathbf{F}$ à la suite exacte $0 \to L \to B^{(I)} \to N \to 0$ et utilisant l'hypothèse $\mathbf{F}'(N) = 0$, nous parvenons à la suite exacte

$$0 \to \mathbf{F}(L) \to \mathbf{F}\big(B^{(I)}\big) \to \mathbf{F}(N) \to 0$$

et à l'égalité $\mathbf{F}'(L)=0$. Appliquant $\mathbf{G}$ et notant que $\mathbf{G}'\mathbf{F}=0$ (point (1c)), nous arrivons à

$$0 \to \mathbf{GF}(L) \to \mathbf{GF}\bigl(B^{(I)}\bigr) \to \mathbf{GF}(N) \to 0.$$

À nouveau L est l'image d'un B-module libre ${}_BB^{(J)}$ pour un certain ensemble J. Le même raisonnement que ci-dessus mais en utilisant maintenant $\mathbf{F}'(L)=0$ prouve que l'homomorphisme $\mathbf{GF}\bigl(B^{(J)}\bigr) \to \mathbf{GF}(L)$ déduit par fonctorialité est un épimorphisme. Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
B^{(J)} \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{B^{(J)}}"] & B^{(I)} \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{B^{(I)}}"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\eta_N"] & 0 \\
\mathbf{GF}\bigl(B^{(J)}\bigr) \arrow[r] & \mathbf{GF}\bigl(B^{(I)}\bigr) \arrow[r] & \mathbf{GF}(N) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

commute par naturalité de l'unité et est à lignes exactes. Comme η_B est un isomorphisme, les deux flèches verticales de gauche sont des isomorphismes, et nous concluons que η_N est un isomorphisme.

(3c) Si $(L,N) \in \mathscr{X} \times \mathscr{Y}$, alors $\mathrm{Hom}_B(L,N)=0$.

Soit $f \in \mathrm{Hom}_B(L,N)$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_L"] & N \arrow[d, "\eta_N"] \\
\mathbf{GF}(L) \arrow[r, "\mathbf{GF}(f)"'] & \mathbf{GF}(N)
\end{tikzcd}$$

commute par naturalité de l'unité. La flèche η_N est un isomorphisme par le point (3b) et le module $\mathbf{F}(L)$ est nul par hypothèse. Nous concluons que $f=0$.

(3d) Soit N un B-module et soit L le noyau de $\eta_N : N \to \mathbf{GF}(N)$. Alors $(L, M/L) \in \mathscr{X} \times \mathscr{Y}$.

Si l'application $T \otimes_B L \to T \otimes_B N$ n'était pas nulle, alors il existerait $(t,\ell) \in T \times L$ tels que $t \otimes \ell$ soit non nul dans $T \otimes_B N$, et l'image de ℓ dans $\mathrm{Hom}_A(T, T \otimes_B N)$ par l'application η_N serait non-nulle, contrairement à la définition de L. Par conséquent, la flèche $\mathbf{F}(L) \to \mathbf{F}(N)$ induite par l'inclusion $L \to N$ est nulle. La suite exacte longue induite par la suite exacte courte $0 \to L \to N \to N/L \to 0$ est ainsi de la forme

$$\mathbf{F}'(N/L) \to \mathbf{F}(L) \xrightarrow{0} \mathbf{F}(N) \to \mathbf{F}(N/L) \to 0,$$

donc $\mathbf{F}(N) \cong \mathbf{F}(N/L)$ et $\mathbf{F}'(N/L)$ se surjecte sur $\mathbf{F}(L)$. Du diagramme

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r] \arrow[d, "\eta_N"'] & N/L \arrow[d, "\eta_{N/L}"] \arrow[dl] \\
\mathbf{GF}(N) \arrow[r, "\simeq"] & \mathbf{GF}(N/L)
\end{tikzcd}$$

on déduit que $\eta_{N/L}$ est un monomorphisme, donc $N/L \in \mathscr{Y}$ d'après le point (3a). Ceci donne $\mathbf{F}'(N/L)=0$, d'où $\mathbf{F}(L)=0$, et ainsi $L \in \mathscr{X}$.

(4) Preuve de (iii).

(4a) $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ établissent des équivalences de catégories entre $\mathscr{T}$ et $\mathscr{Y}$.

Les relations $\mathbf{G}'\mathbf{F} = 0$ et $\mathbf{F}'\mathbf{G} = 0$ impliquent que $\mathbf{F}(\mathscr{Y}) \subset \mathscr{T}$ et $\mathbf{G}(\mathscr{T}) \subset \mathscr{Y}$. Que les restrictions de $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ soient des équivalences de catégories résulte alors du fait que $\varepsilon_M : \mathbf{FG}(M) \to M$ et $\eta_N : N \to \mathbf{GF}(N)$ sont des isomorphismes pour tout module $M \in \mathscr{T}$ et tout module $N \in \mathscr{Y}$.

(4b) $\mathbf{GF}' = 0$, et si $N \in \mathscr{X}$, alors $N \cong \mathbf{G}'\mathbf{F}'(N)$.

Soit N un B-module. Il est l'image d'un B-module libre, disons Q, ce qui permet d'écrire une suite exacte de la forme $0 \to L \to Q \to N \to 0$. Ici Q est libre, donc plat sur B ; en particulier, $\mathbf{F}'(Q) = 0$. Comme $\mathbf{F}'$ est exact à gauche, nous avons aussi $\mathbf{F}'(L) = 0$. Ainsi L et Q sont dans $\mathscr{Y}$, ce qui entraîne que η_L et η_Q sont des isomorphismes.

Appliquant le foncteur exact à gauche $\mathbf{G}$ à la suite exacte

$$0 \to \mathbf{F}'(N) \to \mathbf{F}(L) \to \mathbf{F}(Q) \to \mathbf{F}(N) \to 0,$$

nous obtenons l'exactitude de la seconde ligne de

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, "\eta_L"] & Q \arrow[d, "\eta_Q"] \\
0 \arrow[r] & \mathbf{GF}'(N) \arrow[r] & \mathbf{GF}(L) \arrow[r] & \mathbf{GF}(Q).
\end{tikzcd}$$

Les deux flèches verticales étant des isomorphismes, nous concluons que $\mathbf{GF}'(N) = 0$.

Dans le cas où $N \in \mathscr{X}$, c'est-à-dire $\mathbf{F}(N) = 0$, nous partons d'une suite exacte courte

$$0 \to \mathbf{F}'(N) \to \mathbf{F}(L) \to \mathbf{F}(Q) \to 0$$

et pouvons écrire une suite exacte longue

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, "\eta_L"] & Q \arrow[r] \arrow[d, "\eta_Q"] & N \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{GF}(L) \arrow[r] & \mathbf{GF}(Q) \arrow[r] & \mathbf{G}'\mathbf{F}'(N) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

où le dernier zéro sur la seconde ligne provient de la relation $\mathbf{G}'\mathbf{F} = 0$. Comme η_L et η_Q sont des isomorphismes, nous concluons à l'existence d'un isomorphisme naturel $N \cong \mathbf{G}'\mathbf{F}'(N)$.

(4c) $\mathbf{FG}' = 0$, et si $M \in \mathscr{F}$, alors $M \cong \mathbf{F}'\mathbf{G}'(M)$.

Soit M un A-module. Par le point (1g), on peut le plonger dans un module de la classe $\mathscr{T}$, disons J, ce qui permet d'écrire une suite exacte de la forme $0 \to M \to J \to C \to 0$. Par construction $\mathbf{G}'(J) = 0$, et comme $\mathbf{G}'$ est exact à droite, nous avons aussi $\mathbf{G}'(C) = 0$. Ainsi J et C sont dans $\mathscr{T}$, ce qui entraîne que ε_J et ε_C sont des isomorphismes.

Appliquant le foncteur exact à droite $\mathbf{F}$ à la suite exacte

$$0 \to \mathbf{G}(M) \to \mathbf{G}(J) \to \mathbf{G}(C) \to \mathbf{G}'(M) \to 0,$$

nous obtenons l'exactitude de la première ligne de

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{FG}(J) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_J"] & \mathbf{FG}(C) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_C"] & \mathbf{FG}'(M) \arrow[r] & 0 \\
J \arrow[r] & C \arrow[r] & 0. &
\end{tikzcd}$$

Les deux flèches verticales étant des isomorphismes, nous concluons que $\mathbf{FG}'(M) = 0$.

Dans le cas où $M \in \mathscr{F}$, c'est-à-dire $\mathbf{G}(M) = 0$, nous partons d'une suite exacte courte

$$0 \to \mathbf{G}(J) \to \mathbf{G}(C) \to \mathbf{G}'(M) \to 0$$

et pouvons écrire une suite exacte longue

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{F}'\mathbf{G}'(M) \arrow[r] & \mathbf{FG}(J) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_J"] & \mathbf{FG}(C) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_C"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & J \arrow[r] & C \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

où le premier zéro sur la première ligne provient de la relation $\mathbf{F}'\mathbf{G} = 0$. Comme ε_J et ε_C sont des isomorphismes, nous concluons à l'existence d'un isomorphisme naturel $\mathbf{F}'\mathbf{G}'(M) \to M$.

(5) Preuve de (iv).

(5a) Il existe une suite exacte courte $0 \to Q_1 \to Q_0 \to T \to 0$ de B-modules à droite avec Q_0 et Q_1 des modules projectifs de type fini.

Appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_A(-, T)$ à la suite exacte courte $0 \to {}_AA \to T_0 \to T_1 \to 0$ et tenant compte de $\mathrm{Ext}^1_A(T, T) = 0$, nous obtenons

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(T_1, T) \to \mathrm{Hom}_A(T_0, T) \to \mathrm{Hom}_A(A, T) \to 0.$$

Comme T_0 et T_1 sont dans $\mathrm{add}\, T$, $\mathrm{Hom}_A(T_1, T)$ et $\mathrm{Hom}_A(T_0, T)$ sont dans la catégorie additive karoubienne engendrée par $\mathrm{Hom}_A(T, T) \cong B_B$, c'est-à-dire dans la catégorie des B-modules à droite projectifs de type fini.

(5b) Il existe une suite exacte courte $0 \to B \to X_0 \to X_1 \to 0$ de B-modules à droite avec X_0 et X_1 dans $\mathrm{add}\, T$, où T est regardé comme un B-module à droite.

Appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_A(-, T)$ à la suite exacte courte $0 \to P_1 \to P_0 \to T \to 0$ et tenant compte de $\mathrm{Ext}^1_A(T, T) = 0$, nous obtenons

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(T, T) \to \mathrm{Hom}_A(P_0, T) \to \mathrm{Hom}_A(P_1, T) \to 0.$$

Ici $\mathrm{Hom}_A(T, T)$ est le B-module régulier à droite, et comme P_0 et P_1 sont dans A-proj, $\mathrm{Hom}_A(P_0, T)$ et $\mathrm{Hom}_A(P_1, T)$ sont dans $\mathrm{add}\, T$.

(5c) L'homomorphisme naturel $A \to \mathrm{End}_B(T)$ est bijectif et $\mathrm{Ext}^1_B(T, T) = 0$.

Considérons la transformation naturelle u du foncteur identité de la catégorie A-Mod vers l'endofoncteur $H = \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(-, T), T)$ de cette même catégorie définie par

$$u_M : M \to \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(M, T), T), \quad m \mapsto (f \mapsto f(m)).$$

Comme u_T est un isomorphisme, u_M est un isomorphisme pour chaque $M \in \mathrm{add}\, T$.

Appliquant $\mathrm{Hom}_A(-, T)$ à la suite exacte courte $0 \to {}_AA \to T' \to T'' \to 0$ et tenant compte de ce que $\mathrm{Ext}^1_A(T, T) = 0$, nous obtenons la suite exacte courte

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(T'', T) \to \mathrm{Hom}_A(T', T) \to T \to 0.$$

Appliquant ensuite $\mathrm{Hom}_B(-,T)$ et tenant compte de ce que $\mathrm{Hom}_A(T',T)$ est un B-module projectif, nous obtenons l'exactitude de la seconde ligne du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & T' \arrow[r] \arrow[d, "u_{T'}"] & T'' \arrow[r] \arrow[d, "u_{T''}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{End}_B(T) \arrow[r] & H(T') \arrow[r] & H(T'') \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_B(T,T) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Les deux flèches verticales $u_{T'}$ et $u_{T''}$ étant des isomorphismes, nous obtenons les deux résultats souhaités $A \cong \mathrm{End}_B(T)$ et $\mathrm{Ext}^1_B(T,T) = 0$. $\square$

Les équivalences de Morita se composent ; elles forment même un groupoïde. Au contraire, la composée de deux basculements n'est pas un basculement, au sens où nous les avons étudiés. Un remède consiste à se placer dans le cadre des catégories dérivées et à parler de complexe basculant. C'est dans ce cadre que la théorie manifeste tout son potentiel.

6 Théorie d'Auslander-Reiten

Le théorème de Krull–Schmidt–Azumaya ramène l'étude des modules de longueur finie sur un anneau A à celle des modules indécomposables. La théorie d'Auslander–Reiten montre que lorsque A est une algèbre de dimension finie sur un corps k, l'ensemble des modules indécomposables possède une structure : c'est l'ensemble des sommets d'un carquois valué muni d'une translation. L'objectif de cette section est d'expliquer cette structure.

6.1 Introduction et exemples

On se place sur un anneau A. Considérons une sous-catégorie pleine $\mathscr{C}$ de la catégorie des A-modules de longueur finie, additive et stable par facteur direct (ces conditions garantissent que les anneaux d'endomorphismes des objets indécomposables de $\mathscr{C}$ sont locaux), et reprenons notre étude du radical R de $\mathscr{C}$.

Observation.

(1) Si X et M sont deux modules dans $\mathscr{C}$ avec X indécomposable, alors $R(X,M)$ est l'ensemble des homomorphismes de X dans M qui ne sont pas des monomorphismes scindés, et $R(M,X)$ est l'ensemble des homomorphismes de M dans X qui ne sont pas des épimorphismes scindés.

(2) Si X et Y sont deux modules indécomposables, alors $R(X,Y)$ est l'ensemble des homomorphismes de X dans Y qui ne sont pas des isomorphismes ; en particulier $R(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$ si X et Y ne sont pas isomorphes.

Preuve. Soit X et M deux objets de $\mathscr{C}$ et supposons X indécomposable. Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,M)$ est un monomorphisme scindé, alors il existe $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,X)$ tel que $g \circ f = \mathrm{id}_X$; ici certainement $\mathrm{id}_X - g \circ f$ n'est pas inversible (parce que $X \neq \{0\}$), et donc $f \notin R(X,M)$.

Inversement si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, M)$ n'est pas un monomorphisme scindé, alors pour tout $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M, X)$, l'endomorphisme $g \circ f$ n'est pas un automorphisme de X, donc est dans le radical de l'anneau local $\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(X)$, et donc $\mathrm{id}_X - g \circ f$ est inversible ; ainsi $f \in R(X, M)$.

Ceci démontre la première équivalence dans (1). La seconde lui est analogue, et (2) peut se voir comme un cas particulier de l'une ou l'autre. □

La proposition 5.2.2 affirme que R est un idéal de $\mathscr{C}$ au sens de la définition suivante.

Définition. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie pré-additive.

(1) Un **idéal** J de $\mathscr{C}$ est la donnée d'un sous-groupe $J(M, N)$ de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M, N)$, pour chaque couple (M, N) d'objets de $\mathscr{C}$, telle que pour tout morphisme $f \in J(M, N)$, tout morphisme $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M', M)$ et tout morphisme $h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(N, N')$, on ait $fg \in J(M', N)$ et $hf \in J(M, N')$.
(2) Soit J un idéal de $\mathscr{C}$. La **catégorie quotient** $\mathscr{C}/J$ possède les mêmes objets que la catégorie $\mathscr{C}$, et a pour morphismes les groupes $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}/J}(M, N) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M, N)/J(M, N)$, pour chaque couple (M, N) d'objets de $\mathscr{C}$.

L'avantage de considérer la catégorie quotient $\mathscr{C}/R$ est qu'elle isole les indécomposables : $\mathrm{End}_{\mathscr{C}/R}(X)$ est un anneau à division si X est indécomposable et $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}/R}(X, Y) = 0$ si X et Y sont indécomposables non-isomorphes. Nous retrouvons ainsi une situation analogue à celle décrite par le lemme de Schur pour les modules simples.

Nous pouvons même être plus précis : soit M et X deux modules de longueur finie tels que X soit indécomposable. Notons T_X l'anneau à division $\mathrm{End}_{\mathscr{C}/R}(X)$. Alors $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}/R}(M, X)$ est un T_X-espace vectoriel à gauche, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}/R}(X, M)$ est un T_X-espace vectoriel à droite, et ces deux espaces vectoriels sont de dimension égale au nombre de facteurs directs isomorphes à X dans une décomposition de Krull–Schmidt–Azumaya de M.

Le théorème 4.5.3 affirme qu'une algèbre A de dimension finie basique sur un corps k algébriquement clos est un quotient admissible de l'algèbre des chemins du carquois de A. Ce carquois est une donnée combinatoire intrinsèquement attachée à A. La définition que nous en avons donné dans le paragraphe 4.5 consiste à choisir des idempotents primitifs e_1, ..., e_n deux à deux orthogonaux et de somme 1, prendre $[\![1, n]\!]$ comme ensemble de sommets, et mettre $\dim_k e_j(\mathfrak{r}/\mathfrak{r}^2)e_i$ flèches de i vers j, où $\mathfrak{r}$ est le radical de Jacobson de A. L'opération de quotient par $\mathfrak{r}^2$ permet ici de supprimer des générateurs redondants, qui peuvent être réalisés par des chemins de longueur au moins 2.

Selon la philosophie de la section 5.1, la notion d'anneau est un cas particulier de la notion de catégorie pré-additive, et la question se pose de généraliser le théorème 4.5.3 à notre catégorie $\mathscr{C}$. Supposons qu'à isomorphisme près, $\mathscr{C}$ contienne un nombre fini de modules indécomposables, disons X_1, ..., X_n. Le module basique $X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$ contient alors toute l'information, puisque $\mathscr{C} = \mathrm{add}\, X$. La donnée de la catégorie $\mathscr{C}$ est alors essentiellement celle de l'anneau $\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(X)$.

La façon de voir une algèbre A basique de dimension finie dans ce cadre consiste à prendre pour $\mathscr{C}$ la catégorie des A-modules *à droite* projectifs de type fini. Avec ce choix les objets indécomposables de $\mathscr{C}$ sont les $X_i = e_iA$, le module basique X est le module *à droite* régulier, et ainsi l'anneau $\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(X)$ de l'alinéa précédent est notre anneau A. Nous observons que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X_i, X_j) = e_j A e_i$ et $R(X_i, X_j) \cong e_j \mathfrak{r} e_i$.

Ceci nous encourage à définir le carquois de notre catégorie $\mathscr{C}$ de la façon suivante : les sommets sont les objets indécomposables de $\mathscr{C}$, et pour chaque couple (X, Y) de sommets, on dessine $\dim R(X,Y)/R^2(X,Y)$ flèches de X vers Y. Il faut ici clarifier la signification de $R^2(X,Y)$.

Définition. Le **carré de l'idéal** R est défini de la façon suivante : pour deux modules M et N dans $\mathscr{C}$, on note $R^2(M,N)$ le sous-groupe de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,N)$ formé des homomorphismes ayant une factorisation de la forme $g \circ f$ avec $f \in R(M,Q)$, $g \in R(Q,N)$, et Q un module dans $\mathscr{C}$.

Remarques.

(1) L'ensemble des éléments de la forme indiquée est bien un sous-groupe. Pour montrer par exemple la stabilité sous l'opération d'addition, on prend deux éléments de la forme proposée, disons $g_1 \circ f_1$ et $g_2 \circ f_2$, avec $f_i \in R(M, Q_i)$ et $g_i \in R(Q_i, N)$, on pose $Q = Q_1 \oplus Q_2$, on définit $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,Q)$ et $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Q,N)$ par les matrices par blocs

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \end{pmatrix},$$

on utilise le corollaire 5.2.3 pour justifier que $f \in R(M,Q)$ et $g \in R(Q,N)$, et on constate que $g_1 \circ f_1 + g_2 \circ f_2 = g \circ f$.

(2) Le sous-groupe $R(M,N)$, pour M, N dans $\mathscr{C}$, ne dépend pas de $\mathscr{C}$, la sous-catégorie de la catégorie des A-modules de longueur finie que nous nous sommes donnée. En revanche $R^2(M,N)$ en dépend, parce que dans la définition ci-dessus le module Q doit appartenir à $\mathscr{C}$.

(3) Pour préciser la remarque précédente, supposons que A soit une algèbre de dimension finie sur un corps, notons $\mathscr{C}$ la catégorie des A-modules de longueur finie, et notons $\mathscr{P}$ la catégorie des A-modules projectifs de type fini. Le radical $R_{\mathscr{P}}$ de $\mathscr{P}$ est la restriction à $\mathscr{P}$ du radical $\mathscr{R}_{\mathscr{C}}$ de $\mathscr{C}$.

Si X est un module de type fini indécomposable, alors $(R_{\mathscr{C}})^2(X,X) = R_{\mathscr{C}}(X,X)$ (voir l'exercice ci-dessous) : ceci implique que la carquois d'Auslander–Reiten de A ne contient pas de boucle (flèche allant d'un sommet vers ce même sommet). Cependant, supposant en outre X projectif, le groupe $(R_{\mathscr{P}})^2(X,X)$ est généralement strictement inclus dans $R_{\mathscr{P}}(X,X)$: le carquois de Gabriel de A peut contenir des boucles.

On démontre cependant facilement que si A est héréditaire, alors $(R_{\mathscr{P}})^2$ est la restriction à $\mathscr{P}$ de $(R_{\mathscr{C}})^2$. Dans ce cas le carquois de Gabriel de A est l'opposé de la restriction aux sommets projectifs du carquois d'Auslander–Reiten de A [12].

12. Devoir inverser toutes les flèches du carquois vient de ce que plus haut, nous avons réalisé le carquois de Gabriel de A comme le carquois de la catégorie des A-modules *à droite* projectifs de type fini. Or ici nous considérons la restriction aux sommets projectifs du carquois d'Auslander–Reiten : nous regardons donc la catégorie des A-modules *à gauche* projectifs de type fini. Ces deux catégories, échangées par le foncteur dualité $\mathrm{Hom}_A(-, A)$, sont mutuellement opposées.

Exercice. On prend pour $\mathscr{C}$ la catégorie de tous les A-modules de longueur finie. Prouver que si X est un A-module indécomposable, alors $R^2(X, X) = R(X, X)$.
(Indication : un endomorphisme $f \in \operatorname{End}_A(X)$ qui n'est pas un automorphisme se factorise en un produit $h \circ g$ avec $g \in R(X, \operatorname{im} f)$ et $h \in R(\operatorname{im} f, X)$.)

Dans la suite, A sera une algèbre de dimension finie sur un corps k et $\mathscr{C}$ sera la catégorie A-mod des A-modules de type fini (ou de longueur finie, ou de dimension finie sur k, c'est ici la même chose).

Notations et définition.

(1) Si X est un A-module indécomposable, on note $T_X = \operatorname{End}_A(X)/R(X, X)$ le quotient de l'algèbre locale $\operatorname{End}_A(X)$ par son radical de Jacobson ; c'est une algèbre à division.

(2) Pour deux A-modules indécomposables X, Y, on note $\operatorname{Irr}(X, Y) = R(X, Y)/R^2(X, Y)$. Cet espace est appelé l'espace des morphismes irréductibles de X dans Y ; c'est un T_Y-T_X-bimodule.

(3) Le **carquois d'Auslander–Reiten** de A a pour sommets les classes d'isomorphisme de A-modules indécomposables. On met une flèche du sommet X vers le sommet Y si $\operatorname{Irr}(X, Y) \neq \{0\}$; dans ce cas, on la décore par le couple d'entiers (r, s), où r (respectivement, s) est la dimension de $\operatorname{Irr}(X, Y)$ vu comme espace vectoriel sur T_X (respectivement, T_Y).

6.1.1 Un premier exemple

Ici A est l'algèbre des chemins du carquois $1 \xrightarrow{a} 2 \underset{c}{\overset{b}{\rightleftarrows}} 3$ avec la relation $cb = 0$. On note que $I = (cb)$ est un idéal admissible de l'algèbre du carquois sans relation ; en particulier A est de dimension finie et son radical de Jacobson est engendré par les flèches ; il y a donc trois A-modules simples S_1, S_2, S_3, chaque S_i étant de dimension 1 concentré sur le sommet i.

Les couvertures projectives peuvent être représentées par les dessins suivants, où chaque chiffre désigne un vecteur de base dans l'espace d'indice correspondant :

$$P_1 \ : \ 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3, \qquad P_2 \ : \ 2 \xrightarrow{b} 3, \qquad P_3 \ : \ \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & 3 \arrow[dl, "c"'] \\ 2 \arrow[dr, "b"'] & \\ & 3 \end{tikzcd}$$

Les enveloppes injectives peuvent quant à elles être représentées ainsi :

$$I_1 = S_1, \qquad I_2 \ : \ 1 \xrightarrow{a} 2 \xleftarrow{c} 3, \qquad I_3 \ : \ \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & & 3 \arrow[dl, "c"'] \\ 1 \arrow[r, "a"] & 2 \arrow[dr, "b"'] & \\ & & 3 \end{tikzcd}$$

Il y a trois autres modules indécomposables :

$$M \ : \ 1 \xrightarrow{a} 2, \qquad N \ : \ 2 \xleftarrow{c} 3, \qquad Q \ : \ \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] 1 \arrow[dr, "a"] \arrow[ddr, "a"'] & & 3 \arrow[dl, "c"'] \\ & 2 \arrow[dr, "b"] & \\ & 2 & 3 \end{tikzcd}$$

(Dans Q, la flèche a envoie le vecteur de base de l'espace 1 sur la somme des deux vecteurs de base de l'espace 2 indiqués sur la figure, qui engendrent l'un l'image de c, l'autre le noyau de b.)

Toutes les algèbres à division $T_X = \mathrm{End}_A(X)/J(\mathrm{End}_A(X))$ de cet exemple sont réduites à k. Pour $X \in \{P_3, I_3, Q\}$, l'algèbre locale $\mathrm{End}_A(X)$ est de dimension 2 sur k.

On calcule ensuite à la main, pour chaque paire (X, Y) de A-modules indécomposables, les dimensions des espaces $\mathrm{Irr}(X, Y)$.

Détaillons un exemple. Comme P_2 et Q ne sont pas isomorphes, on a $R(P_2, Q) = \mathrm{Hom}_A(P_2, Q)$. D'après la proposition 4.2.5, cet espace est de dimension 2. Une base est donnée par les deux morphismes f et g définis ainsi : f envoie la tête de P_2 sur le 2 de Q apparaissant comme l'image de c, et envoie le 3 du P_2 sur le 3 dans le socle de Q ; quant à lui g envoie le 2 du P_2 sur le 2 dans le socle de Q et envoie le 3 du P_2 sur zéro.

On voit alors que f se factorise à travers P_3, tandis que g se factorise à travers S_2. Ainsi f et g appartiennent tous les deux à $R^2(P_2, Q)$. Le quotient $\mathrm{Irr}(P_2, Q) = R(P_2, Q)/R^2(P_2, Q)$ est donc nul.

Les calculs donnent la table suivante pour la dimension des espaces $\mathrm{Irr}(X, Y)$.

	S_1	S_2	S_3	M	P_1	P_2	N	I_2	P_3	I_3	Q
S_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
S_3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
M	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
P_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
P_2	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0
N	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
I_2	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
P_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
I_3	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
Q	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0

Cela permet de dessiner le carquois d'Auslander–Reiten.

$$\begin{tikzcd}
 & & & P_1 \arrow[dr] & & N \arrow[ll, dotted] \arrow[dr] & & S_1 \arrow[ll, dotted] & \\
 & & P_2 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ddr] & & Q \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ddr] & & I_2 \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] \arrow[ddr] & & \\
 {} \arrow[r, equal] & S_3 \arrow[ur] & & S_2 \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] & & I_3 \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] & & & \\
 & & & P_3 \arrow[uur] & & M \arrow[ll, dotted] \arrow[uur] & & S_3 \arrow[ll, dotted] \arrow[r, equal] & {}
\end{tikzcd}$$

On se rappellera ici que $I_1 = S_1$. Les troisième et quatrième lignes n'en font en fait qu'une, car elles doivent être recollées au niveau de S_3.

La présentation graphique adoptée révèle une structure étonnante : il existe une bijection τ (indiquée ici en pointillés) de l'ensemble des indécomposables non-projectifs sur l'ensemble des indécomposables non-injectifs telle que

$$\dim \operatorname{Irr}(\tau X, Y) = \dim \operatorname{Irr}(Y, X)$$

pour chaque paire d'indécomposables (X, Y) telle que X soit non-projectif. Chaque ligne du carquois d'AR correspond à une orbite selon τ ; elle part d'un sommet injectif et arrive à un sommet projectif.

6.1.2 Un deuxième exemple

Ici on examine le cas de l'algèbre A du carquois $\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[rr, bend right, "c"'] & 2 \arrow[r, bend left, "b"] & 3 \end{tikzcd}$ avec la relation $ba = 0$. Il y a neuf indécomposables : les trois simples S_1, S_2, S_3, leurs couvertures projectives et enveloppes injectives

$$P_1 \ : \ \begin{tikzcd}[row sep=small] 1 \arrow[dr, "a"] \arrow[dd, "c"'] & \\ & 2 \\ 3 & \end{tikzcd}, \qquad P_2 \ : \ 2 \xrightarrow{b} 3, \qquad P_3 = S_3, \qquad I_1 = S_1, \qquad I_2 \ : \ 1 \xrightarrow{a} 2, \qquad I_3 \ : \ \begin{tikzcd}[row sep=small] 1 \arrow[dd, "c"'] & \\ & 2 \arrow[dl, "b"] \\ 3 & \end{tikzcd}$$

ainsi que

$$M \ : \ 1 \xrightarrow{c} 3 \qquad \text{et} \qquad N \ : \ \begin{tikzcd}[row sep=small] 1 \arrow[dr, "a"] \arrow[dd, "c"'] & & \\ & 2 & 2 \arrow[dll, bend left, "b"] \\ 3 & & \end{tikzcd}$$

La dimension des espaces $\operatorname{Irr}(X, Y)$ est donnée dans la table ci-dessous.

	S_1	S_2	S_3	P_1	P_2	I_2	I_3	M	N
S_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S_2	0	0	0	1	0	0	0	0	0
S_3	0	0	0	1	1	0	0	0	0
P_1	0	0	0	0	0	0	0	1	1
P_2	0	0	0	0	0	0	0	0	1
I_2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
I_3	1	1	0	0	0	0	0	0	0
M	0	0	0	0	0	0	1	0	0
N	0	0	0	0	0	1	1	0	0

Nous pouvons alors dessiner le carquois d'Auslander–Reiten.

$$\begin{tikzcd}
 & & P_2 \arrow[dr] & & I_2 \arrow[dr] \arrow[ll, dotted] & & \\
 & S_3 \arrow[ur] \arrow[dr] & & N \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ll, dotted] & & S_1 \arrow[ll, dotted] & \\
 & & P_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & I_3 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ll, dotted] & & \\
 {} \arrow[r, equal] & S_2 \arrow[ur] & & M \arrow[ur] \arrow[ll, dotted] & & S_2 \arrow[ll, dotted] \arrow[r, equal] & {}
\end{tikzcd}$$

À nouveau, la bijection τ apparaît. Mais, en plus des lignes partant d'un sommet injectif et arrivant à un sommet projectif (pour rappel, $I_1 = S_1$ et $P_3 = S_3$), il existe ici une τ-orbite périodique ne contenant ni injectif ni projectif.

Nous pourrions traiter d'autres exemples, y compris pour des algèbres ayant un nombre infini de classes d'isomorphisme de modules indécomposables. La structure persiste, mais il peut alors également apparaître des τ-orbites semi-infinies à gauche (partant d'un indécomposable injectif), semi-infinies à droite (arrivant à un indécomposable projectif), ou infinies dans les deux directions (et ne contenant ni indécomposable injectif ni indécomposable projectif).

6.2 Formalisation : morphismes presque scindés minimaux

Tentons maintenant de formaliser les observations tirées de nos études d'exemples.

Définition.

(1) Soit Y un A-module indécomposable. Un homomorphisme $g : E \to Y$ est dit **presque scindé à droite** si $g \in R(E, Y)$ et si pour tout A-module M, l'application induite $\mathrm{Hom}_A(M, g) : \mathrm{Hom}_A(M, E) \to R(M, Y)$ est surjective.

(2) Soit X un A-module indécomposable. Un homomorphisme $f : X \to E$ est dit **presque scindé à gauche** si $f \in R(X, E)$ et si pour tout A-module M, l'application induite $\mathrm{Hom}_A(f, M) : \mathrm{Hom}_A(E, M) \to R(X, M)$ est surjective.

Ces conditions demandent, sur les figures ci-dessous, que pour n'importe quel choix de flèche h dans $R(M, Y)$ ou $R(X, M)$, il existe $\tilde{h}$ dans $\mathrm{Hom}_A(M, E)$ ou $\mathrm{Hom}_A(E, M)$ faisant commuter le diagramme.

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, dashed, "\tilde{h}"'] \arrow[d, "h"] \\
E \arrow[r, "g"'] & Y
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & E \arrow[dl, dashed, "\tilde{h}"] \\
M &
\end{tikzcd}$$

Pour présenter ces notions, on parle généralement de morphisme qui n'est pas un épimorphisme scindé ou pas un monomorphisme scindé ; l'observation au début de la section 6.1 assure que notre définition est identique à la définition classique.

Si $g : E \to Y$ est presque scindé à droite, alors $\mathrm{Hom}_A(M, g)$ induit par passage au quotient une application surjective $\mathrm{Hom}_A(M, E)/R(M, E) \to \mathrm{Irr}(M, Y)$. Étudions dans quel cas cette application est bijective.

6.2.1 Proposition. *Soit $g : E \to Y$ un morphisme presque scindé à droite. Les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) Pour tout A-module M, l'application $\mathrm{Hom}_A(M, E)/R(M, E) \to \mathrm{Irr}(M, Y)$ induite par $\mathrm{Hom}_A(M, g)$ est bijective.

(ii) Tout endomorphisme $h \in \mathrm{End}_A(E)$ tel que $g = g \circ h$ est un automorphisme.

(iii) Si un homomorphisme $h : F \to Y$ est presque scindé à droite, alors il existe un épimorphisme scindé $\tilde{h} : F \to E$ tel que $h = g \circ \tilde{h}$.

(iv) E est de dimension minimale parmi les modules tels qu'il existe un morphisme presque scindé à droite $g : E \to Y$.

(v) $\ker g$ ne contient pas de facteur direct non-nul de E.

Preuve. Supposons (i). Soit $h \in \mathrm{End}_A(E)$ tel que $g = g \circ h$. Alors $g \circ (\mathrm{id}_E - h) = 0$. En prenant $M = E$ dans (i), on obtient $\mathrm{id}_E - h \in R(E, E)$, c'est-à-dire $\mathrm{id}_E - h \in J(\mathrm{End}_A(E))$. Ceci entraîne que h est inversible dans $\mathrm{End}_A(E)$. (ii) est donc vrai.

Réciproquement, supposons (ii) et montrons que (i) est vrai. Soit $h : M \to E$ tel que l'image de $g \circ h$ dans $\mathrm{Irr}(M, Y)$ soit nulle ; nous voulons établir que $h \in R(M, E)$. Par hypothèse donc, $g \circ h \in R^2(M, Y)$: il existe un A-module N et des morphismes $l \in R(M, N)$ et $m \in R(N, Y)$ tels que $g \circ h = m \circ l$. On peut alors factoriser $m = g \circ \widetilde{m}$ où $\widetilde{m} \in \mathrm{Hom}_A(N, E)$, ce qui donne $g \circ (h - \widetilde{m} \circ l) = 0$. Pour tout homomorphisme $n \in \mathrm{Hom}_A(E, M)$, on a alors $g = g \circ (\mathrm{id}_E - (h - \widetilde{m} \circ l) \circ n)$, et grâce à (ii), on obtient que l'endomorphisme $\mathrm{id}_E - (h - \widetilde{m} \circ l) \circ n$ est inversible. C'est là la définition de $h - \widetilde{m} \circ l \in R(M, E)$. Comme $l \in R(M, N)$, ceci entraîne que $h \in R(M, E)$, comme désiré.

Démontrons à présent (ii) $\Rightarrow$ (iii). Supposons (ii) et considérons un morphisme presque scindé à droite $h : F \to Y$. Comme g est presque scindé à droite, il existe $\tilde{h} : F \to E$ tel que $h = g \circ \tilde{h}$. Comme h est presque scindé à droite, il existe $\tilde{g} : E \to F$ tel que $g = h \circ \tilde{g}$. Ainsi $g = g \circ (\tilde{h} \circ \tilde{g})$, et (ii) entraîne que $\tilde{h} \circ \tilde{g}$ est un automorphisme de E. En particulier, $\tilde{h}$ est un épimorphisme scindé. (iii) est vrai.

Les implications (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) sont banales.

Supposons enfin (v) et prouvons (ii). Soit $h \in \mathrm{End}_A(E)$ tel que $g = g \circ h$. Écrivons la décomposition de Fitting de E par rapport à h : $E = E_0 \oplus E_1$ où E_0 et E_1 sont stables par h, la restriction de h à E_0 est nilpotente, et la restriction de h à E_1 est un automorphisme. L'égalité $g = g \circ h^n$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, conduit à l'inclusion $E_0 \subset \ker g$. (v) requiert alors $E_0 = 0$, d'où $E_1 = E$ et h est un automorphisme de E. (ii) est vrai. $\square$

Définition. Étant donné un A-module indécomposable Y, un **morphisme puits** $g : E \to Y$ est un morphisme presque scindé à droite vérifiant les énoncés de la proposition 6.2.1.

6.2.2 Théorème. *Si $g : E \to Y$ et $h : F \to Y$ sont deux morphismes puits, alors il existe un isomorphisme $\tilde{h} : F \to E$ tel que $h = g \circ \tilde{h}$.*

Preuve. La démonstration est quasiment identique à celle de l'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) dans la proposition 6.2.1, dont nous reprenons les notations. La différence est que non seulement $\tilde{h} \circ \tilde{g}$ est un automorphisme de E (parce que g est un morphisme puits), mais aussi $\tilde{g} \circ \tilde{h}$ est un automorphisme de F (parce que h est un morphisme puits). Ceci garantit que $\tilde{h}$ est un isomorphisme. $\square$

Les énoncés précédents admettent des versions duales, conduisant à la définition suivante.

Définition. Pour X un A-module indécomposable, un **morphisme source** $f : X \to E$ est un morphisme presque scindé à gauche tel que pour tout A-module M, l'application $\operatorname{Hom}_A(E, M)/R(E, M) \to \operatorname{Irr}(X, M)$ induite par $\operatorname{Hom}_A(f, M)$ est bijective.

Prenons un morphisme source $f : X \to E$ et un A-module indécomposable Z. L'application bijective $\operatorname{Hom}_A(E, Z)/R(E, Z) \to \operatorname{Irr}(X, Z)$ est alors un isomorphisme de T_Z-espaces vectoriels à gauche. (En effet, des deux côtés de l'isomorphisme, l'action de T_Z provient de la composition à gauche par les éléments de $\operatorname{End}_A(Z)$.) De cette constation, on déduit que la dimension de $\operatorname{Irr}(X, Z)$ en tant que T_Z-espace vectoriel est égale à celle de $\operatorname{Hom}_A(E, Z)/R(E, Z)$, c'est-à-dire à la multiplicité de Z dans une décomposition de Krull–Schmidt–Azumaya de E.

De même, si $g : E \to Y$ est un morphisme puits et Z un A-module indécomposable, alors la multiplicité de Z dans une décomposition de Krull–Schmidt–Azumaya de E est égale à la dimension de $\operatorname{Irr}(Z, Y)$ en tant que T_Z-espace vectoriel à droite.

Nous terminons cette section par deux exemples.

Exemples.

(1) Soit P un A-module indécomposable. La tête $P/\operatorname{rad} P$ étant simple, le radical $\operatorname{rad} P$ contient tous les sous-modules propres de P (voir l'exercice (2) du paragraphe 1.4). Un homomorphisme d'un A-module M dans P est ainsi soit surjectif — et dans ce cas c'est un épimorphisme scindé parce que P est projectif, soit d'image incluse dans $\operatorname{rad} P$. Par conséquent, $R(M, P)$ est l'ensemble des homomorphismes de M dans P qui se factorisent à travers l'homomorphisme d'inclusion $\operatorname{rad} P \to P$. Ce dernier est donc le morphisme puits arrivant en P.

(2) De façon duale, si I est un A-module injectif indécomposable, le morphisme quotient $I \to I/\operatorname{soc} I$ est le morphisme source partant de I.

L'existence d'un morphisme presque scindé à gauche partant d'un indécomposable non-injectif ou d'un morphisme presque scindé à droite arrivant à un indécomposable non-projectif n'est en revanche pas évidente en générale. (La difficulté est que nous devons rester dans la catégorie des A-modules de longueur finie, alors qu'il y a en général une infinité de classes d'isomorphisme de modules indécomposables.) Pourtant, les morphismes sources et puits existent, et même se combinent pour former des suites exactes courtes, révélant l'existence de la bijection τ. Pour prouver ces faits, il nous faut prendre l'histoire par un autre bout et construire τ par un procédé complètement différent.

6.3 Catégories stables

Si M et N sont deux A-modules, on note $P(M,N)$ l'ensemble des morphismes $M \to N$ qui se factorisent à travers un module projectif : $f \in P(M,N)$ s'il existe un A-module projectif Q et des homomorphismes $g \in \mathrm{Hom}_A(M,Q)$ et $h \in \mathrm{Hom}_A(Q,N)$ tels que $f = h \circ g$.

Il est évident que $P(-,-)$ est un idéal de la catégorie A-mod, au sens de la définition du paragraphe 6.1.

Définition. Pour M et N deux A-modules, on pose $\underline{\mathrm{Hom}}(M,N) = \mathrm{Hom}_A(M,N)/P(M,N)$. On note A-$\underline{\mathrm{mod}}$ la catégorie quotient A-mod$/P$ et on l'appelle **catégorie stable**. Les objets de A-$\underline{\mathrm{mod}}$ sont ceux de A-mod mais les espaces de morphismes sont les $\underline{\mathrm{Hom}}(M,N)$.

Dans la catégorie stable, les modules projectifs deviennent tous isomorphes à l'objet 0, l'objet initial et final de la catégorie : $\underline{\mathrm{Hom}}(0,M) = \underline{\mathrm{Hom}}(M,0) = \{0\}$ pour tout objet M. Au contraire, les modules indécomposables non-projectifs restent indécomposables et deux à deux non-isomorphes dans A-$\underline{\mathrm{mod}}$.

6.3.1 Proposition.

(i) L'image dans la catégorie stable d'un A-module indécomposable non-projectif X est encore indécomposable, au sens où son anneau d'endomorphismes $\underline{\mathrm{End}}(X)$ est local.

(ii) Deux A-modules M et N ont des images isomorphes dans la catégorie stable si et seulement s'il existe des A-modules projectifs P et Q tels que $M \oplus P \cong N \oplus Q$.

Preuve. (i) Soit X un A-module indécomposable non-projectif. Il ne peut pas exister d'épimorphisme scindé d'un module projectif sur X. Par conséquent, un automorphisme de X ne peut pas se factoriser à travers un module projectif, l'intersection dans $\mathrm{End}_A(X)$ de $\mathrm{Aut}_A(X)$ avec $P(X,X)$ est vide, et l'idéal $P(X,X)$ est inclus dans le radical de Jacobson de l'anneau local $\mathrm{End}_A(X)$. L'image de $\mathrm{Aut}_A(X)$ dans l'anneau quotient $\underline{\mathrm{End}}(X) = \mathrm{End}_A(X)/P(X,X)$ est certainement formée d'éléments inversibles, et le complémentaire de cette image est l'idéal $J(\mathrm{End}_A(X))/P(X,X)$. Nous concluons que $\underline{\mathrm{End}}(X)$ est un anneau local, de radical de Jacobson $J(\mathrm{End}_A(X))/P(X,X)$.

(ii) Supposons qu'il existe des homomorphismes $f : M \to N$ et $g : N \to M$ tels que

$$g \circ f - \mathrm{id}_M \in P(M,M) \quad \text{et} \quad f \circ g - \mathrm{id}_N \in P(N,N).$$

Du premier point, on déduit l'existence d'un A-module projectif Q et de deux homomorphismes $\tilde{f} : M \to Q$ et $\tilde{g} : Q \to M$ tels que la composée

$$M \xrightarrow{\binom{f}{\tilde{f}}} N \oplus Q \xrightarrow{(g\ \tilde{g})} M$$

soit l'identité de M. Alors la flèche de droite est un épimorphisme scindé : M est un facteur direct de $N \oplus Q$, autrement dit il existe un A-module P tel que $M \oplus P \cong N \oplus Q$. De la même façon, le fait que $f \circ g - \mathrm{id}_N$ appartienne à $P(N,N)$ entraîne l'existence d'un A-module projectif R tel que N soit un facteur direct de $M \oplus R$. Nous voyons alors que $N \oplus P$ est un facteur direct de $N \oplus Q \oplus R$. Le théorème de Krull–Schmidt–Azumaya garantit alors que P est un facteur direct de $Q \oplus R$ donc est un module projectif. $\square$

De façon similaire, pour deux A-modules M et N, on note $I(M,N)$ l'ensemble des homomorphismes $M \to N$ qui se factorisent à travers un module injectif. Alors $I(-,-)$ est un idéal de la catégorie A-mod. On pose $\overline{\mathrm{Hom}}(M,N) = \mathrm{Hom}_A(M,N)/I(M,N)$ et on note A-$\overline{\mathrm{mod}}$ la catégorie quotient A-mod$/I$; les espaces de morphismes de A-$\overline{\mathrm{mod}}$ sont les $\overline{\mathrm{Hom}}(M,N)$. Dans A-$\overline{\mathrm{mod}}$, ce sont les A-modules injectifs qui deviennent tous isomorphes à l'objet 0.

L'observation suivante nous sera utile dans la prochaine section ; elle découle du fait que $\mathrm{Ext}^1_A(M,N) = 0$ si M est projectif ou N est injectif.

Observation. $\mathrm{Ext}^1_A(-,-)$ descend en un bifoncteur de $(A\text{-}\underline{\mathrm{mod}})^{\mathrm{op}} \times A\text{-}\overline{\mathrm{mod}}$ vers la catégorie des groupes abéliens (en fait ici des k-espaces vectoriels).

Exercice. Soit M et N deux A-modules et $g : M \to I$ un monomorphisme avec I injectif.

(i) Prouver pour tout homomorphisme $f : M \to N$ l'équivalence entre les énoncés suivants :

  (a) f se factorise à travers un injectif.

  (b) Pour chaque monomorphisme $h : M \to L$, il existe un homomorphisme $t : L \to N$ tel que $f = t \circ h$.

  (c) Il existe un homomorphisme $t : I \to N$ tel que $f = t \circ g$.

(ii) En déduire que $\overline{\mathrm{Hom}}(M,N)$ est le conoyau de l'application linéaire

$$\mathrm{Hom}(g,N) : \mathrm{Hom}_A(I,N) \to \mathrm{Hom}_A(M,N).$$

6.4 Transposition d'Auslander–Bridger et translation d'Auslander–Reiten

Reprenant la notation de la section 5, nous notons A-proj la sous-catégorie pleine de A-mod formée des A-modules à gauche projectifs de type fini. De même, nous notons $\mathrm{add}\, A_A$ la sous-catégorie pleine de A^{op}-mod formée des A-modules à droite projectifs de type fini.

Définition. Une **dualité** entre deux catégories $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ est une équivalence de catégorie de $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ sur $\mathscr{B}$, c'est-à-dire un foncteur *contravariant*, fidèle, plein et essentiellement surjectif.

6.4.1 Proposition. *Le foncteur* $\mathrm{Hom}_A(-,A)$ *est une dualité entre les catégories* A-proj *et* $\mathrm{add}\, A_A$.

Ici la structure de A-module à droite sur $\mathrm{Hom}_A(P,A)$ pour $P \in A$-proj vient de l'action à droite de A sur l'espace d'arrivée : si $f \in \mathrm{Hom}_A(P,A)$ et $a \in A$, alors $f \cdot a$ est l'homomorphisme $x \mapsto f(x)a$.

Preuve. La preuve est complètement analogue à celle de la proposition 5.4.1 ; la seule différence est qu'ici nous avons affaire à un foncteur contravariant. □

Suivant la coutume, nous noterons cette dualité $(-)^*$ [13]. Cherchons à présent à l'étendre à la catégorie $\mathrm{fp}_A A$ des modules admettant une présentation par des modules projectifs de type fini [14]. On ne peut pas adapter la preuve du théorème 5.4.4 au cas d'un foncteur contravariant, mais on obtient un résultat intéressant en passant aux catégories stables.

6.4.2 Théorème. $(-)^*$ *induit une dualité* Tr *entre les catégories* A-$\underline{\mathrm{mod}}$ *et* A^{op}-$\underline{\mathrm{mod}}$.

Preuve. Soit M un A-module. Prenons une présentation projective $M = \mathrm{coker}(p : P_1 \to P_0)$. Le conoyau de $p^* : P_0^* \to P_1^*$ dépend du choix de cette présentation. Cependant, si l'on utilise une autre présentation projective, disons $M = \mathrm{coker}(q : Q_1 \to Q_0)$, alors il existe *dans la catégorie stable* un isomorphisme préféré $\mathrm{coker}\, q^* \cong \mathrm{coker}\, p^*$. (Nous justifierons cette affirmation plus bas.) Ainsi l'objet $\mathrm{coker}\, p^*$ est canonique (c'est-à-dire unique à unique isomorphisme près) dans la catégorie stable A^{op}-$\underline{\mathrm{mod}}$. Il est alors légitime [15] de reconnaître son existence en lui dédiant une notation, $\mathrm{Tr}\, M$.

De plus, cette construction est fonctorielle : à un morphisme $f : M \to N$ et à des présentations projectives $M = \mathrm{coker}(p : P_1 \to P_0)$ et $N = \mathrm{coker}(r : R_1 \to R_0)$, il est possible d'associer un morphisme préféré $\mathrm{coker}\, r^* \to \mathrm{coker}\, p^*$ dans la catégorie stable, et cela de façon compatible avec la composition des morphismes. C'est cette construction qui, dans le cas $M = N$ et $f = \mathrm{id}_M$, fournit l'isomorphisme préféré auquel il a été fait référence plus haut : l'unicité et la compatibilité avec la composition garantissent que les composées $\mathrm{coker}\, q^* \to \mathrm{coker}\, p^* \to \mathrm{coker}\, q^*$ et $\mathrm{coker}\, p^* \to \mathrm{coker}\, q^* \to \mathrm{coker}\, p^*$ sont les identités de $\mathrm{coker}\, q^*$ et $\mathrm{coker}\, p^*$ dans la catégorie stable. Revenant au cas de $f : M \to N$, nous obtenons un homomorphisme $\mathrm{Tr}\, f : \mathrm{Tr}\, N \to \mathrm{Tr}\, M$ et concluons que Tr est un foncteur contravariant de la catégorie des A-modules vers la catégorie stable des A^{op}-modules. Il est enfin clair que si P est projectif, alors $\mathrm{Tr}\, P = 0$, de sorte que Tr descend en un foncteur de A-$\underline{\mathrm{mod}}$ vers A^{op}-$\underline{\mathrm{mod}}$.

La dernière étape de la démonstration est de justifier que Tr est fidèle, plein et essentiellement surjectif : ce fait s'obtient en construisant le foncteur inverse, qui n'est autre que Tr pour l'anneau A^{op}.

Il nous reste cependant à construire le morphisme préféré $\mathrm{coker}\, r^* \to \mathrm{coker}\, p^*$ annoncé plus haut lorsque l'on s'est donné un morphisme $f : M \to N$ et des présentations projectives $M = \mathrm{coker}(p : P_1 \to P_0)$ et $N = \mathrm{coker}(r : R_1 \to R_0)$. En utilisant la projectivité de P_0 et P_1, on peut trouver des homomorphismes $f_0 : P_0 \to R_0$ et $f_1 : P_1 \to R_1$ formant le diagramme commutatif ci-dessous.

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f_1"'] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ R_1 \arrow[r, "r"] & R_0 \arrow[r] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

13. La dualité $(-)^*$ peut être définie sur un anneau quelconque. C'est un fait général que si e est un idempotent de A, alors l'idéal à gauche Ae est un A-module projectif à gauche et $(Ae)^* = eA$. La dualité $(-)^*$ est donc particulièrement concrète dans le cas où l'anneau A est semi-primaire, car alors tous les A-modules projectifs de type fini sont sommes directes finies de modules de cette forme Ae.

14. Vu notre cadre de travail — A est une algèbre de dimension finie sur un corps, $\mathrm{fp}_A A$ coïncide avec la catégorie A-mod de tous les modules de longueur finie.

15. Le statut de cet objet est analogue à celui des objets définis par une propriété universelle ou à celui des objets obtenus en appliquant un foncteur dérivé.

Après dualisation on obtient

$$\begin{tikzcd} R_0^* \arrow[r, "r^*"] \arrow[d, "f_0^*"'] & R_1^* \arrow[r] \arrow[d, "f_1^*"] & \operatorname{coker} r^* \arrow[r] \arrow[d, dashed, "F"] & 0 \\ P_0^* \arrow[r, "p^*"] & P_1^* \arrow[r] & \operatorname{coker} p^* \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

et alors f_1^* induit un homomorphisme $F : \operatorname{coker} r^* \to \operatorname{coker} p^*$. Nous voulons (devons) nous assurer que F est indépendant du choix de f_0 et f_1. Considérons donc deux choix (f_0', f_1') et (f_0'', f_1''), donnant deux homomorphismes F' et F''. Soustrayons : $f_0 = f_0' - f_0''$, $f_1 = f_1' - f_1''$. Dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f_1"'] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] \arrow[dl, dashed, "s"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 \\ R_1 \arrow[r, "r"] & R_0 \arrow[r] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

f_0 est à valeurs dans $\operatorname{im} r$. Par projectivité de P_0, on peut factoriser $f_0 = rs$ comme indiqué dans le diagramme. On calcule alors $r(f_1 - sp) = (f_0 - rs)p = 0$, d'où $(f_1^* - p^*s^*)r^* = 0$. Par conséquent $f_1^* - p^*s^* : R_1^* \to P_1^*$ se factorise à travers $\operatorname{coker} r^*$ pour donner un morphisme $\operatorname{coker} r^* \to P_1^*$. Lorsqu'on compose par la surjection $P_1^* \to \operatorname{coker} p^*$, le terme p^*s^* disparaît, et l'on obtient le morphisme $\operatorname{coker} r^* \to \operatorname{coker} p^*$ induit par f_1^*, c'est-à-dire $F' - F''$. On voit de cette facon que $F' - F''$ se factorise à travers le projectif P_1^*, autrement dit que $F' = F''$ dans la catégorie stable A^{op}-$\underline{\mathrm{mod}}$. □

Durant la preuve du théorème, nous avons vu que $\mathrm{Tr} \circ \mathrm{Tr}$ est le foncteur identité de A-$\underline{\mathrm{mod}}$.

6.4.3 Corollaire. Tr *induit une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphisme de A-modules indécomposables non-projectifs sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de A^{op}-modules indécomposables non-projectifs.*

Notation. On note D la dualité $\mathrm{Hom}_k(M, k)$ de la catégorie des A-modules à gauche sur la catégorie des A-modules à droite (et réciproquement).

Concrètement, si M est un A-module à gauche et $a \in A$, alors l'action à droite de A sur $DM = \mathrm{Hom}_k(M, k)$ est donnée par $f \cdot a = (x \mapsto f(ax))$ pour tout $f \in \mathrm{Hom}_k(M, k)$. Observons que D est involutive : $D \circ D$ est simplement la bidualité des espaces vectoriels en dimension finie.

Il est banal que D échange les A-modules projectifs avec les A^{op}-modules injectifs et vice-versa. Par conséquent D induit deux dualités

$$A\text{-}\underline{\mathrm{mod}} \cong A^{\mathrm{op}}\text{-}\overline{\mathrm{mod}} \quad \text{et} \quad A\text{-}\overline{\mathrm{mod}} \cong A^{\mathrm{op}}\text{-}\underline{\mathrm{mod}}.$$

Définition. On appelle **translation d'Auslander–Reiten** et on note τ la composée $D\,\mathrm{Tr}$: A-$\underline{\mathrm{mod}} \to A$-$\overline{\mathrm{mod}}$.

En tant que composée de deux dualités, τ est une équivalence de catégories. L'équivalence de catégories inverse est notée τ^- et est la composée $\mathrm{Tr}\, D$.

6.4.4 Proposition. *La translation d'Auslander–Reiten induit une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphisme de A-modules indécomposables non-projectifs sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de A-modules indécomposables non-injectifs.*

Remarque. Pour déterminer l'image par τ d'un module M, on part d'une présentation projective $P_1 \xrightarrow{p} P_0 \to M \to 0$. Alors

$$\tau M = D\,\mathrm{Tr}\,M = D\,\mathrm{coker}(p^* : P_0^* \to P_1^*) = \ker(D(p^*) : D(P_1^*) \to D(P_0^*)),$$

autrement dit τM est défini par la suite exacte

$$0 \to \tau M \to D(P_1^*) \xrightarrow{D(p^*)} D(P_0^*).$$

Le fait suivant peut s'avérer utile dans les calculs : si P est la couverture projective d'un module simple S, alors $D(P^*)$ est l'enveloppe injective de S. Ce résultat est facile à justifier lorsque A est l'algèbre des chemins d'un carquois acyclique, mais demande un peu de travail dans le cas général (voir la proposition II.4.6 dans le livre d'Auslander, Reiten et Smalø).

La propriété-clé de la translation d'Auslander–Reiten est le résultat suivant.

6.4.5 Théorème (formules d'Auslander–Reiten). *Il existe des isomorphismes*

$$\mathrm{Ext}^1_A(N,M) \cong D\,\underline{\mathrm{Hom}}(\tau^- M, N) \cong D\,\overline{\mathrm{Hom}}(M, \tau N)$$

naturels en $(N,M) \in (A\text{-}\underline{\mathrm{mod}})^{\mathrm{op}} \times A\text{-}\overline{\mathrm{mod}}$.

Le second isomorphisme de la formule est donné par l'équivalence de catégorie τ.

La preuve ci-dessous s'inspire de l'article de H. Krause, *A short proof for Auslander's defect formula*, Linear Algebra Appl. **365** (2003), 267–270.

Preuve. Notons d'abord qu'il existe un isomorphisme

$$P^* \otimes_A M \cong \mathrm{Hom}_A(P, M)$$

naturel en $(P,M) \in (A\text{-proj})^{\mathrm{op}} \times A\text{-mod}$. Pour le construire, nous observons que cette formule est correcte quand P est le A-module régulier et utilisons l'additivité pour l'étendre à tous les A-modules P projectifs de type fini.

Considérons ensuite une présentation projective $N = \mathrm{coker}(p : P_1 \to P_0)$; alors τN est l'image dans la catégorie stable de $D(\mathrm{coker}\,p^*)$. Le diagramme à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
P_0^* \otimes_A M \arrow[r, "p^* \otimes_A M"] \arrow[d, "\simeq"'] & P_1^* \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & (\mathrm{coker}\,p^*) \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
\mathrm{Hom}_A(P_0, M) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_A(p,M)"'] & \mathrm{Hom}_A(P_1, M) \arrow[r] & \mathrm{coker}\,\mathrm{Hom}_A(p, M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

combiné à l'homomorphisme d'adjonction

$$D\big((\operatorname{coker} p^*) \otimes_A M\big) = \operatorname{Hom}_k\big((\operatorname{coker} p^*) \otimes_A M, k\big) \cong \\ \operatorname{Hom}_A\big(M, \operatorname{Hom}_k(\operatorname{coker} p^*, k)\big) = \operatorname{Hom}_A\big(M, D(\operatorname{coker} p^*)\big)$$

fournit une bijection

$$D\ \operatorname{Hom}_A(M, D(\operatorname{coker} p^*)) \xrightarrow{\simeq} \operatorname{coker} \operatorname{Hom}_A(p, M). \tag{†}$$

La preuve consiste à réaliser $D\,\overline{\operatorname{Hom}}(M, \tau N)$ et $\operatorname{Ext}^1_A(N, M)$ comme des sous-espaces de $D\ \operatorname{Hom}_A(M, D(\operatorname{coker} p^*))$ et $\operatorname{coker} \operatorname{Hom}_A(p, M)$, respectivement, et à vérifier que ces sous-espaces se correspondent sous la bijection (†).

Pour cela, poussons un cran de plus la résolution de N en introduisant un épimorphisme $q : P_2 \to \ker p$ avec P_2 projectif, et choisissons un monomorphisme $g : M \to I$ avec I injectif.

Le groupe $\operatorname{Ext}^1_A(N, M)$ est le quotient $\ker \operatorname{Hom}_A(q, M)/\operatorname{im} \operatorname{Hom}_A(p, M)$. Nous le regardons comme un sous-espace de $\operatorname{coker} \operatorname{Hom}_A(p, M)$. Dans le diagramme ci-dessous, la seconde ligne est exacte et les flèches verticales sont injectives. Par conséquent, $\operatorname{Ext}^1_A(N, M)$ s'identifie au noyau de la flèche $\operatorname{coker} \operatorname{Hom}_A(p, M) \to \operatorname{coker} \operatorname{Hom}_A(p, I)$.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_A(P_0, M) \arrow[r, "\operatorname{Hom}_A(p,M)"] \arrow[d] & \operatorname{Hom}_A(P_1, M) \arrow[r, "\operatorname{Hom}_A(q,M)"] \arrow[d] & \operatorname{Hom}_A(P_2, M) \arrow[d, tail] \\
\operatorname{Hom}_A(P_0, I) \arrow[r, "\operatorname{Hom}_A(p,I)"] & \operatorname{Hom}_A(P_1, I) \arrow[r, "\operatorname{Hom}_A(q,I)"] & \operatorname{Hom}_A(P_2, I)
\end{tikzcd}$$

De l'autre côté, $D\,\overline{\operatorname{Hom}}(M, \tau N)$ est le noyau de $D\operatorname{Hom}_A(g, D(\operatorname{coker} p^*))$, d'après l'exercice à la fin de la section 6.3. Ceci nous donne un diagramme à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & D\,\overline{\operatorname{Hom}}(M, \tau N) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & D\ \operatorname{Hom}_A(M, D(\operatorname{coker} p^*)) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & D\ \operatorname{Hom}_A(I, D(\operatorname{coker} p^*)) \arrow[d, "\simeq"'] \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ext}^1_A(N, M) \arrow[r] & \operatorname{coker} \operatorname{Hom}_A(p, M) \arrow[r] & \operatorname{coker} \operatorname{Hom}_A(p, I)
\end{tikzcd}$$

et nous concluons en utilisant que le carré de droite dans ce diagramme commute, conséquence de la naturalité de la bijection (†).

Cette preuve présente une construction naturelle en M de la bijection désirée. S'assurer de la naturalité en $(N, M) \in (A\text{-}\underline{\mathrm{mod}})^{\mathrm{op}} \times A\text{-}\overline{\mathrm{mod}}$ nécessite un travail similaire du côté dual. $\square$

6.5 Suites d'Auslander–Reiten

6.5.1 Théorème. *Soient X et Y des A-modules indécomposables, avec X non-injectif et Y non-projectif, reliés par $X = \tau Y$.*

(i) L'espace $\operatorname{Ext}^1_A(Y, X)$ a un socle simple quand on le regarde comme $\operatorname{End}_A(X)$-module à gauche ou comme $\operatorname{End}_A(Y)$-module à droite ; de plus les deux socles coïncident.

(ii) Regardons un élément non-nul de ce socle commun comme la classe d'une extension

$$0 \to X \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} Y \to 0.$$

Alors f est un morphisme source et g est un morphisme puits.

Ce théorème donne plusieurs choses à la fois :
- la construction du morphisme source partant d'un indécomposable non-injectif, et le fait que ce morphisme soit injectif et de conoyau indécomposable ;
- la construction du morphisme puits arrivant à un indécomposable non-projectif, et le fait que ce morphisme soit surjectif et de noyau indécomposable ;
- la formation d'une suite exacte courte en assemblant le morphisme source partant d'un indécomposable non-injectif X et le morphisme puits arrivant à l'indécomposable non-projectif $Y = \tau^- X$;
- l'égalité entre les dimensions de $\operatorname{Irr}(X, Z)$ et $\operatorname{Irr}(Z, Y)$ pour X, Y, Z modules indécomposables tels que $X = \tau Y$.

(L'égalité mentionnée dans le dernier point vient de ce que $\operatorname{Irr}(X, Z)$ et $\operatorname{Irr}(Z, Y)$, vus comme espaces vectoriels sur T_Z, ont tous deux comme dimension le nombre de facteurs directs isomorphes à Z dans une décomposition de Krull–Schmidt–Azumaya de E, ainsi qu'expliqué à la fin de la section 6.2.)

Preuve du théorème. (i) La formule d'Auslander–Reiten (théorème 6.4.5) donne

$$D\,\overline{\operatorname{End}}(X) \cong \operatorname{Ext}^1_A(Y, X) \cong D\,\underline{\operatorname{End}}(Y).$$

La naturalité énoncée dans ledit théorème implique que le premier isomorphisme est un isomorphisme de $\operatorname{End}_A(X)$-modules à gauche et le second un isomorphisme de $\operatorname{End}_A(Y)$-modules à droite. Par conséquent, le socle de $\operatorname{Ext}^1_A(Y, X)$ comme $\operatorname{End}_A(X)$-module est le k-dual de la tête du $\operatorname{End}_A(X)$-module à droite $\overline{\operatorname{End}}(X)$. Ce dernier étant un anneau local, la tête de son module régulier est simple.

De même, le socle de $\operatorname{Ext}^1_A(Y, X)$ comme $\operatorname{End}_A(Y)$-module à droite est le k-dual de la tête du $\operatorname{End}_A(Y)$-module à gauche $\underline{\operatorname{End}}(Y)$, et cette tête est simple. Cette description prouve également l'égalité des socles annoncée dans le théorème, vu que l'équivalence de catégories τ définit un isomorphisme d'anneaux

$$\overline{\operatorname{End}}(X) \cong \underline{\operatorname{End}}(Y)$$

qui nécessairement préserve les radicaux de Jacobson, c'est-à-dire les radicaux des modules réguliers.

(ii) Nous commençons par prouver que le morphisme g est presque scindé à droite.

Soit M un A-module et $h \in R(M, Y)$. La composition à gauche par h définit un homomorphisme de $\operatorname{End}_A(Y)$-modules à droite $\operatorname{Hom}(Y, h) : \operatorname{Hom}_A(Y, M) \to \operatorname{End}_A(Y)$. Comme h n'est pas un épimorphisme scindé, $\operatorname{Hom}(Y, h)$ n'est pas surjectif, et son image est donc incluse dans le radical de $\operatorname{End}_A(Y)$. Passant dans la catégorie stable, nous obtenons un homomorphisme de $\operatorname{End}_A(Y)$-modules $h_* : \underline{\operatorname{Hom}}(Y, M) \to \underline{\operatorname{End}}(Y)$ d'image incluse dans le radical de $\underline{\operatorname{End}}(Y)$. Après dualisation sur k, ceci nous donne un homomorphisme de $\operatorname{End}_A(Y)$-modules $h^* : D\,\underline{\operatorname{End}}(Y) \to D\,\underline{\operatorname{Hom}}(Y, M)$ dont le noyau contient le socle de $D\,\underline{\operatorname{End}}(Y)$.

D'après la clause de naturalité dans le théorème 6.4.5, le diagramme

$$\begin{tikzcd} D\,\underline{\mathrm{End}}(Y) \arrow[r, "h^*"] \arrow[d, "\simeq"'] & D\,\underline{\mathrm{Hom}}(Y,M) \arrow[d, "\simeq"] \\ \mathrm{Ext}^1_A(Y,X) \arrow[r, "h^*"] & \mathrm{Ext}^1_A(M,X) \end{tikzcd}$$

commute. (La première ligne est formée de $\underline{\mathrm{End}}(Y)$-modules, la seconde de $\overline{\mathrm{End}}(X)$-modules, les deux structures étant reliées par l'isomorphisme $\overline{\mathrm{End}}(X) \cong \underline{\mathrm{End}}(Y)$.) Nous déduisons de l'alinéa précédent que h^* annule le socle du $\mathrm{End}_A(X)$-module $\mathrm{Ext}^1_A(Y,X)$.

La classe de la suite exacte courte de l'énoncé appartient au socle de $\mathrm{Ext}^1_A(Y,X)$, donc est annulée par h^*. Autrement dit, on scinde la suite exacte courte en la tirant en arrière par h.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & F \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] & E \arrow[r, "g"] & Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}_M"] \arrow[ddr, bend right, "\tilde h"'] & & \\ & F \arrow[r, "g'"'] \arrow[d] & M \arrow[d, "h"] \\ & E \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

L'épimorphisme g' admet donc un inverse à droite. Cet inverse est un homomorphisme de M dans le pull-back F de (g,h), et sa donnée équivaut à celle d'un homomorphisme $\tilde h : M \to E$ tel que $h = g \circ \tilde h$. Nous concluons que g est bien un morphisme presque scindé à droite.

Maintenant, le noyau de g est indécomposable et n'est pas un facteur direct de E (sinon la suite serait scindée). Il s'ensuit que g vérifie la condition (v) de la proposition 6.2.1. C'est donc un morphisme puits.

On démontre de façon duale que f est un morphisme source. □