ULP Strasbourg
UFR de mathématiques
Année 2002–2003

DEUG MIAS 1
Histoire des mathématiques
11 juin 2003

Examen

La consultation des notes de cours et la manipulation des appareils électroniques (calculatrices, téléphones portables, ...) sont interdites.

Exercice 1 Donnez des réponses concises aux questions de cours suivantes.

1. Classez les mathématiciens suivants dans l'ordre chronologique : Cardan, Descartes, Euclide, Euler, al-Khwārizmī, Leibniz. Pour chacun d'entre eux, indiquez son principal apport aux mathématiques.

2. A quelle époque et dans quel but la trigonométrie fut-elle créée ?

3. Donnez deux indices qui montrent que les techniques mathématiques de la civilisation mésopotamienne ont été transmises aux mathématiciens grecs de l'Antiquité.

4. A quels domaines des mathématiques les savants de la civilisation médiévale arabe (du VII^{e} au XIV^{e} siècle apr. J.-C.) ont-ils fait faire des avancées importantes ? Citez les noms de deux mathématiciens de cette civilisation, en mentionnant pour chacun d'eux le siècle auquel il a vécu et une de ses contributions aux mathématiques.

5. Les mathématiques sont une création humaine et leur développement reflète les conditions dans lesquelles vivaient les hommes qui les ont développées. Pour chacune des trois situations suivantes : le monde grec au VI^{e}–II^{e} siècle av. J.-C., l'Italie au XIII^{e}–XV^{e} siècle, et l'Europe au XVIII^{e} siècle, citez un élément du contexte social, culturel, scientifique ou économique qui a influé sur le développement des mathématiques et décrivez le résultat de cette influence.

6. Citez deux querelles de priorité célèbres en mathématiques. Pour chacune d'entre elles, donnez le nom des protagonistes et l'enjeu, l'issue et la date approximative de la querelle.

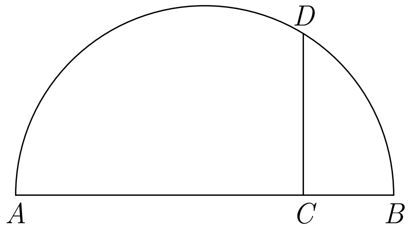
Exercice 2 Pour trouver le maximum ou le minimum d'une quantité $p(a)$ dépendant d'une variable a, Fermat (1601–1665) recommandait d'utiliser la méthode suivante. D'abord, il faut écrire une « adégalité[1] » $p(a+e) \sim p(a)$, puis il faut la simplifier de sorte de ne garder que des termes qui sont multiples de e. Ensuite, on divise tous les termes par e. Cela fait, on supprime tous les termes dans lesquels e apparaît encore (cette suppression équivaut à la substitution $e = 0$). On obtient alors une équation dont les solutions sont les valeurs de a maximisant ou minimisant la quantité $p(a)$.

Le texte présenté dans l'encadré ci-après a été écrit par Fermat vers 1644 pour illustrer une variante de cette méthode. Certains points du texte sont obscurs ; il n'est toutefois pas nécessaire de comprendre en détail les idées de Fermat pour pouvoir traiter l'exercice, à l'exception peut-être de la question 3.

[1] Fermat utilise ici la traduction du mot grec παρισότης, que Diophante avait forgé pour dire « égalité approchée ».

Dans le cours des questions, il se présente souvent des radicaux ; l'analyste ne doit pas alors hésiter à employer une troisième inconnue, ou, s'il le faut, à en poser un plus grand nombre encore ; on pourra en effet de la sorte éviter les élévations aux puissances qui, en se répétant, compliquent d'ordinaire les calculs. L'artifice de cette méthode va être expliqué sur [l'exemple qui suit] :

Soit un demi-cercle de diamètre AB, avec la perpendiculaire DC au diamètre. On demande le maximum de la somme $AC + CD$.



Soit b le diamètre, posons $AC = a$; on aura donc $CD = \sqrt{ba - a^2}$. La question est ramenée à rendre maximale la quantité $a + \sqrt{ba - a^2}$.

En appliquant les règles de la méthode [du maximum et du minimum], on arriverait à adégaler des expressions dont le degré serait trop élevé ; désignons donc par u la quantité maximale ; car pourquoi abandonnerions-nous l'usage (...) de représenter par des voyelles les quantités inconnues ?

Nous aurons donc $a + \sqrt{ba - a^2} = u$; donc $u - a = \sqrt{ba - a^2}$, et en élevant au carré :

$$u^2 + a^2 - 2ua = ba - a^2.$$

Cela fait, il faut effectuer une transposition de façon qu'un membre de l'équation soit formé par le seul terme où u figure à la plus haute puissance ; on pourra dès lors déterminer le maximum, ce qui est le but de l'artifice. Cette transposition nous donne

$$ba - 2a^2 + 2ua = u^2.$$

Mais par hypothèse u est la quantité maximale ; donc u^2, carré d'une quantité maximale, sera lui-même un maximum ; par conséquent,

$$ba - 2a^2 + 2ua \qquad \text{(expression égale à } u^2\text{)}$$

sera un maximum. [Dans cette expression] ne figure d'ailleurs aucun radical ; traitons-la avec la méthode [du maximum et du minimum], comme si u était une quantité connue. Nous aurons l'adégalité

$$ba - 2a^2 + 2ua \sim ba + be - 2a^2 - 2e^2 - 4ae + 2ua + 2ue.$$

Supprimons les termes communs, et divisons les autres par e,

$$b + 2u \sim 2e + 4a.$$

Supprimons $2e$, [comme le veut] la règle ; nous aurons

$$b + 2u = 4a, \qquad \text{d'où} \qquad 4a - b = 2u \qquad \text{et} \qquad 2a - \tfrac{1}{2}b = u.$$

Cette égalité étant établie d'après la méthode, il faut revenir à la première [égalité], dans laquelle nous avons posé $a + \sqrt{ba - a^2} = u$. Mais nous venons de trouver $u = 2a - \frac{1}{2}b$; donc

$$2a - \tfrac{1}{2}b = a + \sqrt{ba - a^2}, \qquad \text{d'où} \qquad a - \tfrac{1}{2}b = \sqrt{ba - a^2}.$$

(...) De cette dernière équation on tirera la valeur de a correspondant au maximum cherché.

Lisez le texte de Fermat et répondez aux questions suivantes :

1. Fermat choisit de représenter la grandeur connue par une consonne b et les grandeurs inconnues par des voyelles a et u. Quel mathématicien a-t-il eu, le premier, l'idée d'une telle convention ?

2. A quelle époque et chez quel mathématicien est née l'idée (utilisée ici par Fermat) d'utiliser le calcul algébrique pour résoudre un problème de géométrie ? Quelles problématiques générales motivaient les réflexions de ce mathématicien ? Ce mathématicien popularisa sa méthode en montrant qu'elle permettait de résoudre un problème qui, à l'époque, était jugé difficile : quel est le nom de ce problème ?

3. Dans le texte reproduit ci-dessus, Fermat applique sa méthode d'adégalisation non pas directement sur l'expression $p(a) = a + \sqrt{ba - a^2}$, mais sur une autre quantité. Laquelle ? Pour quelle raison Fermat utilise-t-il ce chemin détourné ?

4. Newton et Leibniz ont inventé le calcul différentiel vingt à trente ans après que Fermat a écrit ce texte. Rappelez brièvement (en une ou deux phrases) en quoi consiste cette invention et quels genres de question elle permet de résoudre.

5. Utilisez le calcul différentiel (soit dans la formulation de Newton, soit dans celle de Leibniz, soit dans sa forme moderne) pour résoudre le problème de maximum abordé ci-dessus par Fermat. Comparez les degrés de difficulté causés par la présence de la racine carrée dans l'expression à maximiser, selon qu'on utilise la méthode d'adégalisation ou le calcul différentiel.

Corrigé et barème de l'examen de juin 2003

La note sur 20 s'obtient en divisant par 10 le total des points indiqués par le barème.

Exercice 1

1. Euclide, al-Khwārizmī, Cardan, Descartes, Leibniz, Euler.

Euclide a écrit les ***Éléments :*** cet ouvrage propose une synthèse des connaissances mathématiques élémentaires de la Grèce antique organisée autour d'une présentation axiomatique.

Dans son traité d'**algèbre**, al-Khwārizmī a proposé une théorie des équations du second degré ; il explique notamment comment ramener toute équation du second degré à une des six « formes canoniques » et comment résoudre ces dernières.

Dans son traité d'algèbre intitulé *Ars Magna*, Cardan a présenté la méthode de résolution des **équations du troisième** et du quatrième **degré**.

Descartes est le co-inventeur (avec Fermat) de la **géométrie analytique**.

Leibniz est le co-inventeur (avec Newton) du **calcul infinitésimal**.

Les contributions principales d'Euler portent sur la théorie des nombres, l'analyse (il a notamment articulé ses traités d'analyse autour de la **notion de fonction**), et la mécanique rationnelle.

20 *8 points pour l'ordre chronologique exact ; 4 points si un des six mathématiciens est mal classé, mais que les cinq autres le sont correctement les uns par rapport aux autres ; enfin six fois 2 points pour l'indication grossière de la contribution de chaque mathématicien (les expressions en gras suffisent ; d'autres réponses sont bien sûr acceptables si elles sont correctes).*

2. La trigonométrie fut inventée au **Ier ou au IIe siècle après J.-C.** par des astronomes alexandrins. Leur but était de créer un outil permettant de résoudre des triangles sphériques, ce qui était nécessaire pour la mise en œuvre de modèles mathématiques **pour l'astronomie**.

14 *7 points pour chacune des questions.*

3. Plusieurs indices montrent que les mathématiques grecques sont héritières des mathématiques mésopotamiennes. D'une part, les techniques liées à l'usage du gnomon et de l'application des aires (Livres II et VI des *Éléments*) suggèrent que les Grecs s'étaient approprié les techniques babyloniennes de **résolution des équations quadratiques**.[2] Par ailleurs, **les problèmes compilés par Diophante s'inscrivent dans une longue tradition de problèmes arithmétiques**, dont on trouve trace chez les Mésopotamiens. Les indices les plus convaincants se trouvent dans le développement de l'astronomie : Ptolémée, qui veut exploiter des observations astronomiques mésopotamiennes anciennes, est conduit à adopter plusieurs des conventions des Mésopotamiens comme **l'utilisation du degré pour la mesure des angles** et celle du **système de numération sexagésimal** pour les calculs numériques.

18 *9 points par indice correct, à concurrence de deux indices. A défaut, 5 points sont accordés à un étudiant qui justifiera le fait (par exemple en évoquant la tablette Plimpton 322)[3] que la relation de Pythagore était connue des Mésopotamiens.*

[2] Ce point, abordé dans le cours donné pendant l'année 2002–2003, n'a pas été repris dans le programme de l'année 2003–2004.

[3] Ce point, abordé dans le cours donné pendant l'année 2002–2003, n'a pas été repris dans le programme de l'année 2003–2004.

4. Les savants de la civilisation arabe ont diffusé, amélioré ou créé les théories suivantes : « calcul indien » (i.e., **le calcul numérique dans un système de numération positionnel en base dix**), **l'algèbre**, **la trigonométrie**.

Comme savants, on peut par exemple citer les noms d'al-Khwārizmī (IX^{e} siècle) et d'Abū Kāmil (X^{e} siècle). Les contributions d'al-Khwārizmī ont été indiquées à la question 1. Abū Kāmil a prolongé l'œuvre d'al-Khwārizmī, par exemple en cherchant à baser ses preuves sur les *Éléments* d'Euclide. Par ailleurs, il a développé le calcul sur les expressions numériques faisant intervenir des racines carrées de nombres entiers.

22 *2 points par domaine pour la première partie de la question. Beaucoup de réponses sont évidemment possibles pour la seconde question. On donne jusqu'à 8 points pour chacun des deux savants : 2 points pour le nom, 2 points pour le siècle, 4 points pour une indication sur la contribution.*

5. Dans la Grèce antique, plusieurs facteurs ont concouru à donner aux philosophes la liberté de pensée et le goût du débat argumenté. Ces philosophes ont alors cherché à développer l'idée que le monde peut s'expliquer de manière rationnelle et que le raisonnement permet d'accéder à la vérité et à la justice. Ce point de vue les a conduit à chercher à démontrer leurs hypothèses et à organiser leurs résultats selon un schéma déductif ; ce sont là deux attitudes que l'on retrouve dans leur manière de faire des mathématiques. La recherche d'un système cohérent d'explication du monde les a par ailleurs encouragé à élaborer des théories scientifiques. L'étude des mathématiques, en tant qu'exemple d'une science fondée sur une base exclusivement logique, est particulièrement encouragée. Au sein des mathématiques, la géométrie est à l'honneur, car elle fournit des modèles explicatifs (on peut penser aux modèles astronomiques à base de sphères en rotation uniforme). Enfin, les grandes doctrines philosophiques grecques conduisent à donner un rôle important aux objets mathématiques et à leur étude (ainsi, c'est en explorant de façon systématique la notion de nombre que les Grecs découvrent l'existence de l'incommensurabilité).

Au bas Moyen-Age, l'afflux de richesses dans les cités italiennes impliquées dans le commerce international provoque de grands changements dans toute la société. (L'éclosion artistique visible à cette époque dans cette région du monde en est le témoin le plus éclatant.) Les mathématiques accompagnent et participent à ce mouvement. Les nouvelles méthodes du calcul numérique constituées par l'utilisation du système de numération positionnel (« chiffres arabes ») se diffusent rapidement, par et pour l'usage qu'en font les marchands. Les marchands ont besoin de personnel spécialisé pour enseigner ces méthodes à leurs enfants et les assister dans les cas les plus compliqués : une communauté d'experts en calculs (abacistes ou maîtres d'abaque) va pouvoir croître. C'est sur ce socle que l'algèbre européenne s'épanouira graduellement à la Renaissance.

En Europe, la physique s'est mathématisée au cours du XVII^{e} siècle. Au XVIII^{e} siècle, elle est la source principale des questions qui intéressent les mathématiciens. Certains problèmes de physique provoquent la naissance de branches spécialisées de l'analyse (comme les équations aux dérivées partielles ou le calcul des variations), laquelle ne se cantonne plus seulement à l'étude de problèmes d'origine géométrique et s'émancipe ainsi de la géométrie.

27 *Un élément de contexte rapporte 3 points s'il est exact et pertinent (c'est-à-dire particulier à la société décrite). Si une conséquence logiquement acceptable de cet élément contextuel sur le développement des mathématiques est mentionnée, on donne au total 6 points, voire même neuf si la conséquence est très bien expliquée. Bien que l'énoncé ne demande qu'un seul élément contextuel par époque, on peut accorder des points pour un deuxième élément avec ses*

conséquences, avec un plafond de 12 points pour chacune des sociétés proposées et un plafond de 27 points pour la question toute entière.
Exemples :

– *Pour l'Italie au XIV^{e} siècle, « La Peste Noire a ralenti le développement de la science » donne 6 points.*
– *Pour l'Italie aux XIII^{e}–XV^{e} siècles, « L'invention de l'imprimerie a favorisé la diffusion et l'uniformisation des notations algébriques » donne 6 points.*
– *Pour l'Europe au XVIII^{e} siècle, « Les Académies ont permis de rapprocher des mathématiciens et des savants d'autres disciplines » donne 6 points.*
– *Pour l'Europe au XVIII^{e} siècle, « Après le calme du Moyen-Age, de grandes découvertes sont faites, surtout en analyse » ne comporte aucun élément contextuel et donc ne rapporte aucun point.*
– *Pour l'Europe au XVIII^{e} siècle, « C'est le siècle des Lumières (...). Les mathématiciens ont voulu résoudre des problèmes jusqu'alors réputés irrésolubles » rapporte 3 points (c'est généreux car l'expression toute faite « siècle des Lumières » mériterait peut-être une explication).*

6. **Cardan et Tartaglia** se sont affrontés **vers 1540** au sujet de la paternité de la **procédure de résolution des équations du troisième degré**. Tartaglia était un des inventeurs de la méthode et l'avait révélée à Cardan, contre la promesse que celui-ci ne chercherait pas à la publier. En se basant sur cette connaissance, Cardan avait alors mené une étude systématique des différents cas de l'équation du troisième degré. Puis, ayant appris et constaté que Tartaglia n'était pas le premier inventeur de la procédure, Cardan rompit sa promesse et publia les résultats de son étude dans l'*Ars magna*.

Newton inventa le **calcul infinitésimal** dès 1665 mais ne publia pas ses résultats. L'invention par **Leibniz** vers 1674 d'une version un peu différente de la même théorie était indépendante des travaux de Newton. Cependant **vers 1710**, les admirateurs de Newton accusèrent Leibniz de plagiat. La querelle vira rapidement à l'affrontement nationaliste entre la Grande-Bretagne et le continent. Une conséquence de cette querelle fut la rupture des contacts scientifiques entre les savants des deux bords : les mathématiciens anglais se privèrent ainsi de la connaissance des progrès rapides en mathématiques faits sur le continent au XVIII^{e} siècle ; inversement, l'adoption des théories physiques de Newton fut ralentie sur le continent.

26 *Pour chaque querelle : 9 points au total pour les éléments de réponse en gras (3 points pour les noms, 3 points pour l'époque, 3 points pour le sujet), plus éventuellement deux fois 2 points si des éléments complémentaires sont donnés.*

Exercice 2

1. Viète.

6 *6 points.*

2. **Descartes** a publié son livre de géométrie analytique *La Géométrie* en **1637**.

Descartes avait deux buts : d'une part, **illustrer son *Discours de la méthode***; d'autre part, trouver une méthode systématique pour l'étude de la géométrie. Cette seconde question était d'actualité : en effet, les mathématiciens de la fin du XVI^{e} siècle avaient appris en lisant l'œuvre de Pappus que les géomètres grecs disposaient d'une méthode appelée « analyse » qui leur permettait de trouver la solution de leurs problèmes géométriques. Descartes comprit que **l'utilisation de l'algèbre en géométrie pouvait remplacer cette analyse** et servir d'outil pour contrôler le flot des raisonnements en géométrie sans devoir s'appuyer sur le support visuel d'une figure.

Dans son ouvrage, Pappus avait également proposé l'énoncé d'un problème sur lequel les géomètres grecs avaient buté. C'est un challenge pour Descartes, qui met alors en œuvre sa méthode pour résoudre le **problème de Pappus**.

24 *3 points pour « Descartes », 3 points pour « 1637 », (il suffit que l'étudiant ait écrit « XVII^{e} siècle »), et 6 points pour chacun des autres éléments en gras ; ajouter 5 points par détail historique supplémentaire donné, à concurrence de deux détails.*

3. Fermat utilise sa méthode d'adégalisation[4] pour maximiser la quantité $\boldsymbol{q(a) = ba - 2a^2 + 2ua}$, où la grandeur u est considérée comme connue et fixée. Cet artifice lui permet de **contourner les difficultés liées à la présence de la racine carrée** dans $p(a)$; partir directement de $p(a+e) \sim p(a)$ conduit en effet à des calculs assez compliqués.

20 *10 points pour chacun des deux éléments en gras.*

4. Newton et Leibniz ont mis au point des **concepts** et des **notations** permettant d'**unifier les méthodes** et de transcrire en des **règles de calcul** les arguments géométriques utilisés jusque là pour l'étude des lignes courbes. Les principaux problèmes abordés au XVII^{e} siècle concernaient la recherche de **tangentes** et d'**extrémums**, les problèmes de **quadrature** et de **rectification**, les questions de **cinématique**, la recherche de **centres de gravité**.

20 *3 points pour chacun des quatre premiers éléments et 2 par genre de problème que le calcul permet de résoudre, à concurrence de quatre items.*

5. Utilisons le formalisme moderne. Il s'agit de trouver le maximum sur le segment $[0, b]$ de la fonction $p : a \mapsto a + \sqrt{ba - a^2}$. Cette fonction est continue sur le segment $[0, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]0, b[$. La fonction dérivée de p est

$$p'(a) = 1 + \frac{b - 2a}{2\sqrt{ba - a^2}}.$$

Pour étudier les variations de p, il faut regarder le signe de p'. Pour $a \leq b/2$, $p'(a)$ est positive, donc la fonction p est croissante sur l'intervalle $[0, b/2]$. Pour $b/2 < a < b$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} p'(a) > 0 &\iff \sqrt{ba - a^2} > a - \tfrac{1}{2}b \\ &\iff ba - a^2 > \left(a - \tfrac{1}{2}b\right)^2 \\ &\iff a^2 - ab + \tfrac{1}{8}b^2 < 0 \\ &\iff a \text{ est compris entre } \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)b \text{ et } \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)b. \end{aligned}$$

On arrive donc au tableau de variations suivant :

a	0	$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)b$	b
p'	$+$	0	$-$
p	$\nearrow$		$\searrow$

[4]Ce point, abordé dans le cours donné pendant l'année 2002–2003, n'a pas été repris dans le programme de l'année 2003–2004.

La fonction p atteint donc son maximum au point $a = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)b$.

Les règles du calcul infinitésimal s'appliquent uniformément à toutes les expressions et la présence de la racine carrée ne cause aucun problème. En revanche, les manipulations de Fermat sont nettement moins transparentes. Du reste, on peut se demander comment Fermat aurait procédé avec des expressions faisant intervenir davantage de radicaux.

36 *Les étudiants qui ont traité la question ont tous adopté le formalisme moderne, le barème se limite donc à ce cas de figure.*

Il y a 6 points pour le calcul correct de la dérivée $p'(a)$ *et 6 points pour écrire que le maximum est trouvé en posant* $p'(a) = 0$. *Quelques étudiants ont été plus soigneux ; ils doivent être récompensés. On donne donc 8 points si le tableau de variations de la fonction est dressé (4 points si l'idée est évoquée ou s'il y a une faute dans la preuve) et encore 6 points si la solution* $a = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)b$ *est trouvée (3 points s'il y a une faute, par exemple si les étudiants trouvent deux zéros de* p' *sur l'intervalle* $[0, b]$*).*

Enfin il y a 10 points pour la comparaison de l'efficacité à traiter le problème posé par la présence de la racine carrée (il faut que l'étudiant ait compris que le calcul infinitésimal permet de traiter le problème sans astuce ou argument ad hoc *parce que ses procédures s'appliquent uniformément).*

ULP Strasbourg
UFR de mathématiques
Année 2002–2003

DEUG MIAS 1
Histoire des mathématiques
1$^{\text{er}}$ septembre 2003

Examen

Durée : 2 heures

La consultation des notes de cours et la manipulation des appareils électroniques (calculatrices, téléphones portables...) sont interdites.

Exercice 1 Répondez aux questions de cours suivantes.

1. Voici une liste de cinq inventions mathématiques : nombre imaginaire, méthode axiomatique en géométrie, notion de fluxion, géométrie analytique, limite d'une fonction. Pour chacune de ces découvertes, donnez le nom de son inventeur principal en précisant l'époque et le lieu auxquels il a vécu.

2. Dans quelle région du monde et à quelle époque le système de numération positionnel décimal (c'est-à-dire notre système actuel) a-t-il été mis au point ? Choisissez parmi les exemples historiques vus en cours deux autres systèmes de numération et expliquez-en le principe. Pour quelle raison le système de numération positionnel décimal s'est-il finalement imposé ? Vous justifierez votre réponse à cette dernière question en indiquant brièvement les inconvénients des autres systèmes.

3. Quelle fut l'attitude des Arabes envers la science des peuples au contact desquels ils se sont trouvés lors de l'expansion de leur empire au VII$^{\text{e}}$ et au VIII$^{\text{e}}$ siècle après J.-C. ? Quelles furent les conséquences de cela pour la diffusion du savoir mathématique ?

4. Quand et comment les mathématiques mises au point par les Grecs dans l'Antiquité sont-elles parvenues en Europe de l'Ouest ? (Cette question est assez ouverte : les textes grecs ont été transmis plusieurs fois, à différentes époques et par des voies plus ou moins fidèles. Dans votre réponse, prenez soin de mentionner les détails historiques que vous connaissez : noms de lieux, de personnes...)

5. Le calcul infinitésimal de Leibniz reposait sur l'usage de deux opérations, que Leibniz notait $\int$ et d. En quoi consistaient ces opérations et sur quoi portaient-elles ? Pourquoi Leibniz a-t-il porté son choix sur les symboles $\int$ et d pour représenter ces opérations ? Donnez deux règles de calcul découvertes par Leibniz permettant l'utilisation de ces opérations.

Exercice 2 Au III$^{\text{e}}$ siècle après J.-C., Diophante d'Alexandrie rédigea les *Arithmétiques,* un recueil de méthodes pour résoudre des problèmes portant sur la recherche de nombres. Le quatrième problème du Livre I des *Arithmétiques* propose une méthode pour trouver deux nombres quand on connaît leur différence et leur rapport.

Voici le texte de Diophante, d'après la traduction qu'en a donnée Paul Tannery.

> Trouver deux nombres dans un rapport donné, tels que leur différence soit donnée aussi.
>
> Proposons que le plus grand nombre soit le quintuple du plus petit, et que la différence de ces nombres soit 20 unités.
>
> Posons que le plus petit nombre est 1 arithme ; donc le plus grand sera 5 arithmes. Nous voulons finalement que 5 arithmes diffèrent de 1 arithme par 20 unités. Or leur différence est 4 arithmes, lesquels devront être égaux à 20 unités. Dès lors, le petit nombre sera 5 unités, et le grand sera 25 unités ; ce qui établit que le grand nombre est le quintuple du petit, et que leur différence forme 20 unités.

1. Dans quelle langue Diophante a-t-il écrit les *Arithmétiques ?*

2. Nous voulons utiliser la méthode de Diophante pour trouver deux nombres dont la différence est 18 et tels que le plus grand soit quatre fois le plus petit. Recopiez le troisième paragraphe du texte de Diophante en l'adaptant à ces valeurs numériques.

3. Lorsqu'il a rédigé les *Arithmétiques,* Diophante a pris soin d'adopter une présentation uniforme pour exposer la solution des différents problèmes. Expliquez la fonction que Diophante a assigné à chacun des trois paragraphes dans le texte ci-dessus.

4. Une chose qui rapproche les *Arithmétiques* des textes mathématiques de l'ancienne civilisation mésopotamienne est le fait que dans les deux cas, on a affaire à une liste de problèmes accompagnés de leurs procédures de résolution. Cependant si l'on compare le texte de Diophante avec les textes babyloniens, on trouve plusieurs nouveautés importantes concernant la présentation et les méthodes de résolution. Parmi ces nouveautés, indiquez-en trois constituant un réel progrès.

A la fin du XVI$^{\text{e}}$ siècle, François Viète écrivit une série de traités, rassemblés sous le nom *L'art analytique.* Viète y développe notamment l'idée que les notations et les méthodes du calcul algébrique permettent d'analyser les problèmes mathématiques. Dans le deuxième paragraphe du livre premier des *Zététiques*, il reprend ainsi le problème de Diophante étudié ci-dessus. Voici une traduction du texte de Viète.

> Etant donnés la différence et le rapport des deux côtés, trouver les côtés.
>
> Que B soit la différence donnée entre les deux côtés. Que le rapport donné du plus petit côté au plus grand soit comme R à S. Il faut trouver les côtés.
>
> Soit A le plus petit côté. Alors le plus grand côté sera $A + B$. C'est pourquoi A est à $A + B$ comme R est à S. En résolvant cette proportion, il vient SA égal $RA + RB$. Et par déplacement sous signe contraire de la relation, $SA - RA$ égal RB. Et en divisant tout par $S - R$, il vient $\frac{RB}{S-R}$ égal A. De là, B est à A comme $S - R$ est à R.

Ou bien, si l'on préfère, soit E le plus grand côté. Alors le plus petit côté sera $E-B$. C'est pourquoi E est à $E-B$ comme S est à R. En résolvant cette proportion, il vient RE égal $SE-SB$. Et par déplacement convenable, $SE-RE$ égal SB. De là, B est à E comme $S-R$ est à S.

Ainsi donc, étant donnés la différence et le rapport des deux côtés, les côtés seront trouvés. C'est un fait que

La différence des vrais côtés est au plus grand ou au plus petit vrai côté dans les mêmes proportions que la différence des deux côtés semblables est au plus grand ou au plus petit côté semblable.

Soit B 12. R 2. S 3. Il devient A 24. E 36.

5. Dans le texte de Viète, les données du problème sont désignées par les lettres B, R et S, tandis que les longueurs des côtés cherchés sont désignées par les lettres A et E. Ecrivez une formule équivalente à la phrase suivante, tirée du quatrième paragraphe du texte de Viète :

De là, B est à E comme $S-R$ est à S.

Puis exprimez E en fonction de B, R et S et contrôlez l'exemple numérique présenté par Viète à la dernière ligne du texte.

6. Quelle innovation majeure, visible dans ce texte, Viète a-t-il apporté aux mathématiques ? Quels avantages cette innovation présente-t-elle ?

7. Quelle influence l'approche de Viète a-t-elle eu en géométrie ? Vous préciserez les circonstances : époque, acteurs, etc.

Corrigé et barème de l'examen de septembre 2003

Exercice 1

1. Nombre imaginaire : Bombelli, milieu du XVIe siècle, Italie.

Méthode axiomatique en géométrie : Euclide, vers 300 avant J.-C., Alexandrie.

Notion de fluxion : Newton, fin du XVIIe siècle, Angleterre.

Géométrie analytique : Descartes (ou Fermat), première moitié du XVIIe siècle, France (Descartes a aussi vécu en Hollande).

Limite d'une fonction : Cauchy,[5] début du XIXe siècle, France.

5 *Pour chaque invention : 0,5 point pour l'inventeur, 0,25 pour le lieu, et 0,25 pour une date approximative. Pour la notion de limite d'une fonction, compter 0,25 si l'étudiant a répondu d'Alembert.*

2. Le système de numération positionnel décimal a été mis au point dans le monde oriental, puis s'est diffusé dans le **monde indien au VIe siècle**. Il a ensuite été adopté par les Arabes, qui ont reconnu son intérêt et ont répandu son usage. C'est au bas Moyen-Âge et en observant l'usage que les Arabes en faisaient que les Européens ont appris à se servir de ce système. À cette époque, les Européens utilisaient surtout le système de numération romain, qui avait l'inconvénient majeur de ne pas permettre les calculs : la moindre multiplication nécessitait d'utiliser l'abaque (table à calcul), avec ses méthodes lentes et sujettes au risque d'erreur de calcul. Le gros avantage que présentait le système de numération positionnel décimal dans ce contexte est qu'il permettait d'effectuer les opérations arithmétiques de façon rapide et sûre ; on pouvait poser les opérations sur le papier et les vérifier. Cet avantage a fait qu'il a rapidement été adopté par les marchands européens à la fin du Moyen-Âge.

Le **système égyptien** hiéroglyphique est un système dit additif ; il **comporte des symboles pour un, dix, cent, mille, etc.** La valeur d'un nombre se lit en faisant la somme des valeurs des symboles utilisés dans l'écriture du nombre. Avec cette écriture, les additions, les soustractions, les doublements (multiplication par deux) et les dédoublements (division par deux) sont très faciles. En revanche, **les calculs de multiplication sont longs** avec ce système.

Le **système babylonien** est un **système positionnel en base soixante** ; les chiffres (de un à cinquante-neuf) s'obtiennent par un principe additif en utilisant **deux symboles de valeurs égales à un et à dix**. Faire des multiplications avec un tel système n'est pas facile, car il faut connaître beaucoup de tables de multiplications (jusqu'à cinquante-neuf fois cinquante-neuf). **Les calculs avec ce système nécessitaient d'utiliser en permanence des tables écrites**.

Le système chinois est un système mixte, avec des symboles pour les chiffres de un à neuf et des symboles pour les puissances de la base dix, c'est-à-dire des symboles pour dix, cent,

---

[5] Le cours de l'année 2002–2003 expliquait l'évolution du concept de limite et mentionnait les contributions de d'Alembert et de Cauchy. D'Alembert ne définit pas la limite d'une fonction. Ces points seront peut-être allégés dans le programme de l'année 2003–2004.

mille, etc. Ce système est analogue à notre système de numération oral, quand nous disons par exemple « trois mille cinq cent dix-sept ».

3,5 *0,25 point pour la région (Inde) et 0,25 point pour la date (V^{e}–VI^{e} siècle). 1 point pour chaque exemple historique cité et dont le principe est expliqué. Enfin 1 point pour avoir expliqué de façon convaincante un avantage ou un inconvénient d'un système par rapport à un autre. (Un bla-bla du genre « le système décimal a l'avantage de faciliter les divisions par dix » n'est pas convaincant.)*

3. Les conquérants arabes étaient conscients d'arriver au contact de civilisations culturellement très riches et **ont cherché à acquérir la science** de ces civilisations, pourtant étrangère à leur culture. Il n'y a eu ni rejet, ni tentative de destruction, mais au contraire une volonté d'assimilation et d'appropriation.

La conséquence de cette attitude fut que les Arabes participèrent à la **conservation du savoir grec** (qui, confiné dans quelques manuscrits de moins en moins étudiés, était menacé de disparition) **et à son brassage avec les savoirs perse et indien**.

3 *1 point pour dire que les Arabes souhaitaient acquérir les connaissances des civilisations avec lesquelles ils entrent en contact. 2 points pour dire qu'ils ont préservé et ranimé la science grecque et l'ont brassée avec les savoirs perse et indien.*

4. Un premier élément de réponse serait de dire que le monde grec antique s'étendait jusqu'en Europe de l'Ouest (Pythagore avait fondé son école à Crotone, en Italie du Sud, et Archimède a vécu à Syracuse en Sicile). Néanmoins, la majeure partie du savoir grec était conservée dans la bibliothèque d'Alexandrie pendant l'Antiquité.

Pendant le haut Moyen-Âge, une toute petite fraction du savoir grec est préservée dans des copies de l'œuvre de Boèce, un érudit romain qui avait rassemblé quelques résultats élémentaires de géométrie et d'arithmétique à la fin de l'Antiquité.

La principale voie de transmission fut la « voie arabe » : le savoir grec avait été récupéré et ressuscité par les savants du monde arabe au IX^{e} siècle, traduit en arabe, et ainsi transmis au monde européen lors de la reconquête chrétienne de l'Europe du Sud (particulièrement l'Espagne) aux XI^{e} et XII^{e} siècle. Un grand centre de traduction (de l'arabe vers le latin) avait même été instauré à Tolède et avait attiré de nombreux érudits européens au XII^{e} siècle.

Dans les derniers siècles du Moyen-Âge, quelques manuscrits grecs précédemment conservés dans les bibliothèques de l'Empire byzantin arrivèrent en Italie ; c'est ainsi que les œuvres de Pappus et une partie des œuvres de Diophante sont parvenues dans le monde occidental. Le mouvement s'est même amplifié avec l'exil en Europe de l'Ouest d'un certain nombre de savants byzantins, chassés de Constantinople lors de la prise de la ville par les Ottomans.

Enfin, des manuscrits d'œuvres mathématiques rédigées dans le monde grec (ou dans le monde hellénistique) ont été découverts de façon encore plus tardive. C'est le cas d'un manuscrit des *Éléments* d'Euclide, découvert vers 1800 dans la bibliothèque du Vatican, et d'un manuscrit en arabe des *Arithmétiques* de Diophante, retrouvé en 1968 dans une bibliothèque iranienne et contenant une version commentée de quatre livres qu'on croyait perdus.

3 *0,5 point par détail historique juste, à concurrence de 3 points. Le texte ci-dessus comporte une quinzaine d'éléments qui auraient chacun pu apporter 0,5 point.*

5. Ces deux opérations $\int$ et d portaient sur des **grandeurs variables**. Pour Leibniz, une variable y est une quantité qui prend une suite de valeurs $(y_1, y_2, y_3, \ldots)$ infiniment proches les unes des autres. L'intégrale de y, notée $\int y$, est la grandeur qui prend pour valeurs successives la suite des **sommes partielles** $(y_1, y_1+y_2, y_1+y_2+y_3, \ldots)$. La différentielle de y, notée dy, est la grandeur qui prend pour valeurs la suite des **différences successives** $(y_1, y_2-y_1, y_3-y_2, \ldots)$. Les notations ont été choisies pour **refléter la définition** des opérations : $\int$ est un S allongé, S comme « somme », tandis que d est l'initiale de « différence ».

Parmi les règles de calcul mises au point par Leibniz, on peut citer le fait que les deux opérations sont inverses l'une de l'autre, c'est-à-dire $\boldsymbol{\int dy = y}$, et bien sûr la « règle de Leibniz » $\boldsymbol{d(xv) = v\,dx + x\,dv}$ faisant intervenir deux grandeurs variables x et v.

3 *0,5 point pour la définition de l'opération $\int$, autant pour celle de d, 0,5 point pour dire qu'elles portent sur des variables, 0,5 point pour dire l'origine du choix des notations $\int$ et d, deux fois 0,5 point pour donner deux règles de calcul. Il n'est pas exigé une présentation aussi détaillée que celle donnée dans le texte ci-dessus ; des indications équivalentes aux expressions en gras suffisent.*

Exercice 2

1. En grec.

0,5 *0,5 point.*

2. Posons que le plus petit nombre est 1 arithme ; donc le plus grand sera 4 arithmes. Nous voulons finalement que 4 arithmes diffèrent de 1 arithme par 18 unités. Or leur différence est 3 arithmes, lesquels devront être égaux à 18 unités. Dès lors, le petit nombre sera 6 unités, et le grand sera 24 unités ; ce qui établit que le grand nombre est le quadruple du petit, et que leur différence forme 18 unités.

1,5 *1,5 point si la réponse est complètement juste, 0 en cas d'erreur.*

3. Le premier alinéa du texte est l'**énoncé général** du problème. Le second est l'**exposition** : Diophante présente un **exemple numériquement spécifié** du problème à résoudre. Le troisième alinéa est la **procédure de résolution**, qui se décompose en deux étapes : l'analyse (dans laquelle Diophante met le problème en équation à l'aide de son arithme) et la synthèse (dans laquelle Diophante propose des valeurs numériques, suggérées par l'analyse, et formant une solution au problème posé).

1,5 *0,5 point pour chacune des trois fonctions. Les éléments indiqués en gras suffisent.*

4. Une première nouveauté est le fait que le problème est **énoncé de façon générale** et abstraite, et non plus sur un exemple particulier, numériquement spécifié, et présentant une apparence concrète.

Une deuxième nouveauté est que Diophante rend complètement **explicite sa stratégie de résolution**, et ne se contente pas d'indiquer une liste d'opérations dont l'exécution mène à la solution. Cette résolution met en œuvre un mode de **raisonnement** particulier (appelé « analyse »), qui se traduit par l'emploi de connecteurs logiques (« donc », « or », ...)

Une troisième nouveauté est **l'introduction d'une inconnue**, appelée « arithme », avec laquelle Diophante essaie d'exprimer les nombres cherchés. L'arithme est l'ingrédient principal de la façon dont Diophante met en œuvre la méthode d'analyse.

3 *1 point par nouveauté importante. D'autres réponses seraient possibles, par exemple le fait que Diophante indique de façon générale les conditions sous lesquelles le problème est résoluble (le cas ne se présente pas pour le problème étudié ici).*

5. La phrase est équivalente à la formule $\frac{B}{E} = \frac{S-R}{S}$. On en déduit $E = \frac{SB}{S-R}$. Pour les valeurs $B = 12$, $S = 3$, $R = 2$, il vient $E = 36$ pour la valeur du grand côté. (Le petit côté vaut alors $E - B$, soit ici 24.)

1,5 *0,5 point pour chacune des trois sous-questions.*

6. L'innovation majeure apportée par Viète aux mathématiques est l'introduction du calcul littéral, c'est-à-dire du **calcul sur les lettres**. (Pour être tout-à-fait exact, Viète a eu quelques prédécesseurs.)

Un premier avantage, dont Viète lui-même était conscient, est le suivant. Quand on compare les travaux de Viète avec ceux de Diophante, on constate qu'**il est plus facile de suivre les étapes du raisonnement quand les calculs sont menés avec des lettres** représentant les données que quand ils sont présentés directement avec des nombres.

Un deuxième avantage est que le calcul littéral permet de traduire tous les problèmes en équations. Cette traduction permet de **déceler et d'exploiter les liens** qui unissent parfois des problèmes à première vue différents, car il est possible d'essayer de classifier les équations.

Un troisième avantage est que les notations symboliques de Viète **autorisent l'écriture de véritables formules, qui remplacent les procédures rhétoriques**. Un exemple permet d'illustrer cette affirmation : pour résoudre les équations de la forme $x^2 = bx + c$, on ne donne plus la liste des étapes de calcul à effectuer, car il suffit d'écrire $x = \frac{1}{2}(b \pm \sqrt{b^2 + 4c})$.

Un quatrième avantage des notations symboliques de Viète est qu'elles **permettent de substituer le calcul au raisonnement**. Cela sera particulièrement visible dans les travaux de Descartes et de Leibniz. Chacun à leur manière, les deux hommes chercheront à remplacer des arguments géométriques par des règles de calcul.

3 *1 point pour l'innovation ; 1 point pour proposer un avantage et l'expliquer de façon convaincante, à concurrence de deux avantages. Il est bien sûr possible de formuler ses idées dans des mots différents de ceux utilisés dans le corrigé ci-dessus.*

7. L'approche de Viète permet d'utiliser l'algèbre comme substitut à la méthode d'analyse des anciens Grecs. Elle sera reprise par des personnes comme **Descartes** et **Fermat** qui, en cherchant à utiliser le calcul littéral dans leurs recherches sur des problèmes de lieux plans, créeront la **géométrie analytique** dans **les années 1630**.

1,5 *0,5 point par élément en gras dans la réponse ci-dessus. On peut donner jusqu'à 1 point supplémentaire si des éléments historiques supplémentaires pertinents sont donnés.*