Université Louis Pasteur, Strasbourg
U.F.R. de mathématique et d'informatique

7 juin 2005

D.E.U.G. Sciences première année, mention MIAS

Histoire des Mathématiques — *Durée : 2 heures*

Les calculatrices, les téléphones portables et les documents sont interdits. Le barème de notation indiqué sera peut-être légèrement modifié lors de la correction des copies.

Exercice 1 (5 points) Cet exercice est une sorte de Q. C. M. (questions à choix multiples). Pour chacune des phrases numérotées (a) à (j) ci-dessous, dites si elle est vraie ou fausse, sans justifier votre réponse. Une réponse juste rapportera 0,5 point ; une réponse fausse vous coûtera 0,5 point.

(a) C'est à la fin du Moyen-Âge que l'usage du système de numération positionnel décimal s'est répandu en Europe occidentale.

(b) Diophante d'Alexandrie utilisait le système de numération grec pour écrire les nombres.

(c) Al-Khwārizmī a reçu son éducation mathématique au Musée d'Alexandrie.

(d) Descartes et Newton se sont querellés, l'un et l'autre réclamant la paternité de l'invention de la géométrie analytique.

(e) Bombelli a vécu après Fibonacci et avant (Johann) Bernoulli.

(f) Hippocrate de Chio a vécu après Archimède et avant Euclide.

(g) Pythagore est né en 492 et est mort en 433 avant J.-C.

(h) Euler était professeur de mathématiques à l'université de Zurich en Suisse.

(i) À la Renaissance, il y a eu un regain d'intérêt pour l'étude des textes mathématiques de l'Antiquité grecque.

(j) Les textes mathématiques des Mésopotamiens nous sont parvenus par l'intermédiaire de traductions en arabe.

Exercice 2 (3 points) Quelle découverte a conduit les mathématiciens de la Grèce antique à séparer la géométrie du calcul arithmétique ? Prenez soin dans votre réponse de donner quelques détails (exemples, définition d'un mot rare que vous seriez amenés à employer, ...).

Exercice 3 (8 points) Dans le chapitre XI du premier livre de son traité *Ars Magna sive de regulis algebraicis* (1545) [Opera omnia, t. 4, p. 250], Gerolamo Cardano (Jérôme Cardan) décrit comme suit la règle pour résoudre les équations que nous écririons

$$x^3 + ax = b, \tag{$*$}$$

où a et b sont supposés être <u>positifs</u> ; Cardano appelle a « le nombre des choses » et b simplement « le nombre » de l'équation ; la quantité x solution de cette équation est appelée « la chose ».

> *(1) Tu prendras le tiers du nombre des choses au cube, auquel tu additionneras le carré de la moitié du nombre de l'équation, et de tout cela extrais la racine carrée, que tu retiendras.*
>
> *(2) Et d'un côté, tu ajoutes au résultat de (1) la moitié du nombre, moitié que tu avais multipliée par elle même plus haut ; et d'un autre côté, tu retranches au résultat de (1) cette même moitié. Et tu obtiendras ainsi un binôme et son apotome.* (Ce que Cardano nomme ici « binôme » est une somme de deux termes, dont l'un est une racine carrée ; la différence entre ces deux mêmes termes est appelée l'« apotome ».)
>
> *(3) Ensuite soustrais la racine cubique de l'apotome de la racine cubique du binôme ; ce qui reste est la valeur de la chose.*

(a) Pour expliquer davantage, Cardano traite comme premier exemple l'équation que nous notons aujourd'hui $x^3 + 6x = 20$. Dans ce cas, l'étape (1) lui donne $\sqrt{108}$ et le résultat final de (3) est que $x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$. — Vérifiez cet exemple en suivant le texte étape par étape.

(b) Outre l'exemple mentionné dans (a), Cardano présente deux autres équations explicitement, étape par étape. Il se trouve qu'une erreur de recopie s'est glissée à la fin de l'exposé de la dernière équation, qui est $x^3 + 6x = 2$. Selon le texte imprimé, l'étape (3) du calcul conduirait à $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{1}$, mais ce dernier nombre n'est pas racine de l'équation. — Corrigez cette erreur en donnant la valeur correcte pour la racine de $x^3 + 6x = 2$, valeur que vous trouverez en suivant la procédure de Cardano.

(c) Transcrivez la règle de Cardano pour résoudre l'équation générale ($*$) sous la forme d'une formule moderne faisant intervenir a et b.

(d) Cardano est-il l'inventeur de cette procédure de résolution ? Indiquez dans votre réponse ce que vous savez sur les circonstances historiques de la découverte de cette règle.

Dans le §179 de la deuxième partie de son *Instruction complète à l'algèbre* de 1770, Leonhard Euler donne la formule suivante pour une racine d'une équation $x^3 = fx + g$, où les nombres f et g sont <u>arbitraires</u> :

$$x = \sqrt[3]{\frac{g + \sqrt{g^2 - \frac{4}{27}f^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{g - \sqrt{g^2 - \frac{4}{27}f^3}}{2}}. \tag{$**$}$$

(e) Utilisez cette formule générale $(**)$ pour résoudre l'équation $(*)$ considérée par Cardano ; vérifiez que vous obtenez une formule équivalente à votre réponse à la question (c).

Pour montrer $(**)$, Euler écrit :

> *Il faut déterminer p et q de telle façon qu'on ait*
>
> $$I. \quad g = p + q \qquad et \qquad II. \quad f = 3\sqrt[3]{pq}.$$

(f) Déduisez des identités I et II que $x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$ est une solution de $x^3 = fx + g$.

(g) Montrez que les identités I et II conduisent à

$$p = \frac{g + \sqrt{g^2 - \frac{4}{27}f^3}}{2} \quad \text{et} \quad q = \frac{g - \sqrt{g^2 - \frac{4}{27}f^3}}{2}$$

(à l'échange de p et q près).

(h) Expliquez comment la résolution de toutes les équations cubiques a amené Cardano et ses successeurs à manipuler des nombres complexes.

Exercice 4 (7 points) Retracez dans ses grandes lignes l'histoire entre le XVII^{e} et le début du XIX^{e} siècle de la branche mathématique appelée aujourd'hui « analyse ». Votre résumé devra notamment :

- expliquer l'origine du mot « analyse » ;
- expliquer la nouveauté qu'a constituée le calcul infinitésimal de Newton et Leibniz ;
- mentionner les différences entre le calcul de Newton et Leibniz et l'analyse moderne ;
- citer les noms des principaux mathématiciens ayant pris part au développement de l'analyse et attribuer à chacun ses principales contributions.

Corrigé

Exercice 1 (a) Vrai (cf. polycopié, §5.4.2) ; (b) Vrai (cf. polycopié, §3.4.4) ; (c) Faux (cf. polycopié, §4.4.1) ; (d) Faux (cf. polycopié, Chap. 8, note 4, et §9.6) ; (e) Vrai ; (f) Faux (Archimède a vécu après Euclide) ; (g) Faux (cf. polycopié, §2.5 : les dates de naissance et de mort des mathématiciens de cette époque ne sont pas connues avec précision) ; (h) Faux (cf. polycopié, §10.1 et §10.3.1) ; (i) Vrai (cf. polycopié, §6.1.2) ; (j) Faux (cf. polycopié, §1.3).

Barème : 0,5 point par réponse juste, –0,5 point par réponse fausse. Les points négatifs (perdus) ont été reportés sur les autres exercices de l'examen.

Exercice 2 Cet exercice était une question de cours : il s'agissait essentiellement de résumer le §2.5.4 du polycopié. Les détails que nous avons récompensés sont : la définition de l'incommensurabilité (de préférence sont une forme géométrique plutôt qu'un énoncé moderne avec des fractions m/n), une date approximative pour la découverte (vers 430 avant J.-C.), les exemples géométriques (par exemple, la longueur du côté et de la diagonale d'un pentagone régulier sont incommensurables), et l'impact de la découverte (elle a ruiné la théorie pythagoricienne qui plaçait le nombre comme principe universel et a conduit à séparer la géométrie du calcul arithmétique, ce dernier ne pouvant plus être utilisé dans les démonstrations géométriques).

Exercice 4 Le phénomène marquant **au XVII^e^ siècle est l'introduction de l'algèbre en géométrie**. Cela se fait par étapes.

À la fin du XVI^e^ siècle, à travers notamment les écrits de **Pappus**, les mathématiciens européens apprennent que les géomètres de la Grèce antique disposaient d'une **méthode pour découvrir de nouveaux résultats, appelée par eux analyse**. Cette méthode consiste à partir du but cherché et à essayer de remonter aux hypothèses du problème par une suite de réductions. Fin XVI^e^-début XVII^e^, les mathématiciens européens considèrent que **la démarche algébrique peut servir de substitut à cette méthode disparue** : la notion d'inconnue permet en effet de mettre le requis (ce qui est cherché) sur le même plan que le donné (les hypothèses du problème). Exploitant cette idée, **Fermat et Descartes inventent la géométrie analytique dans les années 1630**.

Dans les deux premiers tiers du XVII^e^ siècle, les mathématiciens européens s'intéressent à plusieurs questions nouvelles, par exemple **la détermination des tangentes à une courbe et les problèmes de rectification, de quadrature ou de cubature**. Ces questions sont suscitées notamment par **l'abondance de courbes nouvelles à étudier**, telles les courbes définies par les équations (la géométrie analytique vient juste d'être inventée) ou les courbes définies par des procédés mécaniques (telle la cycloïde). De nombreuses méthodes disparates sont mises au point : **méthode des tangentes de Descartes**, **règles de Hudde**, **méthode des indivisibles de Cavalieri**, qui sera exploitée notamment par **Roberval** puis reprise et amplifiée par **Wallis**, ... Dans ces méthodes, les mathématiciens sont souvent amenés à considérer de façon peu rigoureuse des éléments géométriques infiniment petits, le résultat étant alors obtenu grâce à des transformations géométriques astucieuses, éventuellement complétées par un calcul.

Newton crée son calcul des fluxions vers 1665 ; Leibniz crée son calcul différentiel vers 1675. Les deux calculs, très proches l'un de l'autre, **mettent dans un même cadre conceptuel** les méthodes variées utilisées par leurs prédécesseurs ; **traduisent dans le langage des symboles et des règles de calcul des arguments géométriques** utilisés sur les éléments géométriques infiniment petits ; **sont basés sur l'usage systématique de la relation de réciprocité** qu'ont entre elles les questions de détermination de tangentes et de quadrature, relation reflétée dans les notions de fluente et de fluxion chez Newton et de différence et d'intégrale chez Leibniz. En outre, Newton et Leibniz savent utiliser les **développements en série** pour résoudre les équations auxquelles mènent leurs calculs. Enfin, les années 1705–1715 seront marquées par la **querelle de priorité** entre les deux hommes, querelle qui aura pour conséquence de ralentir la diffusion des progrès scientifiques entre la Grande Bretagne et le continent tout au long du XVIII^e^ siècle.

Le calcul de Leibniz est diffusé assez rapidement, en particulier grâce aux travaux des **frères Bernoulli**. La résolution par Johann Bernoulli du problème de la chaînette, étudiée en cours, nous a permis d'observer qu'**à la fin du XVIIIe siècle, le calcul infinitésimal était encore très lié à la géométrie des courbes**.

Le calcul de Newton et Leibniz présente trois différences majeures avec l'analyse élémentaire moderne des fonctions d'une variable réelle. Premièrement, Newton et Leibniz appliquent leurs calculs à des variables, qui représentent des grandeurs géométriques ; tandis que l'analyse moderne étudie les **fonctions**. Deuxièmement, une fluxion (selon Newton) ou une différence (selon Leibniz) représente la variation d'une variable ordinaire, mais n'est elle-même pas une variable ordinaire ; dans l'analyse moderne, la **dérivée** d'une fonction est une fonction. Troisièmement, les concepts de fluxion et de différence sont définies de façon intuitive chez Newton et Leibniz ; dans l'analyse moderne, la notion de fonction dérivée reçoit **une définition précise basée sur un concept rigoureux de limite**. Fonctions et limites sont deux des piliers de base de l'analyse moderne qui n'existaient pas chez Newton et Leibniz.

La notion de fonction est dégagée et popularisée par Euler en 1748. Ayant à l'époque la signification d'« expression analytique ayant un nombre fini ou infini de termes », c'est une **abstraction suffisamment générale** pour contenir en elle-même non seulement les expressions algébriques habituelles, mais aussi les lignes logarithmiques, exponentielles et trigonométriques. Dans ce cadre, les mathématiciens du XVIIIe siècle peuvent confortablement **manipuler des développements en série**. L'émergence du concept de fonction s'inscrit dans un mouvement général au XVIIIe siècle, qui tend à faire que **l'analyse infinitésimale s'éloigne de la géométrie pour devenir l'étude et la manipulation d'expressions et de formules**. Ce mouvement se produit notamment sous l'impulsion du **développement de la physique** (et notamment de la mécanique), qui devient le terrain d'application privilégié de l'analyse. Parallèlement, l'analyse se ramifie en de nombreuses branches spécialisées.

La notion de dérivée est dégagée par Lagrange à la fin du XVIIIe siècle. Enfin, dans son *Cours d'analyse à l'École Royale Polytechnique* au début des années 1820, **Cauchy fait reposer les concepts de base de l'analyse sur une notion de limite** définie de façon rigoureuse.

Barème : 0,5 point par élément historique pertinent, à concurrence de 7 points. Chaque idée en gras dans le texte ci-dessus correspond à un élément à récompenser dont j'estime qu'on peut attendre des étudiants qu'ils le connaissent. D'autres idées peuvent bien sûr apparaître dans les copies ; c'est déjà le cas du texte ci-dessus. La précision et la richesse des détails fournis *dans la présentation des faits historiques doivent être récompensées.*

Université Louis Pasteur, Strasbourg
U.F.R. de mathématique et d'informatique

1er septembre 2005

D.E.U.G. Sciences première année, mention MIAS

Histoire des Mathématiques — *Durée : 2 heures*

Les calculatrices, les téléphones portables et les documents sont interdits. Le barème de notation indiqué sera peut-être légèrement modifié lors de la correction des copies.

Exercice 1 (6 points) Pour chacune des phrases numérotées (a) à (l) ci-dessous, dites si elle est vraie ou fausse, sans justifier votre réponse. Une réponse juste rapportera 0,5 point ; une réponse fausse vous coûtera 0,5 point.

(a) Leibniz a vécu après Descartes et avant Euler.

(b) Euler fut le premier mathématicien à exclure la notion de quantité infiniment petite de l'Analyse.

(c) Les premières tables trigonométriques furent dressées pour les besoins de l'astronomie.

(d) Le système de numération positionnel décimal (basé sur l'emploi de ce que nous appelons les « chiffres arabes ») a été inventé au Moyen-Âge par les savants de la civilisation arabe.

(e) Archimède fut le premier mathématicien à donner une détermination exacte du volume de la sphère.

(f) Dans les *Éléments* d'Euclide, on trouve une démonstration du théorème de Pythagore.

(g) La notion de fonction dérivée a été dégagée par d'Alembert à la fin du XVIIIe siècle.

(h) La notion de logarithme a été inventée par les géomètres de la Grèce antique.

(i) La géométrie analytique a été inventée dans la première moitié du XVIIe siècle.

(j) Le principe de Cavalieri a permis aux mathématiciens du XVIIe siècle de déterminer des quadratures.

(k) Les savants de la Mésopotamie antique écrivaient leurs textes mathématiques sur du papier.

(l) Il existe encore quelques exemplaires de l'édition originale des *Éléments* d'Euclide.

Exercice 2 (5 points) Retracez dans ses grandes lignes les développements de la théorie des équations algébriques de l'Antiquité jusqu'à la fin de la Renaissance (début du XVIIe siècle). Votre résumé devra notamment :

– indiquer brièvement les connaissances des anciens Mésopotamiens dans ce domaine ;
– mentionner les principales différences entre les *Arithmétiques* de Diophante et le *Kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa-l-muqābala (Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison)* d'al-Khwārizmī ;
– indiquer l'origine du mot « algèbre » et expliquer son sens mathématique initial ;
– exposer les progrès réalisés à la Renaissance par les mathématiciens européens en précisant le nom des principaux contributeurs.

Exercice 3 (3 points) Citez des exemples de techniques anciennes permettant d'effectuer des multiplications. Vous situerez chacune d'elles dans son contexte historique, géographique et matériel (outils utilisés).

Exercice 4 (7 points) Le texte suivant est extrait d'une lettre datée du 30 novembre 1694 et adressée à Gottfried Wilhelm Leibniz par le Marquis Guillaume François de l'Hospital. (L'orthographe de la lettre est d'époque. Nous n'avons fait que moderniser les notations xx, mm, ... en écrivant plutôt x^2, m^2, ...)

> *Je voudrois bien pouvoir vous communiquer quelque chose sur l'inverse des tangentes qui pût vous plaire, mais outre que je n'ai point ici mes papiers, je suis de plus si fort occupé à d'autres affaires que cela ne m'est pas possible pour le present, d'ailleurs je suis persuadé que je ne vous dirois rien de nouveau, et que je n'ai fait qu'efleurer ces matieres en comparaison de vous. Voici cependant une question en ce genre qu'on m'avoit proposée autre fois et dont je n'avois pû alors trouver la solution. On demande la courbe qui a pour soutangente* $\sqrt{ay+x^2}$ *(l'abcisse est* x *et l'appliquée* y*) c'est à dire qui a pour equation differentielle* $y\,dx = dy\,\sqrt{ay+x^2}$*. Je fais* $ay + x^2 = m^2$ *afin d'ôter les incommensurables, et je trouve en prenant les differences* $dy = \frac{2m\,dm - 2x\,dx}{a}$*, ce qui etant substitué dans l'equation precedente avec la valeur de* y *me donne* $2m^2\,dm - 2mx\,dx = m^2\,dx - x^2\,dx$*. Je fais* $m = zx$*, et j'ai* $dm = x\,dz + z\,dx$*, ce qui me donne*
>
> $$\frac{2z^2\,dz}{2z - 2z^3 + z^2 - 1} = \frac{dx}{x},$$
>
> *où les indeterminées avec leur differences sont separées, de sorte qu'il est alors aisé de construire la courbe en supposant les quadratures.*

(a) Rappelez brièvement quelle fut la principale contribution de Leibniz aux mathématiques et quel fut le rôle de l'Hospital dans l'histoire de l'Analyse.

(b) Expliquez, avec le langage mathématique de la fin du XVII^e siècle, comment le problème

On demande la courbe qui a pour soutangente $\sqrt{ay+x^2}$

aboutit à l'équation $y\,dx = dy\sqrt{ay+x^2}$. Vous illustrerez votre réponse à l'aide d'un schéma.

(c) Expliquez avec plus de précision que l'Hospital comment $y\,dx = dy\sqrt{ay+x^2}$ implique $2m^2\,dm - 2mx\,dx = m^2\,dx - x^2\,dx$ lorsqu'on pose $m = \sqrt{ay+x^2}$.

(d) Détaillez les calculs qui aboutissent à $\frac{2z^2\,dz}{2z-2z^3+z^2-1} = \frac{dx}{x}$.

(e) Que signifie la fin de phrase :

où les indeterminées avec leur differences sont separées, de sorte qu'il est alors aisé de construire la courbe en supposant les quadratures.

(f) La méthode que l'Hospital expose ici lui a été communiquée par Johann Bernoulli dans une lettre datée du 20 juin 1693. Citez au moins un exemple d'une contribution de Johann Bernoulli aux mathématiques.

(g) L'Hospital entretenait une correspondance avec Leibniz et avec Johann Bernoulli. À l'époque de Leibniz, l'échange de lettres était-il un mode de communication d'usage courant ou inhabituel ? Les mathématiciens de cette époque diffusaient-il leurs découvertes par d'autres moyens ?

Corrigé

Exercice 1 (a) Vrai ; (b) Faux (cf. polycopié, §10.5 et feuille d'exercices 12, exerc. 2) ; (c) Vrai (cf. polycopié, §3.3) ; (d) Faux (cf. polycopié, §4.4.1) ; (e) Vrai (cf. polycopié, §2.7.1) ; (f) Vrai (cf. polycopié, §2.6.4 et feuille d'exercices 2, exerc. 2) ; (g) Faux (cf. polycopié, §10.4) ; (h) Faux (cf. polycopié, §6.1.3) ; (i) Vrai (cf. polycopié, §7.5) ; (j) Vrai (cf. polycopié, §8.5.1) ; (k) Faux (cf. polycopié, §1.3 et §4.2) ; (l) Faux (cf. polycopié, §2.6.2).

Barème : 0,5 point par réponse juste, –0,5 point par réponse fausse. Les points négatifs (perdus) ont été répercutés sur les autres exercices de l'examen.

Exercice 2

Exercice 3 Le système de numération des anciens Égyptiens, qui fonctionne selon un principe additif, rend facile les opérations de duplication (multiplication par deux) et de dédoublement (division par deux). Les anciens Égyptiens avaient mis au point une technique de multiplication basée sur ces deux opérations. Leur méthode pour multiplier α par β peut s'expliquer de la façon moderne suivante.

On calcule par dédoublements successifs les chiffres a_0, a_1, a_2, … donnant l'écriture en base deux de α :

$$\alpha = a_0 + 2a_1 + 2^2 a_2 + 2^3 a_3 + \cdots$$

Bien sûr a_0 vaut 1 si α est impair et 0 dans le cas contraire : il peut donc être facilement déterminé. Pour déterminer a_1, a_2, a_3, …, on observe que ce sont les chiffres de l'écriture en base deux de $a_1 + 2a_2 + 2^2 a_3 + \cdots$, qui est le quotient q de α dans la division euclidienne par 2. En résumé, la division euclidienne de α par 2 donne le quotient q et le reste a_0. Cela détermine a_0, et on obtiendra a_1, a_2, a_3, …, en répétant le procédé en remplaçant α par q, de manière récursive.

Parallèlement à cette détermination des chiffres a_k, on calcule les nombres $2^k\beta$ à partir de β par duplications successives. Ceci fait, le produit

$$\alpha\beta = a_0 \times \beta + a_1 \times 2\beta + a_2 \times 2^2\beta + a_3 \times 2^3\beta + \cdots$$

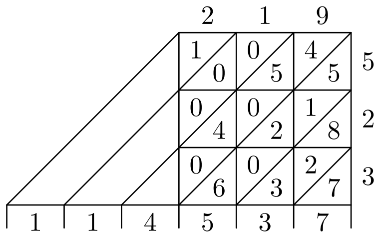
s'obtient en faisant la somme des nombres $2^k\beta$ correspondant aux k pour lesquels $a_k = 1$. Les anciens Égyptiens, qui ne connaissaient ni la théorie de l'écriture des nombres en base deux, ni la division euclidienne, mettaient en œuvre cette méthode grâce à la disposition pratique suivante. Dans la colonne de gauche apparaissent les quotients de divisions euclidiennes successives par deux, à savoir α, $\lfloor \frac{\alpha}{2} \rfloor$, $\lfloor \frac{\alpha}{2^2} \rfloor$, etc. ; les lignes marquées d'un ✓ correspondent aux quotients impairs et indiquent donc les k pour lesquels $a_k = 1$. Dans la colonne de droite apparaissent les valeurs de $2^k\beta$. On calcule ensuite la somme des nombres de la colonne de droite en regard des ✓. Ainsi avec $\alpha = 19$ et $\beta = 23$, on écrira

✓	19	23
✓	9	46
	4	92
	2	184
✓	1	368

Le résultat de la multiplication est ainsi $\alpha\beta = 23 + 46 + 368 = 437$.

Dans ce corrigé, nous ne reviendrons pas sur la méthode qu'employaient les anciens Mésopotamiens, basée sur l'utilisation de tables de multiplication. L'étudiant intéressé peut consulter le §1.5 du polycopié.

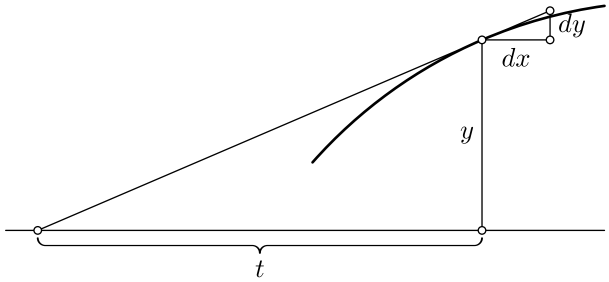
Dans le monde européen et méditerranéen du début du Moyen-Âge, la plupart des multiplications et divisions se faisaient à l'aide d'abaques avec des méthodes faisant intervenir le déplacement de jetons. Il fallait commencer par reporter les opérandes sur la table au moyen des jetons, puis manipuler les jetons (une opération non-interruptible qui nécessitait toute la concentration de l'exécutant), et convertir le résultat dans le système de numération utilisé (souvent les chiffres romains, du moins en Europe occidentale). La popularisation du système de numération positionnel décimal et le développement de l'usage du papier changèrent la donne. Désormais, le système de numération utilisé pour écrire les nombres pouvait être utilisé directement pour effectuer les calculs arithmétiques. Les maîtres de calcul européens, qui enseignaient les méthodes et les applications du calcul numérique, étudièrent alors les dispositions les plus commodes pour conduire les opérations. C'est à eux que nous devons nos dispositions modernes pour la multiplication et la division. La disposition pratique illustrée ci-dessous par l'exemple $219 \times 523 = 114\,537$ est d'origine orientale. On l'appelle « multiplication par jalousie » (*per gelosia* en italien) ; son principe est très proche de notre disposition moderne dite « en château », à ceci près qu'on reporte tous les produits des chiffres apparaissant dans l'un et l'autre nombre avant d'effectuer la moindre addition.



Exercice 4

(a) Leibniz est l'inventeur du calcul différentiel, qui permet de traduire les méthodes et les problèmes liés à l'étude des courbes planes (notamment les questions de tangentes et de quadratures) dans le language des symboles et des équations. L'Hospital est l'auteur du premier manuel enseignant l'usage de ce calcul différentiel (en fait, le livre de L'Hospital n'est que la rédaction des cours enseignés par Johann Bernoulli à L'Hospital).

(b) La figure ci-dessous représente l'axe des x, une courbe, et la tangente à cette courbe en un point de coordonnées (x, y). C'est le segment (ou sa longueur) noté t que l'on désignait autrefois sous le nom de sous-tangente.



Quand les coordonnées x et y s'accroissent d'une quantité infiniment petite dx et dy, le point de coordonnées (x, y) se déplace le long d'un segment infinitésimal tangent à la courbe. Ce segment infinitésimal est l'hypothénuse du « triangle caractéristique », dont les deux autres côtés ont pour longueur dx et dy. Le « triangle caractéristique » est semblable au triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit sont la sous-tangente t et l'ordonnée y. On arrive ainsi à l'équation $dy/dx = y/t$, qui donne $y\,dx = dy\sqrt{ay + x^2}$ quand on impose $t = \sqrt{ay + x^2}$.

(c) De $m^2 = ay+x^2$ vient, en utilisant les règles du calcul différentiel (voir polycopié, §9.3.2) :

$$2m\,dm = a\,dy + 2x\,dx. \tag{1}$$

L'équation obtenue à la question précédente conduit par ailleurs à

$$m\,dy = y\,dx. \tag{2}$$

Ensuite, on élimine dy entre (1) et (2), par exemple en multipliant (1) par m, (2) par a, en ajoutant membre à membre et en simplifiant. On trouve ainsi

$$2m^2\,dm = 2mx\,dx + ay\,dx. \tag{3}$$

On utilise alors la définition $m^2 = ay+x^2$ de m pour remplacer ay par m^2-x^2 dans (3), ce qui laisse

$$2m^2\,dm - 2mx\,dx = (m^2 - x^2)dx. \tag{4}$$

(d) Posons ensuite $m = zx$, d'où $dm = z\,dx + x\,dz$ en utilisant la règle de Leibniz. On substitue cela dans (4), ce qui amène à

$$2z^2x^2(z\,dx + x\,dz) - 2zx^2\,dx = (z^2x^2 - x^2)dx. \tag{5}$$

En simplifiant par x^2 et en réarrangeant les termes dans (5), on trouve

$$2z^2x\,dz = (z^2 - 1 + 2z - 2z^3)dx,$$

un résultat manifestement équivalent à l'équation écrite par L'Hospital :

$$\frac{2z^2\,dz}{2z - 2z^3 + z^2 - 1} = \frac{dx}{x}. \tag{6}$$

(e) L'équation différentielle (6) qui relie les deux variables x et z est « séparée », c'est-à-dire que chacun de ses membres ne fait intervenir qu'une seule des deux variables, z pour le membre de gauche et x pour le membre de droite. Une intégration (qui se traduit par le mot « quadrature » dans le langage géométrique de la fin du XVII$^{\text{e}}$ siècle) permet alors d'écrire chacun de ces deux membres comme la différentielle d'une expression. De manière plus précise (et au prix d'un anachronisme, comparer avec le polycopié, §9.5.3), (6) peut être réécrite sous la forme

$$d\left(\frac{1}{3}\ln(2z-1) - \frac{1}{3}\ln(z+1) - \ln(z-1)\right) = d\ln x,$$

du moins pour $x > 0$ et $z > 1$. Il est alors facile de résoudre (6) : on déduit de la dernière égalité que

$$\frac{1}{3}\ln(2z-1) - \frac{1}{3}\ln(z+1) - \ln(z-1) = x + b,$$

où b est une quantité constante le long de la courbe (différents choix de b conduisent à différentes courbes solutions du problème). En substituant $z = m/x = \sqrt{ay + x^2}/x$, on obtient l'équation de la courbe, dépendant des deux paramètres a et b.

(f) Une des toutes premières contributions de Johann Bernoulli fut de résoudre le problème de la chaînette à l'aide du calcul différentiel. Johann Bernoulli, appelé l'« Archimède de son époque » par ses contemporains, est l'auteur de nombreux autres travaux, souvent liés à l'exploration des possibilités de ce nouvel outil et à ses applications à la mécanique rationnelle, une discipline en plein essor au début du XVIII^{e} siècle.

(g) L'échange de lettres privées était, durant tout le XVII^{e} siècle, le principal moyen de communication entre savants (voir les paragraphes 8.2 et 10.1 du polycopié). Quelques autres moyens existaient cependant : l'édition de livres (une solution onéreuse pour l'auteur et peu commode, en raison de l'absence de réseau de diffusion) ; les voyages (les Anglais Gregory et Barrow ont rédigé leurs livres dans les années 1660 après avoir voyagé sur le continent ; Jacob Bernoulli noua des contacts avec les principaux savants français, néerlandais et anglais lors d'un long voyage d'études en Europe avant d'obtenir son poste de professeur de mathématiques à l'université de Bâle, ...). À partir de la fin du XVII^{e} siècle, d'autres possibilités se développèrent, notamment à travers l'apparition des premières revues savantes (c'est dans les *Acta Eruditorum Lipsiensium*, une revue qu'il avait contribué à fonder, que Leibniz publia ses premiers résultats sur le calcul différentiel dans les années 1680) et la création des premières sociétés de savants (comme la *Royal Society*, fondée en 1660) et des premières Académies des Sciences (l'Académie Royale des Sciences de Paris fut créée en 1666).