Université de Strasbourg
M2 mathématiques fondamentales 2019-20
Représentations de carquois et théorie d'Auslander-Reiten

Feuille d'exercices 1

Exercice 1. Donner un exemple d'une représentation d'un groupe fini qui ne se décompose pas en somme directe de sous-représentations irréductibles.

Exercice 2. Pour chacun des trois cas ci-dessous, donner des exemples de suites exactes courtes de groupes abéliens finis $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ et $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ de sorte que :

(i) $M' \cong N'$, $M \cong N$, $M'' \ncong N''$.

(ii) $M' \cong N'$, $M \ncong N$, $M'' \cong N''$.

(iii) $M' \ncong N'$, $M \cong N$, $M'' \cong N''$.

Exercice 3. Justifier les énoncés suivants.

(i) Le $\mathbf{Z}$-module régulier est noethérien mais pas artinien.

(ii) Si p est un nombre premier, alors le $\mathbf{Z}$-module $\mathbf{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbf{Z}$ est artinien mais pas noethérien. (Indication : on prouvera que les sous-modules propres de $\mathbf{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbf{Z}$ sont de la forme $\frac{1}{p^n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$, avec $n \in \mathbb{N}$.)

Exercice 4. Soient M un A-module et $f \in \mathrm{End}_A(M)$. Montrer que si M est noethérien et f est surjective, alors f est injective. Montrer que si M est artinien et f est injective, alors f est surjective. (Indication : mimer la preuve du lemme de Fitting.)

Exercice 5. Montrer qu'un A-module M dont l'anneau des endomorphismes est local est indécomposable.
(Indication : un anneau local ne possède pas d'idempotent non-trivial.)

Exercice 6.

(i) Soient I et J deux idéaux à gauche d'un anneau A tels que $I + J = A$. Démontrer que $I \oplus J \cong A \oplus (I \cap J)$ en tant que A-modules à gauche.

(ii) Soit $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Soit I (respectivement, J) l'idéal engendré par $\{3, 2 + \sqrt{-5}\}$ (respectivement, $\{3, 2 - \sqrt{-5}\}$). Vérifier que $I + J = A$, que $I \neq A$ et $J \neq A$, et prouver que ni I, ni J n'est principal.
(Indication : Pour vérifier que $I \neq A$ et $J \neq A$, on pourra observer que $IJ = (3)$. Pour montrer que I n'est pas principal, on procédera par l'absurde et on utilisera l'application norme $N : A \to \mathbb{Z}$ définie par $N(a + b\sqrt{-5}) = a^2 + 5b^2$, qui est évidemment multiplicative.)

(iii) On se place dans le cadre de la question précédente. Justifier que I, J et $I \cap J$ sont des A-modules indécomposables. Qu'en déduire sur la nécessité des hypothèses du théorème de Krull-Schmidt ?

Exercice 7. Soit $\mathbf{F}$ un corps fini, de cardinal disons q. On rappelle que pour chaque entier naturel n, le groupe $\mathbf{GL}_n(\mathbf{F})$ est d'ordre $\alpha_n = (q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{n-1})$.

(i) Soient $k \leq n$ deux entiers naturels. Montrer qu'il y a exactement $\alpha_n / \alpha_k \alpha_{n-k}$ paires (X, Y) formées de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbf{F}^n$, tels que $\dim X = k$ et $\dim Y = n - k$.

(ii) Pour chaque entier naturel n, on note β_n le nombre de matrices nilpotentes dans $\mathbf{Mat}_n(\mathbf{F})$ (on convient que $\beta_0 = 1$). Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \beta_k / \alpha_k = q^{n^2} / \alpha_n.$$

(Indication : regardons les éléments de $\mathbf{Mat}_n(\mathbf{F})$ comme des endomorphismes de l'espace vectoriel $V = \mathbf{F}^n$. D'après le lemme de Fitting, chaque élément $u \in \mathbf{Mat}_n(\mathbf{F})$ détermine une unique décomposition $V = u^{\infty}(V) \oplus u^{-\infty}(0)$ en somme directe de deux sous-espaces, sur lesquels u agit de façon respectivement inversible et nilpotente. Ainsi on atteint chaque élément $u \in \mathbf{Mat}_n(\mathbf{F})$ une et une seule fois en prenant une décomposition $V = X \oplus Y$, un endomorphisme nilpotent de X, et un élément de $\mathbf{GL}(Y)$.)

(iii) En déduire que $\beta_n = q^{n(n-1)}$.

Exercice 8.

(i) Soit A un anneau commutatif intègre principal. En utilisant le théorème de structure, donner la liste des A-modules indécomposables de type fini à isomorphisme près.

(ii) De façon générale, on dit qu'un module est unisériel s'il possède exactement une série de composition. Supposons que A soit un anneau commutatif intègre principal. Montrer que chaque A-module indécomposable de longueur finie est unisériel.

Exercice 9.

(i) Trouver les cinq séries de composition du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

(ii) Combien les modules $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ont-il de séries de composition ?

Exercice 10.

(i) Montrer qu'il existe un homomorphisme de groupes abéliens de $G_0(A)$ dans $\mathbf{Z}$ envoyant $[M]$ sur $\ell(M)$ pour tout A-module artinien et noethérien.

(ii) Soit $0 \to M_0 \to M_1 \to \cdots \to M_n \to 0$ une suite exacte de A-modules de longueur finie. Montrer l'égalité $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i [M_i] = 0$ dans $G_0(A)$. En déduire que $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \ell(M_i) = 0$.

(iii) Soient M et N deux A-modules de longueur finie. Montrer que le noyau et le conoyau d'un homomorphisme $f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ sont de longueur finie et que

$$\ell(\ker f) - \ell(\operatorname{coker} f) = \ell(M) - \ell(N).$$

En déduire que dans le cas $\ell(M) = \ell(N)$, un homomorphisme $f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ est injectif si et seulement s'il est surjectif.

Exercice 11. Soient A un anneau et $G_0(A)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des modules de longueur finie sur A. Soit $d : G_0(A) \to \mathbb{R}$ un homomorphisme de groupes. On appelle *pente* d'un A-module M non-nul de longueur finie le nombre réel $\mu(M) = d([M])/\ell(M)$, où $\ell(M)$ est la longueur de M. On dit qu'un A-module M de longueur finie est *semi-stable* si $\mu(M') \leq \mu(M)$ pour tout sous-module non-nul M' de M (en particulier, le module 0 est semi-stable).

(i) Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte courte de A-modules de longueur finie, avec M' et M'' non-nuls, Vérifier que

$$\mu(M') < \mu(M) < \mu(M'') \text{ ou } \mu(M') = \mu(M) = \mu(M'') \text{ ou } \mu(M') > \mu(M) > \mu(M'').$$

(ii) Soient M et N deux A-modules (de longueur finie) semi-stables non-nuls. Établir l'implication

$$\mu(M) > \mu(N) \implies \mathrm{Hom}_A(M, N) = \{0\}.$$

(iii) Soient M et N deux A-modules de longueur finie. On suppose que M est semi-stable non-nul et que N possède une filtration $\{0\} = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \cdots \subsetneq N_n = N$ telle que chaque N_{i+1}/N_i soit semi-stable de pente strictement inférieure à $\mu(M)$. Démontrer que $\mathrm{Hom}_A(M, N) = \{0\}$.

(iv) Prouver l'existence et l'unicité d'une filtration $\{0\} = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n = M$ de M par des sous-modules de sorte que chaque quotient M_{i+1}/M_i soit semi-stable et

$$\mu(M_1/M_0) > \mu(M_2/M_1) > \cdots > \mu(M_n/M_{n-1}).$$

Cette filtration s'appelle *filtration de Harder-Narasimhan* ; elle dépend du choix de d.

(Indication pour (i) : placer sur une figure les points $(\ell(N), d([N])$ pour $N \in \{M, M', M''\}$.

Indication pour (iv) : pour l'existence, appelant θ le maximum des pentes des sous-modules non-nuls de M, choisir pour M_1 un sous-module de longueur maximale parmi les sous-modules de pente θ et observer que la pente de chaque sous-module non-nul de M/M_1 est strictement inférieure à θ ; construire alors les sous-modules suivants par récurrence en considérant M/M_1. Pour l'unicité, considérer deux filtrations

$$\{0\} = M'_0 \subsetneq M'_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M'_{n'} = M \quad \text{et} \quad \{0\} = M''_0 \subsetneq M''_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M''_{n''} = M$$

satisfaisant aux conditions requises ; prouver que $\mu(M'_1) \leq \mu(M''_1)$ en observant que dans le cas contraire, (iii) donnerait $\mathrm{Hom}_A(M'_1, M) = \{0\}$; supposant que $\mu(M'_1) = \mu(M''_1)$, justifier que $\mathrm{Hom}_A(M'_1, M/M''_1) = \{0\}$ et en déduire que $M'_1 \subseteq M''_1$; conclure par récurrence.

Remarque : plaçons sur une figure les points $(\ell(N), d([N])$ pour N sous-module de M ; ils sont en nombre fini (pourquoi ?). Traçons la ligne polygonale formant le bord supérieur de cet ensemble de points. Alors les sommets de cette ligne polygonale sont les points $(\ell(M_j), d([M_j]))$.)

Exercice 12. Soit A un anneau et M un A-module de longueur finie. On définit par récurrence la suite des radicaux itérés de M de la façon suivante :

$$\operatorname{rad}^0 M = M, \quad \operatorname{rad}^{i+1} M = \operatorname{rad}(\operatorname{rad}^i M).$$

On définit par récurrence la suite des socles itérés de M de la façon suivante :

$$\operatorname{soc}^0 M = \{0\}, \quad (\operatorname{soc}^{i+1} M)/(\operatorname{soc}^i M) = \operatorname{soc}\big(M/(\operatorname{soc}^i M)\big).$$

(i) Soit $\{0\} = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M$ une filtration de M par des sous-modules telle que chaque quotient M_{i+1}/M_i soit complètement réductible. Prouver que $M_i \subseteq \operatorname{soc}^i M$ et que $M_i \supseteq \operatorname{rad}^{n-i} M$.

(ii) En déduire que $\min\{n \geq 0 \mid \operatorname{soc}^n M = M\} = \min\{n \geq 0 \mid \operatorname{rad}^n M = 0\}$.

(Note : l'entier mis en évidence dans la question (ii) est appelé *longueur de Loewy* de M.)

Exercice 13. Soit A un anneau. Montrer qu'un élément $x \in A$ est inversible si et seulement si $x + J(A)$ est inversible dans $A/J(A)$.

Exercice 14. Calculer le radical de Jacobson de l'algèbre du groupe symétrique S_3 sur le corps à 3 éléments.

Exercice 15. Soit A un anneau local, c'est-à-dire tel que $A \backslash A^\times$ est un idéal bilatère. Prouver que $J(A) = A \setminus A^\times$.

Exercice 16.

(i) Soit A un anneau commutatif. L'ensemble des éléments nilpotents de A est un idéal, qu'on appelle le nilradical de A et qu'on note $\sqrt{(0)}$ (on sait même que $\sqrt{(0)}$ est l'intersection des idéaux premiers de A). Montrer que si A est artinien, alors $J(A) = \sqrt{(0)}$.

(ii) Soit A un anneau commutatif intègre principal, soit $a \in A$ non-nul. Montrer que $A/(a)$ est semi-simple artinien si et seulement si a est sans facteur carré (c'est-à-dire n'est pas divisible par le carré d'un élément irréductible).

Université de Strasbourg
M2 mathématiques fondamentales 2019-20
Représentations de carquois et théorie d'Auslander-Reiten

Feuille d'exercices 2

Exercice 1. Soient M et N deux A-modules. Prouver que

$$\operatorname{soc}(M \oplus N) = \operatorname{soc} M \oplus \operatorname{soc} N \quad \text{et} \quad \operatorname{rad}(M \oplus N) = \operatorname{rad} M \oplus \operatorname{rad} N.$$

Exercice 2.

(i) Soit $f : M \to N$ un homomorphisme de A-modules. Vérifier que $f(\operatorname{soc} M) \subset \operatorname{soc} N$ et que $f(\operatorname{rad} M) \subset \operatorname{rad} N$; ainsi f induit un homomorphisme $\bar{f} : \operatorname{top} M \to \operatorname{top} N$.

(ii) Prouver que le socle du A-module régulier à gauche est un idéal bilatère de A.

(iii) Considérons une suite exacte de A-modules

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0.$$

Les homomorphismes f et g induisent-ils une suite exacte

$$0 \to \operatorname{top} L \xrightarrow{\bar{f}} \operatorname{top} M \xrightarrow{\bar{g}} \operatorname{top} N \to 0 \ ?$$

Exercice 3. Trouver un anneau A et un A-module M vérifiant

$$M \neq 0, \quad \operatorname{rad} M = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{soc} M = 0.$$

Exercice 4. Soit M un module sur un anneau A.

(i) On suppose M complètement réductible. Prouver que tout sous-module (respectivement, tout module quotient) de M est complètement réductible.

(ii) On suppose M de longueur finie. Justifier que $\operatorname{soc} M$ (respectivement, $\operatorname{top} M$) est le plus grand sous-module (respectivement, quotient) complètement réductible de M.

Exercice 5. (Théorème de Jacobson-Chevalley)
Soit M un A-module complètement réductible, soit $f \in \operatorname{End}_{\mathbb{Z}}(M)$. On suppose que f commute à tous les éléments de $\operatorname{End}_A(M)$. Soit $n \geq 1$ un entier.

(i) Soit $F : M^n \to M^n$ l'application donnée par $F(x_1, \ldots, x_n) = (f(x_1), \ldots, f(x_n))$. Démontrer que F commute à tout élément de $\operatorname{End}_A(M^n)$.

(ii) Pour chaque élément de M^n, construire un homomorphisme dont l'image est le sous-A-module de M^n engendré par cet élément.

(iii) Prouver que pour tout $(m_1, \ldots, m_n) \in M^n$, il existe $a \in A$ tel que $f(m_1) = am_1$, ..., $f(m_n) = am_n$.

Exercice 6. Soient k un corps, E un k-espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E, μ le polynôme minimal de u. On munit E de la structure de $k[X]$-module définie par u.

(i) Supposons que μ soit le produit $P_1 \cdots P_k$ de polynômes irréductibles unitaires distincts. Le lemme des noyaux dit qu'alors $E = \ker P_1(u) \oplus \cdots \oplus \ker P_k(u)$. Montrer que le $k[X]$-module E est complètement réductible et que ses composantes isotypiques sont les $\ker P_i(u)$.

(ii) Réciproquement, montrer que si le $k[X]$-module E est complètement réductible, alors μ est produit de polynômes irréductibles unitaires distincts.

Exercice 7. Prouver, pour tout anneau A, l'équivalence entre les quatre énoncés suivants :

(i) A est local.

(ii) $J(A)$ est l'ensemble des éléments non-inversibles de A.

(iii) $A/J(A)$ est un anneau à division.

(iv) $A \neq \{0\}$ et Pour chaque $x \in A$, x ou $1 - x$ est inversible.

Exercice 8. Soit M un module sur un anneau A artinien à gauche. Prouver que

$$\operatorname{rad} M = J(A)M \quad \text{et} \quad \operatorname{soc} M = \{x \in M \mid J(A)x = 0\}.$$

Exercice 9. Soit $A = B_1 \oplus \cdots \oplus B_n$ la décomposition en blocs d'un anneau artinien ou noethérien à gauche. Montrer que tout A-module M se décompose en somme directe $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$, avec $M_s = B_s M$. Montrer que si $N = N_1 \oplus \cdots \oplus N_n$ est la décomposition d'un second A-module, alors il existe un isomorphisme naturel

$$\operatorname{Hom}_A(M, N) \cong \prod_{s=1}^{n} \operatorname{Hom}_{B_s}(M_s, N_s),$$

et plus généralement, pour chaque $i \geq 0$,

$$\operatorname{Ext}^i_A(M, N) = \prod_{s=1}^{n} \operatorname{Ext}^i_{B_s}(M_s, N_s).$$

Exercice 10. Soit A un anneau, supposé artinien ou noethérien à gauche de façon à pouvoir parler de blocs. Comment se comparent les blocs de A à ceux de $A/J(A)$?

Université de Strasbourg
M2 mathématiques fondamentales 2019-20
Représentations de carquois et théorie d'Auslander-Reiten

Feuille d'exercices 5

Exercice 1. Soit A un anneau artinien à gauche et soit P un A-module projectif indécomposable. Prouver que pour tout sous-module strict $N \subsetneq P$, le quotient P/N est indécomposable. (On admettra que P est nécessairement de type fini.)

Exercice 2. (Lemme de la base duale)
Prouver l'équivalence entre les trois énoncés suivants concernant un A-module à gauche P de type fini :

(i) P est projectif.

(ii) Pour toute famille génératrice finie $(e_1, \ldots, e_n)$ de P, il existe une famille $(e^1, \ldots, e^n)$ d'éléments de $\mathrm{Hom}_A(P, A)$ telle que $x = \sum_{i \in I} e^i(x) e_i$ pour chaque $x \in P$.

(iii) Il existe deux familles finies $(e_1, \ldots, e_n)$ d'éléments de P et $(e^1, \ldots, e^n)$ d'éléments de $\mathrm{Hom}_A(P, A)$ telles que $x = \sum_{i \in I} e^i(x) e_i$ pour chaque $x \in P$.

Exercice 3. Soit A une algèbre de dimension finie sur un corps, soit M un A-module de type fini, et soit S un A-module simple.

(i) Soit P la couverture projective de S. Prouver que $\mathrm{Hom}_A(P, M) \neq 0$ si et seulement si S est un facteur de composition de M, et que la longueur du $\mathrm{End}_A(P)^{\mathrm{op}}$-module $\mathrm{Hom}_A(P, M)$ est égale à la multiplicité de Jordan-Hölder $(M : S)$.

(ii) Soit I l'enveloppe injective de S. Prouver que $\mathrm{Hom}_A(M, I) \neq 0$ si et seulement si S est un facteur de composition de M, et que la longueur du $\mathrm{End}_A(I)$-module $\mathrm{Hom}_A(M, I)$ est égale à la multiplicité de Jordan-Hölder $(M : S)$.

Exercice 4. Soit A un anneau artinien à gauche et soient e et e' deux idempotents primitifs de A. Montrer que les A-modules principaux indécomposables Ae et Ae' ont un facteur de composition commun si et seulement s'il existe un idempotent primitif f de A tel que $\mathrm{Hom}_A(Af, Ae) \neq 0 \neq \mathrm{Hom}_A(Af, Ae')$.

Exercice 5. Soit A un anneau artinien à gauche. Montrer que deux A-modules indécomposables M et M' appartiennent au même bloc si et seulement s'il existe une suite finie de modules indécomposables $M = M_0$, M_1, ..., $M_n = M'$ telle que M_{j-1} et M_j ont un facteur de composition commun pour chaque j.

Exercice 6. Démontrer qu'un anneau commutatif artinien est isomorphe à un produit d'anneaux locaux. (Indication : soit B un bloc d'un anneau commutatif artinien. Alors B est lui-même commutatif artinien. L'anneau $B/J(B)$ est donc semi-simple artinien commutatif, donc est un produit de corps. Justifier que $B/J(B)$ ne possède pas d'idempotent autre que 0 et 1, et conclure que $B/J(B)$ est un corps.)

Exercice 7. Soit A un anneau local. (Ainsi le quotient $\overline{A} = A/J(A)$ est un anneau à division.) Soit P un A-module projectif de type fini.

(i) On désigne par p la surjection canonique de P sur $\overline{P} = P/J(A)P$. En observant que $\overline{P}$ est un $\overline{A}$-module libre de type fini, construire un A-module libre de type fini F et un homomorphisme $h : F \to P$ rendant commutatif le diagramme suivant, où f est la surjection canonique de F sur $\overline{F} = F/J(A)F$.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[d, "f"'] & P \arrow[d, "p"] \\ \overline{F} \arrow[r, "\simeq"] & \overline{P} \end{tikzcd}$$

(ii) Observer que $p \circ h$ est surjectif, puis prouver que h est surjectif en utilisant le lemme de Nakayama.

(iii) Établir l'existence d'un homomorphisme $k : P \to F$ tel que $h \circ k = \mathrm{id}_P$.

(iv) Observer que $f \circ k$ est surjectif, puis prouver que k est surjectif en utilisant le lemme de Nakayama.

(v) Justifier que P est un A-module libre.

Exercice 8. Soit $\mathfrak{r}$ le radical d'un anneau artinien à gauche A. On rappelle que pour tout A-module M, l'application naturelle $A/\mathfrak{r} \otimes_A M \to M/\mathfrak{r}M$ est un isomorphisme.

(i) Soit M un A-module de type fini. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :
  (a) M est projectif.
  (b) $\mathrm{Ext}^1_A(M, A/\mathfrak{r}) = 0$.
  (c) $\mathrm{Ext}^1_A(M, S) = 0$ pour tout A-module simple S.
  (d) $\mathrm{Ext}^1_A(M, N) = 0$ pour tout A-module N de type fini.
  (Indication : pour (d) $\Rightarrow$ (a), prendre pour N le noyau d'un épimorphisme $A^n \to M$.)

(ii) Soit $0 \to K \to P \to M \to 0$ une suite exacte courte de A-modules de type fini, avec P projectif. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :
  (a) $\mathrm{Tor}^A_1(A/\mathfrak{r}, M) = 0$.
  (b) La suite induite $0 \to K/\mathfrak{r}K \to P/\mathfrak{r}P \to M/\mathfrak{r}M \to 0$ est exacte.
  (c) L'homomorphisme induit $K/\mathfrak{r}K \to P/\mathfrak{r}P$ est injectif.

(iii) Soit M un A-module de type fini. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :
  (a) M est projectif.
  (b) M est plat.
  (c) $\mathrm{Tor}^A_1(A/\mathfrak{r}, M) = 0$.
  (Indication : pour (c) $\Rightarrow$ (a), appliquer (ii) à une suite exacte impliquant la couverture de M.)

Université de Strasbourg
M2 mathématiques fondamentales 2019-20
Représentations de carquois et théorie d'Auslander-Reiten

Feuille d'exercices 6

Exercice 1. Soit $f : M' \to M$ un homomorphisme de A-modules et soit

$$\xi : \ 0 \to N \xrightarrow{g} E \xrightarrow{h} M \to 0$$

une suite exacte courte. Prouver que $\mathrm{Ext}^1_A(f, N)[\xi] = 0$ dans $\mathrm{Ext}^1_A(M', N)$ si et seulement s'il existe un homomorphisme $t : M' \to E$ tel que $f = ht$.

Exercice 2. Soit A une algèbre de dimension finie sur un corps k.

(i) Démontrer que A est basique si et seulement si

$$J(A) = \{x \in A \mid x \text{ est nilpotent}\}.$$

(Indication : étudier l'image dans $A/J(A)$ d'un élément nilpotent de A.)

(ii) On suppose A basique. Démontrer que toute sous-algèbre de A est basique.

(iii) On suppose A basique. Démontrer que pour tout idempotent e de A, l'anneau eAe est basique.

Exercice 3. Soit A l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{R}^2$. Clairement A est un sous-anneau de l'anneau des matrices 2×2 à coefficients réels.

(i) Vérifier que les idéaux à gauche de A sont 0, A,

$$J = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; (a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \;\middle|\; (b, c) \in \mathbb{R}^2 \right\},$$

et les idéaux

$$I_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & \lambda b \end{pmatrix} \;\middle|\; b \in \mathbb{R} \right\} \quad (\text{pour } \lambda \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad I_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \;\middle|\; c \in \mathbb{R} \right\}.$$

(ii) Démontrer que A est un anneau artinien à gauche mais pas noethérien à droite.

(iii) Vérifier que I_0 est le radical de Jacobson de A. Démontrer qu'il y a deux classes d'isomorphisme de A-modules simples, à savoir J/I_0 et I_∞, et que les couvertures projectives de ces deux modules simples sont J et I_∞.

(iv) Soit E l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des vecteurs colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$. C'est manifestement un A-module. Quel est son socle ? Prouver que E est indécomposable mais n'est pas de type fini.

On peut vérifier que J/I_0 et E sont des A-modules injectifs ; de fait, ces deux modules sont les enveloppes injectives de J/I_0 et I_∞, respectivement. En particulier, le A-module I_∞ ne se plonge pas dans un A-module injectif de type fini, et la catégorie des A-modules de type fini ne contient pas assez d'injectifs.

Exercice 4. Soit A un anneau artinien à gauche, de radical de Jacobson $\mathfrak{r}$.

(i) Prouver que les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Tout idéal à gauche de A est un A-module projectif.

(b) Tout sous-module d'un A-module projectif de type fini est projectif.

(c) $\operatorname{Ext}^2_A(M,N)=\{0\}$ pour tout A-module de type fini M et tout A-module N.

(d) $\mathfrak{r}$ est un A-module à gauche projectif.

(Indication : prouver (b)$\Rightarrow$(a)$\Rightarrow$(d)$\Rightarrow$(c)$\Rightarrow$(b).)

L'anneau A est dit héréditaire (à gauche) s'il vérifie ces quatre conditions. (On peut en fait omettre « de type fini » dans (b) et (c).) Par exemple, l'algèbre des chemins d'un carquois acyclique (sans cycle orienté) est un anneau héréditaire.

(ii) On suppose que A est héréditaire à gauche. Soit $f : P \to Q$ un homomorphisme non-nul entre deux A-modules indécomposables. On suppose Q projectif de type fini. Prouver que f est un monomorphisme.

(iii) Dans cette question, A est héréditaire à gauche et $\mathfrak{a}$ est un idéal bilatère de A tel que $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{r}^2$. On désigne par $\mathfrak{a}\mathfrak{r}$ le produit des deux idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{r}$.

(a) Justifier que $\mathfrak{r}/\mathfrak{a}\mathfrak{r}$ est un $A/\mathfrak{a}$-module projectif.

(b) Prouver que $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\mathfrak{r}$ est inclus dans le radical du $A/\mathfrak{a}$-module $\mathfrak{r}/\mathfrak{a}\mathfrak{r}$.

(c) En déduire que la surjection naturelle $\mathfrak{r}/\mathfrak{a}\mathfrak{r}\to\mathfrak{r}/\mathfrak{a}$ est une couverture projective du $A/\mathfrak{a}$-module $\mathfrak{r}/\mathfrak{a}$.

(d) Démontrer que l'anneau $A/\mathfrak{a}$ ne peut pas être héréditaire si $\mathfrak{a}\neq 0$.

(iv) Soit Q un carquois, k un corps, et J un idéal admissible de kQ. On suppose que l'algèbre $B=kQ/J$ (qui est nécessairement de dimension finie) est héréditaire à gauche.

(a) Pour tout sommet $i\in Q_0$, on désigne par $\bar{e}_i$ l'image dans B du chemin paresseux e_i de kQ. Prouver que s'il y a une arête orientée de i vers j dans Q_1, alors l'homomorphisme naturel de B-modules $B\bar{e}_j\to B\bar{e}_i$ est un monomorphisme.

(b) Déduire du (a) que Q est acyclique.

(c) En utilisant (iii), prouver que $J=\{0\}$.
(Indication : il faut appliquer (iii) à $A=kQ$.)

Université de Strasbourg
M2 mathématiques fondamentales 2019-20
Représentations de carquois et théorie d'Auslander-Reiten

Feuille d'exercices 7

Exercice 1. Soit $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ un carquois, k un corps, et X un kQ-module de dimension finie sur k. Pour $i \in Q_0$, on désigne par $P_i = (kQ)e_i$ le kQ-module principal (projectif) indécomposable défini par le chemin paresseux e_i et par S_i le kQ-module simple de dimension 1 basé au sommet i.

(i) On suppose que Q est acyclique. Justifier les égalités

$$\dim_k(e_i X) = \dim_k \operatorname{Hom}_{kQ}(P_i, X) = (X : S_i).$$

(ii) Ces équations restent-elles vraies dans le cas général ? Expliquer quels arguments doivent être modifiés.

Exercice 2. Soit k un corps de caractéristique 3 et A l'algèbre sur k du groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$. On introduit les éléments suivants de A :

$$e_1 = 2(\mathrm{id} + (12)), \quad e_2 = 2(\mathrm{id} - (12)), \quad a = \mathrm{id} - (123), \quad b = a^2 = \mathrm{id} + (123) + (132),$$
$$\alpha = e_2 a e_1 = (132) - (123) + (23) - (13), \qquad \beta = e_1 a e_2 = (132) - (123) - (23) + (13).$$

Des calculs directs (qui ne sont pas demandés) permettent d'établir que $(e_1, e_2, \alpha, \beta, be_1, be_2)$ est une base de A, que b est central, que $a^3 = 0$, que $\beta\alpha = be_1$, et que $\alpha\beta = be_2$. On établit semblablement que $Aa = aA = AaA$, autrement dit que les idéaux à gauche, à droite et bilatère engendrés par a coïncident.

(i) Déterminer le radical de Jacobson de A.

(ii) Vérifier que $1 = e_1 + e_2$ est une décomposition de l'unité en somme de deux idempotents orthogonaux primitifs dans A.

(iii) Justifier que l'algèbre A est basique et déterminer son carquois de Gabriel Q.

(iv) Trouver un idéal admissible I de kQ tel que $kQ/I \cong A$. (On décrira I par un ensemble explicite de générateurs.)

Exercice 3. Soit k un corps et Q le carquois $1 \underset{\alpha}{\overset{\beta}{\rightleftarrows}} 2 \circlearrowright \gamma$. On considère les idéaux

$$I = \langle \beta\alpha - \gamma^2, \alpha\beta, \gamma^3 \rangle \quad \text{et} \quad J = \langle \beta\alpha - \gamma^2, \alpha\beta - \alpha\gamma\beta, \gamma^3 \rangle$$

de kQ.

(i) Calculer les dimensions de kQ/I et kQ/J, justifier que $I \neq J$, et vérifier que I et J sont des idéaux admissibles de kQ.

(ii) Prouver que les algèbres kQ/I et kQ/J sont isomorphes.

Exercice 4. Soit Q le carquois

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
1 \arrow[dr, "\alpha"'] & & 3 \arrow[dl, "\beta"] \\
& 2 \arrow[d, "\gamma"] & \\
& 4 &
\end{tikzcd}$$

(i) Calculer les représentations obtenues en appliquant successivement à S_1 les foncteurs de réflexion Σ_4, Σ_2, Σ_1, Σ_3, Σ_4, Σ_2, Σ_1, Σ_3, Σ_4, Σ_2, Σ_1.

(ii) Comment construire la représentation indécomposable M de vecteur-dimension $(1, 2, 1, 1)$? Déterminer $\Sigma_1^*\Sigma_4 M$.

Exercice 5. Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux catégories et soient $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ et $G : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ deux foncteurs.

(i) On suppose que (F, G) est une paire de foncteurs adjoints : il existe un isomorphisme

$$u_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(FX, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, GY)$$

naturel en $(X, Y) \in \mathscr{A}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{B}$. Construire des transformations naturelles $\eta : \mathrm{id}_{\mathscr{A}} \to GF$ et $\varepsilon : FG \to \mathrm{id}_{\mathscr{B}}$. (Ces transformations naturelles sont appelées *morphismes d'adjonction.*)

(ii) Dans le cadre de (i), prouver que les compositions

$$F \xrightarrow{F\eta} FGF \xrightarrow{\varepsilon F} F \quad \text{et} \quad G \xrightarrow{\eta G} GFG \xrightarrow{G\varepsilon} G$$

sont les identités de F et G, respectivement.

(iii) Inversement, supposons disposer de transformations naturelles $\eta : \mathrm{id}_{\mathscr{A}} \to GF$ et $\varepsilon : FG \to \mathrm{id}_{\mathscr{B}}$ satisfaisant à la condition du (ii). Prouver qu'alors (F, G) est une paire de foncteurs adjoints.