Représentations complexes du groupe unitaire

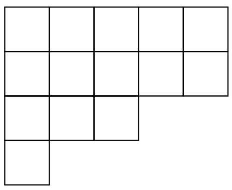
Pierre Baumann

Ce texte constitue les notes des deux exposés donnés dans le cadre des *master classes* d'algèbre à Strasbourg du 29 avril au 3 mai 2024. J'ai tenté d'améliorer substantiellement l'exposé, en motivant davantage les constructions, en rendant la notation plus cohérente et en complétant des preuves parfois laissées à l'état d'ébauche durant la master class. La section 4, qui n'a pas été exposée oralement faute de temps, était prévue dans le projet initial et mentionnée dans le résumé.

Le sujet de ce cours était les représentations (continues, complexes, de dimension finie) du groupe unitaire $\mathbf{U}(n)$ et les représentations rationnelles du groupe $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. Le matériel couvert est très classique : la détermination des caractères irréductibles par la méthode de Weyl (en utilisant la formule d'intégration de Weyl et les fonctions de Schur) et la construction explicite des représentations par le théorème de Borel–Weil.

Notations. Dans toute la suite, n sera un entier strictement positif. Nous noterons X le réseau $\mathbb{Z}^n$; les éléments de X seront appelés *poids*. Un poids μ est donc une suite finie $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ d'entiers relatifs, dont la somme sera désignée par $|\mu|$. Nous munissons X d'une relation d'ordre $\leq$ en décrétant que $\mu \leq \lambda$ si $|\mu| = |\lambda|$ et si $\mu_1 + \cdots + \mu_i \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Nous dirons qu'un poids μ est dominant si $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n$.

Une partition est une suite décroissante $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ d'entiers naturels, nulle à partir d'un certain rang. Les λ_i sont appelés les parts de λ, et le nombre $\ell(\lambda)$ de parts non nulles de λ est appelé la longueur de λ. Une partition est souvent représentée par un diagramme ; par exemple la partition $\lambda = (5, 5, 3, 1, 0, \ldots)$ est représentée par



Une partition λ de longueur inférieure ou égale à n peut être vue comme un poids dominant. L'ensemble des partitions est noté $\mathscr{P}$, l'ensemble des partitions de longueur inférieure ou égale à n sera noté $\mathscr{P}_n$. On note δ la partition $(n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$, appelée « vecteur de Weyl ».

Si x_1, ..., x_n sont des indéterminées (respectivement, si z_1, ..., z_n sont des nombres complexes) et si $\mu \in X$, on note $x^\mu = x_1^{\mu_1} \cdots x_n^{\mu_n}$ (respectivement $z^\mu = z_1^{\mu_1} \cdots z_n^{\mu_n}$).

1 Fonctions de Schur

Nous considérons n indéterminées x_1, ..., x_n et notons Λ_n le sous-anneau de $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ formé des polynômes invariants sous l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Il y a deux façons simples de construire des éléments de Λ_n.

La première consiste à choisir une partition $\lambda \in \mathscr{P}_n$ et à appeler m_λ la somme des monômes distincts de la forme $x_{\sigma(1)}^{\lambda_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{\lambda_n}$, où $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. (Cette somme ne comporte $n!$ termes que si les parts de λ sont deux à deux distinctes.) Les polynômes m_λ sont appelés fonctions monomiales.

La seconde consiste à observer que le polynôme

$$V = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$$

est *antisymétrique*, c'est-à-dire change de signe lorsqu'on échange deux indéterminées x_i et x_j, et que la multiplication par V est un isomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules de Λ_n sur l'ensemble des polynômes antisymétriques [1]. On peut ainsi construire des polynômes symétriques en prenant le quotient d'une somme alternée

$$a_\mu = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)}^{\mu_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{\mu_n}$$

par V, où μ est un poids. On peut supposer ici que les coordonnées de μ sont deux à deux distinctes (sinon $a_\mu = 0$) et forment une suite strictement décroissante (réordonner les μ_i multiplie a_μ par ± 1), autrement dit qu'il existe une partition λ telle que $\mu = \lambda + \delta$. Nous remarquons également que $V = a_\delta$, grâce à la formule du déterminant de Vandermonde. Ces remarques conduisent à définir la « fonction de Schur »

$$s_\lambda = a_{\lambda+\delta}/a_\delta$$

pour chaque $\lambda \in \mathscr{P}_n$.

Proposition. *Les familles $\{m_\lambda \mid \lambda \in \mathscr{P}_n\}$ et $\{s_\lambda \mid \lambda \in \mathscr{P}_n\}$ sont l'une et l'autre des bases du $\mathbb{Z}$-module Λ_n.*

L'objectif de la suite de cette section est d'obtenir une expression explicite des fonctions de Schur, et notamment de démontrer que c'est un polynôme à coefficients positifs (théorème de Littlewood). L'outil principal sera la (les) formule(s) de Pieri.

Pour $k \geq 1$, définissons les polynômes symétriques élémentaires e_k et les fonctions symétriques complètes h_k par

$$e_k = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_k} \qquad \text{et} \qquad h_k = \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_k}$$

1. Le point difficile est de voir que tout polynôme antisymétrique est divisible par V. Soit P un tel polynôme. Pour chaque paire $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ telle que $i < j$, la substitution dans P de x_j à x_i donne le polynôme nul. Une division euclidienne dans l'anneau $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n][x_i]$ montre alors que $x_i - x_j$ divise P. Comme ces polynômes $x_i - x_j$, pour $i < j$, sont irréductibles et deux à deux non associés, leur produit V divise P dans l'anneau factoriel $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$.

(avec $e_k = 0$ si $k > n$ car alors la somme est vide), et convenons que $e_0 = h_0 = 1$.

Ces polynômes sont liés par les égalités

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i e_i h_{k-i} = 0 \qquad \text{pour chaque } k \geq 1.$$

En effet, si nous définissons (dans $\Lambda_n[\![t]\!]$) les séries formelles

$$E(t) = \sum_{k\geq 0} e_k t^k \qquad \text{et} \qquad H(t) = \sum_{k \geq 0} h_k t^k,$$

alors nous avons d'un côté

$$E(t) = \prod_{j=1}^{n} (1 + x_i t),$$

par les relations racines-coefficients, et de l'autre

$$\begin{aligned} H(t) &= \sum_{k\geq 0} \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n} (x_{i_1} t) \cdots (x_{i_k} t) \\ &= \sum_{p_1, \ldots, p_n \geq 0} (x_1 t)^{p_1} \cdots (x_n t)^{p_n} \\ &= \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{p \geq 0} (x_j t)^p \right) \\ &= \prod_{j=1}^{n} (1 - x_j t)^{-1}, \end{aligned}$$

d'où $H(t)E(-t) = 1$.

Le théorème ci-dessous affirme que tout élément Λ_n s'exprime de façon unique comme un polynôme en les e_1, ..., e_n (respectivement, $h_1, \ldots, h_n$). Pour chaque partition λ, posons

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \cdots \quad \text{et} \quad h_\lambda = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \cdots .$$

Théorème. *$\{e_{\lambda'} \mid \lambda \in \mathscr{P}_n\}$ et $\{h_{\lambda'} \mid \lambda \in \mathscr{P}_n\}$ sont deux bases du $\mathbf{Z}$-module Λ_n.*

Preuve. Soit $k \in [\![1, n]\!]$; alors les termes de e_k sont des monômes de la forme $x_{i_1} \cdots x_{i_k}$ où $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$. On peut indexer un tel monôme en remplissant du haut vers le base les cases d'une colonne de hauteur k par les entiers i_1, ..., i_k.

Soit maintenant $\lambda \in \mathscr{P}_n$ et soit ℓ la longueur de λ'. Le diagramme de λ s'obtient en juxtaposant des colonnes de hauteur λ'_1, λ'_2, ... Chaque remplissage de ce diagramme par des entiers entre 1 et n, les colonnes étant remplies de façon strictement croissante du haut vers le bas, fournit un monôme du produit $e_{\lambda'} = e_{\lambda'_1} e_{\lambda'_2} \cdots$; ce monôme est x^μ, où μ_j est le nombre de cases contenant j. Les entiers entre 1 et j ne pouvant apparaître que dans les j premières lignes du diagramme, on obtient $\mu_1 + \cdots + \mu_j \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_j$ pour chaque j, c'est-à-dire $\mu \leq \lambda$.

Notons $(C_{\lambda,\mu})_{\mu\in\mathscr{P}_n}$ les coordonnées du polynôme symétrique $e_{\lambda'}$ sur la base $\{m_\mu \mid \mu \in \mathscr{P}_n\}$ des fonctions monomiales. Ce qui précède indique que $(C_{\lambda,\mu})$ est une matrice unitriangulaire inférieure pour l'ordre $\leq$ sur $\mathscr{P}_n$. Cette matrice est donc inversible, et nous concluons que $\{e_{\lambda'} \mid \lambda \in \mathscr{P}_n\}$ est une base du $\mathbf{Z}$-module Λ_n.

Une récurrence permet de transformer les relations $\sum_{i=0}^k (-1)^i e_i h_{k-i} = 0$ en des égalités de la forme

$$h_k = (-1)^{k+1} e_k + P_k(e_1, \dots, e_{k-1}),$$

où P_k est un polynôme à coefficients entiers en $k-1$ indéterminées. Ceci permet d'exprimer les $h_{\lambda'}$ en fonction des $e_{\mu'}$ de façon triangulaire. Du résultat de l'alinéa précédent, nous déduisons alors que $\{h_{\lambda'} \mid \lambda \in \mathscr{P}_n\}$ est une base du $\mathbf{Z}$-module Λ_n. $\square$

Nous voyons en particulier que les h_k pour $k > n$ s'expriment en fonction de h_1, ..., h_n. Ces relations dépendent du nombre n d'indéterminées : dans Λ_{n+1}, le polynôme symétrique élementaire e_{n+1} n'est pas nul et h_{n+1} est algébriquement indépendant de h_1, ..., h_n.

Démontrons à présent les importantes formules de Pieri. Si λ est une partition et $k \geq 1$ est un entier, on désigne par $\lambda \otimes k$ (respectivement, $\lambda \otimes 1^k$) l'ensemble des partitions μ obtenues en ajoutant k cases au diagramme de λ, au plus une par colonne (respectivement, ligne).

Formules de Pieri. *Pour chaque partition $\lambda \in \mathscr{P}$ et chaque entier $k \geq 0$, et en convenant que $s_\mu = 0$ si μ est une partition de longueur strictement supérieure à n, on a*

$$s_\lambda h_k = \sum_{\mu \in \lambda \otimes k} s_\mu \qquad \text{et} \qquad s_\lambda e_k = \sum_{\mu \in \lambda \otimes 1^k} s_\mu.$$

Preuve. Supposant que λ est de longueur inférieure ou égale à n, nous calculons

$$\begin{aligned}
a_{\lambda+\delta} h_k &= \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)}^{\lambda_1+\delta_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{\lambda_n+\delta_n} \right) \left(\sum_{\substack{\alpha \in \mathbf{N}^n \\ |\alpha| = k}} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \right) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)}^{\lambda_1+\delta_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{\lambda_n+\delta_n} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbf{N}^n \\ |\alpha| = k}} x_{\sigma(1)}^{\alpha_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{\alpha_n} \right) \\
&= \sum_{\substack{\alpha \in \mathbf{N}^n \\ |\alpha| = k}} \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)}^{\lambda_1+\delta_1+\alpha_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{\lambda_n+\delta_n+\alpha_n} \right) \\
&= \sum_{\substack{\alpha \in \mathbf{N}^n \\ |\alpha| = k}} a_{\lambda+\delta+\alpha}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$a_{\lambda+\delta}h_k = \sum_{\mu\in\lambda\otimes k} a_{\mu+\delta} + \sum_{\substack{|\alpha|=k \\ \lambda+\alpha\notin\lambda\otimes k}} a_{\lambda+\delta+\alpha}. \tag{$*$}$$

La condition $\lambda+\alpha \notin \lambda\otimes k$ signifie qu'il existe i tel que $\alpha_{i+1} > \lambda_i - \lambda_{i+1}$. Choisissant i le plus grand possible vérifiant cette inégalité et posant

$$\beta_j = \begin{cases} \alpha_{i+1} - (\lambda_i - \lambda_{i+1} + 1) & \text{si } j = i, \\ \alpha_i + (\lambda_i - \lambda_{i+1} + 1) & \text{si } j = i+1, \\ \alpha_j & \text{sinon,} \end{cases}$$

on définit une involution $\alpha \mapsto \beta$ de

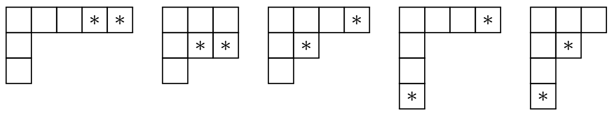
$$\left\{\alpha\in\mathbf{N}^n \;\middle|\; |\alpha| = k,\ \lambda+\alpha\notin\lambda\otimes k\right\}$$

pour laquelle $a_{\lambda+\alpha+\delta} = -a_{\lambda+\beta+\delta}$. Les termes non nuls de la seconde somme dans $(*)$ s'annulent donc deux à deux, prouvant la première formule de Pieri.

La preuve de la seconde formule est similaire, en fait un peu plus simple. $\square$

Exemples.

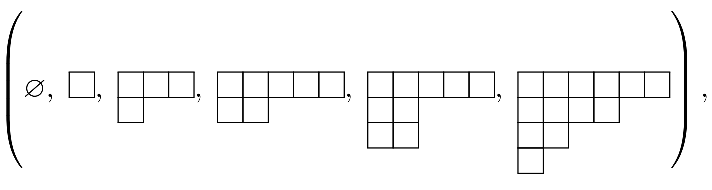
(1) Supposons $n \geq 4$. Alors $s_{311}h_2 = s_{511} + s_{331} + s_{421} + s_{4111} + s_{3211}$. De fait, les partitions appartenant à $(3,1,1,0,\ldots)\otimes 2$ sont donnés par les diagrammes ci-dessous, où les cases rajoutées au diagramme de $(3,1,1,0,\ldots)$ sont indiquées par une étoile.



(2) Soit $k \in [\![1,n]\!]$ et soit 1^k la partition formée d'une série de k termes égaux à 1 suivis de zéros. Alors $s_{1^k} = e_k$.

(3) Soit $\lambda \in \mathscr{P}_n$. Dans l'anneau Λ_n, on a alors $s_\lambda e_n = s_{\lambda+(1,\ldots,1)}$, où $\lambda + (1,\ldots,1)$ est la partition obtenue à partir de λ en ajoutant 1 aux n premières parts – la somme est donc calculée dans le groupe X.

Soit $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_p)$ une suite finie d'entiers naturels. Un tableau semi-standard de poids μ est une suite $T = (\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_p)$ de partitions telle que $\lambda_0 = \varnothing$ et $\lambda_j \in \lambda_{j-1}\otimes\mu_j$ pour chaque $j\in[\![1,p]\!]$. La forme de T est la partition λ_p. On représente un tableau semi-standard en remplissant les cases du diagramme de λ_p par des éléments de $[\![1,p]\!]$, de sorte que le diagramme de λ_j soit formé des cases contenant un entier inférieur ou égal à j. Par exemple, le tableau semi-standard



de poids $(1,3,3,2,4)$ et de forme $(6,4,2,1)$, est indiqué par le remplissage

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 3 & 5 & 5 \\ \cline{1-4} 4 & 4 \\ \cline{1-2} 5 \\ \cline{1-1}\end{array}.$$

La condition $\lambda_j \in \lambda_{j-1} \otimes \mu_j$ fait que le remplissage est croissant dans les lignes et strictement croissant dans les colonnes.

Le nombre de tableaux semi-standards de forme λ et de poids μ est appelé nombre de Kostka et désigné par la notation $K_{\lambda,\mu}$. La formule de Pieri entraîne que pour toute suite finie $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_p)$ d'entiers naturels,

$$h_{\mu_1} \cdots h_{\mu_p} = \sum_{\lambda \in \mathscr{P}_n} K_{\lambda,\mu} s_\lambda.$$

En particulier, $K_{\lambda,\mu}$ ne change pas si l'on permute les termes de la suite μ.

Formule de Cauchy. *Considérons deux jeux de variables* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *et* $\{y_1, \ldots, y_n\}$*. Alors*

$$\sum_{\lambda \in \mathscr{P}_n} s_\lambda(x) s_\lambda(y) = \sum_{\lambda \in \mathscr{P}_n} h_\lambda(x) m_\lambda(y)$$

dans l'anneau de séries formelles $\mathbb{Z}[\![x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]\!]$.

Preuve. Nous partons de la formule du déterminant de Cauchy :

$$\det \left(\frac{1}{1 - x_i y_j} \right)_{1 \le i,j \le n} = \frac{\prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \ \prod_{1 \le i < j \le n} (y_j - y_i)}{\prod_{1 \le i,j \le n} (1 - x_i y_j)}.$$

Le membre de gauche est

$$\det \left(\frac{1}{1 - x_i y_j} \right)_{1 \le i,j \le n} = \begin{vmatrix} & \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{k \ge 0} x_i^k y_1^k & \cdots & \sum\limits_{k \ge 0} x_i^k y_n^k \\ & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = \sum_{k_1, \ldots, k_n \ge 0} y_1^{k_1} \cdots y_n^{k_n} \begin{vmatrix} x_1^{k_1} & \ldots & x_1^{k_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{k_1} & \ldots & x_n^{k_n} \end{vmatrix}.$$

Dans la dernière somme, les termes non-nuls sont ceux pour lesquels k_1, ..., k_n sont deux à deux distincts. On peut alors trouver une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et une partition $\lambda \in \mathscr{P}_n$ telles que $(k_{\sigma(1)}, \ldots, k_{\sigma(n)}) = \lambda + \delta$, et alors le déterminant vaut $\operatorname{sgn}(\sigma) a_{\lambda+\delta}(x)$. Remplaçant la somme sur $(k_1, \ldots, k_n)$ par une somme sur $(\lambda, \sigma) \in \mathscr{P}_n \times \mathfrak{S}_n$, on obtient en fin de compte

$$\det\big((1 - x_i y_j)^{-1}\big)_{1 \le i,j \le n} = \sum_{\lambda \in \mathscr{P}_n} a_{\lambda+\delta}(x) a_{\lambda+\delta}(y),$$

puis

$$\prod_{1 \le i,j \le n} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda \in \mathscr{P}_n} s_\lambda(x) s_\lambda(y).$$

Par ailleurs, en calculant dans $\mathbb{Z}[\![x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]\!]$, on trouve

$$\begin{aligned}
\prod_{1 \le i,j \le n} (1 - x_i y_j)^{-1} &= \prod_{j=1}^{n} H(y_j) \\
&= \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{p \ge 0} h_p(x) y_j^p \right) \\
&= \sum_{p_1, \dots, p_n \ge 0} h_{p_1}(x) \cdots h_{p_n}(x) \; y_1^{p_1} \cdots y_n^{p_n} \\
&= \sum_{\lambda \in \mathscr{P}_n} h_\lambda(x) m_\lambda(y),
\end{aligned}$$

la dernière égalité s'obtenant en rassemblant les contributions provenant des différents n-uplets $(p_1, \dots, p_n)$ obtenus en permutant les parts d'une même partition λ. □

Théorème de Littlewood. *Pour toute partition $\lambda \in \mathscr{P}_n$, on a*

$$s_\lambda = \sum_{\mu \in X} K_{\lambda,\mu} x^\mu.$$

Autrement dit, s_λ est la somme, sur tous les tableaux semi-standards T de forme λ, de x puissance le poids de T.

Preuve. Pour chaque partition $\mu \in \mathscr{P}_n$, on a

$$h_\mu = \sum_{\lambda \in \mathscr{P}_n} K_{\lambda,\mu} s_\lambda.$$

En substituant dans la formule de Cauchy, nous obtenons

$$\sum_{\lambda \in \mathscr{P}_n} s_\lambda(x) s_\lambda(y) = \sum_{(\lambda,\mu) \in (\mathscr{P}_n)^2} K_{\lambda,\mu} s_\lambda(x) m_\mu(y)$$

dans l'anneau $\mathbb{Z}[y_1, \dots, y_n][\![x_1, \dots, x_n]\!]$. L'indépendance linéaire des fonctions $s_\lambda(x)$ entraîne alors

$$s_\lambda(y) = \sum_{\mu \in \mathscr{P}_n} K_{\lambda,\mu} m_\mu(y).$$

La formule annoncée s'obtient en remplaçant les variables y_j par les variables x_j et en utilisant le fait que $K_{\lambda,\mu}$ ne change pas si l'on permute les termes de la suite μ. □

Exercice. Vérifier que pour $n = 3$,

$$s_{22} = x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2 + x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2.$$

2 Théorie de Peter–Weyl

Dans cette section, G désignera un groupe topologique et $C(G,\mathbb{C})$ l'algèbre des fonctions continues sur G à valeurs complexes. On munit $C(G,\mathbb{C})$ d'une involution $*$, qui envoie une fonction φ sur la fonction $\varphi^* : g \mapsto \varphi(g^{-1})$. Sauf mention explicite du contraire, les représentations considérées ici seront toujours supposées de dimension finie.

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $\rho : G \to \mathbf{GL}(V)$ une représentation de G sur V. Pour chaque paire $(v, v^*) \in V \times V^*$, on note $\theta^\rho(v, v^*)$ la fonction sur G à valeurs complexes définie par $\theta^\rho(v, v^*)(g) = \langle v^*, \rho(g)(v)\rangle$ pour tout $g \in G$. Les fonctions de cette forme sont appelées les coefficients de ρ. On dit que la représentation ρ est continue si tous ses coefficients sont des fonctions continues ; cela équivaut à demander que l'application ρ est continue, ou que l'application $(g, v) \mapsto \rho(g)(v)$ de $G \times V$ dans V est continue.

Dans ce cadre, on note $\mathscr{M}_\rho$ le sous-espace de $C(G,\mathbb{C})$ engendré par les coefficients de ρ. Cet espace est engendré par les $\theta^\rho(e_j, e_i^*)$, où (e_i) est une base de V et (e_i^*) est la base duale de V^* ; il est donc de dimension finie. Le caractère de ρ, à savoir la fonction $\chi_\rho : g \mapsto \operatorname{tr}\rho(g)$, appartient à $\mathscr{M}_\rho$; de fait, $\chi_\rho = \sum_i \theta^\rho(e_i, e_i^*)$ avec les notations précédentes.

Exercice. Les actions du groupe G sur lui-même par translations à gauche et à droite induisent deux actions de G sur $C(G,\mathbb{C})$, l'une à gauche et l'autre à droite, définies par

$$g \cdot \varphi = \varphi(?g) \quad \text{et} \quad \varphi \cdot g = \varphi(g?)$$

pour $g \in G$ et $\varphi \in C(G,\mathbb{C})$. Démontrer que pour chaque représentation continue ρ de G, le sous-espace $\mathscr{M}_\rho$ de $C(G,\mathbb{C})$ est stable par ces actions de G.

On note $\mathscr{M}$ la somme des sous-espaces $\mathscr{M}_\rho$, pour toutes les représentations continues ρ.

Proposition. *Une fonction φ appartient à $\mathscr{M}$ si et seulement si le sous-espace de $C(G,\mathbb{C})$ engendré par $\{g \cdot \varphi \mid g \in G\}$ est de dimension finie.*

Preuve. Le sens direct résulte de l'exercice ci-dessus. Réciproquement, soit φ une fonction telle que le sous-espace V de $C(G,\mathbb{C})$ engendré par $\{g \cdot \varphi \mid g \in G\}$ soit de dimension finie. L'action à gauche de G sur $C(G,\mathbb{C})$ laisse stable V, donc définit une représentation $\rho : G \to \mathbf{GL}(V)$. Pour $g \in G$, notons $\mathrm{ev}_g : V \to \mathbb{C}$ la forme linéaire $\psi \mapsto \psi(g)$ donnée par l'évaluation en g et notons W le sous-espace de V^* engendré par ces formes linéaires. L'orthogonal dans V de W est réduit à $\{0\}$, donc $W = V^*$. Par conséquent, $\mathscr{M}_\rho$ est engendré par les fonctions de la forme $\theta^\rho(\psi, \mathrm{ev}_g)$ avec $\psi \in V$ et $g \in G$. Or $\theta^\rho(\psi, \mathrm{ev}_g)$ est la fonction continue $h \mapsto \psi(gh)$. On voit ainsi que $\mathscr{M}_\rho \subset C(G,\mathbb{C})$, autrement dit que ρ est continue. Enfin, l'égalité $\varphi = \theta^\rho(\varphi, \mathrm{ev}_1)$ obtenue chemin faisant montre que φ appartient à $\mathscr{M}_\rho$. $\square$

Le résultat de l'exercice suivant ne sera pas utilisé dans la suite.

Exercice. Démontrer que $\mathscr{M}$ est une sous-algèbre de $C(G,\mathbb{C})$ stable par l'involution $*$. (Indication : utiliser le produit tensoriel de deux représentations ainsi que la notion de représentation contragrédiente, autrement dit, de représentation duale.)

Dans la suite de cette section, G sera réputé être un groupe compact. Il existe alors une unique forme linéaire $M : C(G,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ telle que :

(i) Si $\varphi : G \to \mathbb{R}$ est une fonction continue positive, alors $M(\varphi) \geq 0$.

(ii) Pour toute $\varphi \in C(G,\mathbb{R})$ et tout $g \in G$, on a $M(\varphi) = M(\varphi \cdot g) = M(g \cdot \varphi) = M(\varphi^*)$.

(iii) Si $\mathbf{1}$ désigne la fonction constante égale à 1, alors $M(\mathbf{1}) = 1$.

Cette forme linéaire est représentée par une mesure de Radon positive sur G, appelée mesure de Haar normalisée. Nous utiliserons la notation

$$M(\varphi) = \int_G \varphi(g)\, dg.$$

La mesure de Haar permet de fabriquer par moyennisation des objets invariants par G. Ainsi, si $\rho : G \to \mathbf{GL}(V)$ est une représentation continue, alors on peut définir l'opérateur de Reynolds

$$\natural = \int_G \rho(g)\, dg;$$

c'est l'unique projecteur G-équivariant de V sur le sous-espace V^G des éléments invariants par G.

Considérons encore une représentation continue $\rho : G \to \mathbf{GL}(V)$ et considérons un produit scalaire hermitien $(\cdot,\cdot)$ sur V (c'est-à-dire une forme sesquilinéaire définie positive). Alors

$$(v,w) \mapsto \int_G (\rho(g)(v), \rho(g)(w))\, dg$$

est un produit scalaire hermitien G-invariant sur V. (La positivité provient de la positivité de la mesure de Haar.) Lorsqu'on munit V de ce produit scalaire hermitien G-invariant, les opérateurs $\rho(g)$ deviennent unitaires.

On déduit de cela le théorème de Maschke : toute représentation (de dimension finie) continue $\rho : G \to \mathbf{GL}(V)$ d'un groupe compact est complètement réductible, c'est-à-dire :

— Tout sous-espace de V stable par tous les endomorphismes $\rho(g)$ admet un supplémentaire lui aussi stable par tous les $\rho(g)$.

— La représentation (V,ρ) est la somme de ses sous-représentations irréductibles.

— La représentation (V,ρ) est isomorphe à une somme directe de représentations irréductibles.

Le premier point se prouve en munissant V d'un produit scalaire hermitien invariant par G : si un sous-espace W de V est stable par tous les opérateurs unitaires $\rho(g)$, alors il en est de même de son orthogonal $W^\perp$.

Notons également que si $\rho : G \to \mathbf{GL}(V)$ est une représentation continue irréductible de G, alors le produit scalaire hermitien sur V invariant par G est unique à scalaire près (un tel produit scalaire peut être vu comme un homomorphisme de représentations de $\overline{V}$ dans V^* ; la conclusion provient alors du lemme de Schur). Si l'on fixe ce produit scalaire, et si l'on identifie un vecteur $v \in V$ à la forme linéaire $(v,\cdot)$ qu'il définit sur V, alors pour tout $u \in V$ et tout $g \in G$, on a

$$\theta^\rho(u,v)(g^{-1}) = (v, \rho(g^{-1})(u)) = (\rho(g)(v), u) = \overline{(u, \rho(g)(v))} = \overline{\theta^\rho(v,u)(g)}$$

puisque $\rho(g)$ préserve le produit scalaire.

La mesure de Haar permet également d'obtenir des relations d'orthogonalité entre coefficients de représentations irréductibles.

Proposition. *Soit $\pi : G \to \mathbf{GL}(V)$ et $\rho : G \to \mathbf{GL}(W)$ deux représentations irréductibles continues de G, et soit $(v, v^*, w, w^*) \in V \times V^* \times W \times W^*$. S'il existe un isomorphisme de représentations $f : V \to W$, alors*

$$\int_G \theta^\pi(v, v^*)(g^{-1})\, \theta^\rho(w, w^*)(g)\, dg = \frac{\langle w^*, f(v)\rangle \langle v^*, f^{-1}(w)\rangle}{\dim V};$$

sinon, l'intégrale dans le membre de gauche est nulle.

Preuve. On considère l'application linéaire $u : V \to W$ définie par $u(x) = \langle v^*, x\rangle w$ pour tout $x \in V$. La moyennisation

$$u^\natural = \int_G \rho(g) \circ u \circ \pi(g^{-1})\, dg$$

est un homomorphisme de représentations et le membre de gauche de la relation de l'énoncé est $\langle w^*, u^\natural(v)\rangle$. Si π et ρ ne sont pas isomorphes, alors le seul homomorphisme de représentations de V dans W est zéro, ce qui donne le résultat escompté. Sinon, $u^\natural$ est proportionnel à f d'après le lemme de Schur, d'où

$$u^\natural = \frac{\mathrm{tr}(f^{-1} \circ u^\natural)}{\mathrm{tr}(f^{-1} \circ f)} f = \frac{\mathrm{tr}(f^{-1} \circ u^\natural)}{\dim V} f.$$

On conclut par le calcul ci-dessous, basé sur la cyclicité de la trace et l'équivariance de f :

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(f^{-1} \circ u^\natural) &= \int_G \mathrm{tr}\Big(f^{-1} \circ \rho(g) \circ u \circ \pi(g^{-1})\Big)\, dg \\
&= \int_G \mathrm{tr}\Big(\pi(g^{-1}) \circ f^{-1} \circ \rho(g) \circ u\Big)\, dg \\
&= \int_G \mathrm{tr}(f^{-1} \circ u)\, dg = \mathrm{tr}(f^{-1} \circ u) = \langle v^*, f^{-1}(w)\rangle.
\end{aligned}$$

□

Théorème (Peter–Weyl). *Si G est un groupe compact, alors $\mathscr{M}$ est dense dans $C(G, \mathbb{C})$ pour la norme de la convergence uniforme.*

Preuve. Dans toute la preuve, $C(G, \mathbb{C})$ est considéré comme muni de la norme de la convergence uniforme.

Soit $\rho : G \to \mathbb{R}$ une fonction continue à valeurs positives et d'intégrale 1 pour la mesure de Haar. On peut alors considérer l'opérateur de convolution par ρ : à une fonction $\varphi \in L^2(G, \mathbb{C})$, il associe la fonction $\rho * \varphi$ définie par [2]

$$\rho * \varphi(g) = \int_G \rho(gh^{-1})\varphi(h)\, dh = \int_G \rho(h)\varphi(h^{-1}g)\, dh.$$

2. L'intégrale existe pour tout $g \in G$ car la fonction $h \mapsto \rho(gh^{-1})$ est L^2.

La continuité sous le signe somme entraîne que $\rho * \varphi$ est continue[3], donc en particulier L^2 ; ainsi $\rho *?$ est un opérateur sur l'espace de Hilbert $L^2(G, \mathbb{C})$. Cet opérateur est non seulement continu, mais même compact, car il envoie la boule unité de $L^2(G, \mathbb{C})$ dans un ensemble borné et équicontinu de $C(G, \mathbb{C})$.

De plus, l'action à gauche de G sur $L^2(G, \mathbb{C})$ commute avec $\rho *?$: si $(g, \varphi) \in G \times L^2(G, \mathbb{C})$, alors $g \cdot (\rho * \varphi) = \rho * (g \cdot \varphi)$ (la convolution par ρ fait intervenir une translation à gauche sur l'argument de φ, tandis que l'action à gauche de g se traduit par une translation à droite de l'argument de φ).

Supposons maintenant que ρ est paire, c'est-à-dire $\rho(g^{-1}) = \rho(g)$ pour tout $g \in G$. Alors l'opérateur $\rho *?$ est autoadjoint. Nous pouvons alors lui appliquer la théorie des opérateurs autoadjoints compacts sur un espace de Hilbert : $\rho *?$ possède au plus un ensemble dénombrable de valeurs propres non-nulles, formant une suite tendant vers 0 ; les espaces propres associés aux valeurs propres non-nulles sont de dimension finie ; la somme (orthogonale) des espaces propres (incluant le noyau) est dense dans l'espace total.

Les espaces propres de $\rho *?$ pour les valeurs propres non-nulles sont donc (1) de dimension finie, (2) inclus dans l'image de $\rho *?$ donc dans $C(G, \mathbb{C})$, et (3) stables par l'action à gauche de G sur $C(G, \mathbb{C})$: ils sont donc inclus dans $\mathscr{M}$ d'après une proposition précédente. L'image par $\rho *?$ de la somme de ses espaces propres est donc incluse dans $\mathscr{M}$. Comme $\rho *?$ est continue de $L^2(G, \mathbb{C})$ dans $C(G, \mathbb{C})$, l'image de l'adhérence dans $L^2(G, \mathbb{C})$ de cette somme est incluse dans l'adhérence de $\mathscr{M}$ dans $C(G, \mathbb{C})$. Nous retenons que l'adhérence de $\mathscr{M}$ dans $C(G, \mathbb{C})$ contient l'image de $\rho *?$.

Soit $\varphi \in C(G, \mathbb{C})$ et soit $\varepsilon > 0$. Comme φ est uniformément continue, il existe un voisinage ouvert U de l'élément neutre dans G tel que $|\varphi(g) - \varphi(h)| < \varepsilon$ pour tout $(g, h) \in G^2$ tel que $gh^{-1} \in U$. Le lemme d'Urysohn fournit alors une fonction continue $\rho : G \to \mathbb{C}$ nulle en dehors de $U \cap U^{-1}$, prenant des valeurs positives et d'intégrale 1. Quitte à remplacer ρ par $g \mapsto \frac{1}{2}(\rho(g) + \rho(g^{-1}))$, nous pouvons supposer que ρ est paire. D'après l'alinéa précédent, $\rho * \varphi$ appartient à l'adhérence de $\mathscr{M}$, et le choix de U et ρ implique que la distance de φ à $\rho * \varphi$ est inférieure ou égale à ε pour la norme de la convergence uniforme. Par conséquent, la distance de φ à l'adhérence de $\mathscr{M}$ est inférieure ou égale à ε. Comme ceci vaut pour toute fonction φ et tout $\varepsilon > 0$, le sous-espace $\mathscr{M}$ est bien dense dans $C(G, \mathbb{C})$. □

Munissons $C(G, \mathbb{C})$ du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_G$ défini par

$$(\varphi, \psi)_G = \int_G \overline{\varphi(g)} \psi(g) \, dg.$$

Le complété de $C(G, \mathbb{C})$ pour la norme définie par ce produit scalaire est noté $L^2(G, \mathbb{C})$, et il suit du théorème de Peter–Weyl que $\mathscr{M}$ est dense dans $L^2(G, \mathbb{C})$.

Notons $\widehat{G}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles continues de G. On munit chaque représentation irréductible continue $\rho : G \to \mathbf{GL}(V)$ d'un produit scalaire hermitien invariant par G et d'une base $(e_i^\rho)_{1 \leq i \leq d_\rho}$, où d_ρ est le degré de ρ. D'après les relations d'orthogonalité, les fonctions $\sqrt{d_\rho}\ \theta^\rho(e_j^\rho, e_i^\rho)$ forment une famille orthonormée (pour $\rho \in \widehat{G}$

3. La topologie de G n'étant pas supposée métrisable, on ne doit ici pas faire appel au théorème de convergence dominée, mais utiliser l'uniforme continuité de ρ.

et $(i,j) \in [\![1, d_\rho]\!]^2)$ de $L^2(G,\mathbb{C})$, et le théorème de Peter–Weyl implique que cette famille est complète : c'est donc une base hilbertienne de $L^2(G,\mathbb{C})$. Ce résultat généralise aux groupes compacts la partie « théorie hilbertienne » de la théorie des séries de Fourier.

L'ensemble $L^2(G,\mathbb{C})^G$ des fonctions de classe de carré sommable est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(G,\mathbb{C})$. Il intersecte $\mathscr{M}_\rho$, pour $\rho \in \widehat{G}$, selon la droite engendrée par le caractère χ_ρ. La projection orthogonale de $L^2(G,\mathbb{C})$ sur $L^2(G,\mathbb{C})^G$, qui est donnée par un opérateur de Reynolds, laisse stable chaque $\mathscr{M}_\rho$; nous en déduisons que les caractères irréductibles forment une base hilbertienne de $L^2(G,\mathbb{C})^G$.

Notons enfin que, comme pour les groupes finis, l'orthogonalité des caractères irréductibles et le théorème de Maschke ont pour conséquence que les représentations (de dimension finie) continues d'un groupe compact sont déterminées à isomorphisme près par leurs caractères.

3 Caractères des groupes unitaires

Dans cette section, G sera le groupe unitaire $\mathbf{U}(n) = \bigl\{U \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \mid U^{-1} = {}^t\overline{U}\bigr\}$.

Un rôle majeur dans l'étude des représentations de G est tenu par le sous-groupe T de G formé des matrices diagonales, appelé « tore maximal ». Les coefficients sur la diagonale d'une matrice dans T sont des nombres complexes de module 1, donc T est un groupe abélien compact, isomorphe à $\mathbf{U}(1)^n$.

Puisque T est abélien, les représentations irréductibles sont toutes de dimension 1. L'ensemble $\widehat{T}$ des représentations irréductibles de T à isomorphisme près (autrement dit, l'ensemble des caractères irréductibles de T) est en bijection naturelle avec X : on identifie un poids $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ au caractère irréductible

$$\begin{pmatrix} z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n \end{pmatrix} \mapsto z_1^{\mu_1} \cdots z_n^{\mu_n}$$

de T. D'après le théorème de Maschke, chaque représentation continue $\rho : T \to \mathbf{GL}(V)$ est la somme directe de sous-représentations irréductibles. Regroupant les sous-représentations de même caractère, on peut donc décomposer

$$V = \bigoplus_{\mu \in X} V_\mu, \qquad \text{où} \quad V_\mu = \{v \in V \mid \forall t \in T,\ \rho(t)(v) = \mu(t)v\}.$$

Concrètement, on effectue une diagonalisation simultanée des endomorphismes $\rho(t)$ de V, pour $t \in T$. Les poids $\mu \in X$ tels que $V_\mu \neq \{0\}$ jouent le rôle de valeurs propres simultanées ; leur ensemble est appelé l'ensemble des poids de V.

L'alinéa précédent vaut en particulier pour n'importe quelle représentation continue de G. La difficulté dans l'analyse est ensuite de voir quelles représentations de T proviennent de représentations de G. Ce qui compte ici est le normalisateur de T dans G

$$N_G(T) = \{g \in G \mid gTg^{-1} = T\}$$

et le quotient $W = N_G(T)/T$, appelé « groupe de Weyl ». (Le sous-groupe T est distingué dans $N_G(T)$, par définition.) Concrètement, $N_G(T)$ est formé des matrices monomiales unitaires [4] ; une telle matrice s'écrit de façon unique comme le produit d'une matrice diagonale appartenant à T par une matrice de permutations. Nous pouvons ainsi identifier le groupe de Weyl au groupe des matrices de permutation, d'où un isomorphisme $W \cong \mathfrak{S}_n$.

Le groupe W agit par conjugaison sur T ; dans l'isomorphisme $W \cong \mathfrak{S}_n$, cette action est simplement la permutation des valeurs diagonales d'une matrice :

$$\sigma \cdot \operatorname{diag}(z_1, \ldots, z_n) = \operatorname{diag}\big(z_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, z_{\sigma^{-1}(n)}\big).$$

Le groupe W agit donc également sur le groupe des caractères de T : si $\sigma \in W$ et $\mu \in X$, alors $\sigma \cdot \mu$ est le caractère $t \mapsto \mu(\sigma^{-1} \cdot t)$ de T. Dans l'isomorphisme $\widehat{T} \cong X$, cette action est donnée par

$$\sigma \cdot (\mu_1, \ldots, \mu_n) = \big(\mu_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, \mu_{\sigma^{-1}(n)}\big).$$

Notons $C(G, \mathbb{C})^G$ l'ensemble des fonctions de classe continues sur G et $C(T, \mathbb{C})^W$ l'ensemble des fonctions continues sur T constantes sur les W-orbites. Le résultat-clé est le théorème ci-dessous.

Théorème.

(i) Chaque classe de conjugaison dans G intersecte T selon une W-orbite.

(ii) L'application de restriction $\varphi \mapsto \varphi|_T$ définit un isomorphisme d'algèbres de $C(G, \mathbb{C})^G$ sur $C(T, \mathbb{C})^W$.

(iii) (Formule d'intégration de Weyl.) Pour toute fonction de classe φ continue sur G,

$$\int_G \varphi(g)\, dg = \frac{1}{n!} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \varphi\big(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}\big) \left| \prod_{1 \le j < k \le n} (e^{i\theta_k} - e^{i\theta_j}) \right|^2 \frac{d\theta_1}{2\pi} \cdots \frac{d\theta_n}{2\pi}.$$

Preuve. (i) Soit U une matrice unitaire. On peut la trigonaliser : il existe une matrice inversible $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}UP$ soit triangulaire supérieure. Écrivons la décomposition QR de P, autrement dit, factorisons P comme un produit VT avec V unitaire et T triangulaire supérieure (à valeurs diagonales réelles strictement positives si l'on veut l'unicité). Alors $V^{-1}UV$ est unitaire et triangulaire supérieure, donc diagonale. Nous venons de prouver que toute classe de conjugaison dans G rencontre T.

Maintenant, deux matrices unitaires diagonales conjuguées dans G sont semblables, donc ont les même valeurs propres avec multiplicités : leurs coefficients diagonaux sont donc les mêmes à permutation près. Réciproquement, deux matrices unitaires diagonales dont les coefficients diagonaux sont les mêmes à permutation près sont conjuguées par une matrice de permutation, donc sont conjuguées dans G.

(ii) L'application de restriction $\varphi \mapsto \varphi|_T$ est un homomorphisme d'algèbres de $C(G, \mathbb{C})$ dans $C(T, \mathbb{C})$. Le premier point implique qu'elle envoie bien $C(G, \mathbb{C})^G$ dans $C(T, \mathbb{C})^W$ et qu'elle est

4. Une matrice est dite monomiale si et seulement si chaque ligne et chaque colonne contient un et un seul élément non-nul, et ici cet élément doit être un nombre complexe de module 1.

injective. La difficulté est d'établir la surjectivité : il s'agit de voir qu'une fonction de classe $\varphi : G \to \mathbb{C}$ est continue dès que sa restriction à T l'est. On contemple le diagramme

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[rrr] \arrow[dr] \arrow[drr, "V"] \arrow[ddr, bend right, "\varphi|_T"'] & & & G \arrow[dl, "\widetilde{V}"'] \arrow[ddll, bend left, "\varphi"] \\
& T/W \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & K & \\
& \mathbb{C} & &
\end{tikzcd}$$

où

— $V : T \to \mathbb{C}^n$ est l'application qui envoie $\mathrm{diag}(z_1, \ldots, z_n)$ sur $(z_1 + \cdots + z_n, \ldots, z_1 \cdots z_n)$, le n-uplet formé par les valeurs en $(z_1, \ldots, z_n)$ des fonctions symétriques élémentaires ;

— K est l'image de T par V ;

— $\widetilde{V}$ est l'application qui envoie g sur $(a_1, \ldots, a_n)$, le n-uplet des coefficients de son polynôme caractéristique (avec la convention $\chi_g(t) = t^n - a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} + \cdots + (-1)^n a_n$) ;

— ψ est la fonction induite par $\varphi|_T$.

L'application V se factorise à travers le quotient T/W, induisant une application continue bijective de T/W sur K ; comme T/W est compact (puisque T est compact et W fini — cette dernière hypothèse garantissant que T/W est séparé), le théorème de Poincaré entraîne que la flèche horizontale $T/W \to K$ est un homéomorphisme. Si nous supposons que $\varphi|_T$ est continue, alors ψ l'est aussi, et φ l'est également, par composition.

(iii) La formule d'intégration de Weyl explique comment calculer l'intégrale sur G, pour la mesure de Haar, d'une fonction de classe φ. Essentiellement, on calcule l'intégrale de φ sur chaque classe de conjugaison de G, puis on intègre ensuite sur l'ensemble T/W des classes de conjugaison. Le facteur

$$\left| \prod_{1 \leq j < k \leq n} (e^{i\theta_k} - e^{i\theta_j}) \right|^2$$

apparaissant dans le membre de droite doit être interprété comme étant le volume de la classe de conjugaison de $\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n})$; plus précisément, il est égal à la densité par rapport à la mesure de Haar de T de l'image de la mesure de Haar de G par l'application $\widetilde{V}$ du diagramme ci-dessus.

La preuve de cette dernière affirmation semble difficile car nous n'avons pas de formule explicite pour la mesure de Haar. Pour contourner cet obstacle, nous allons utiliser le vocabulaire de la géométrie différentielle. Le groupe G est une variété différentielle réelle de dimension n^2 ; notons $\mathfrak{g}$ l'espace tangent en l'élément neutre [5], et choisissons une forme n^2-linéaire alternée sur $\mathfrak{g}$, autrement dit une forme linéaire $\omega_1 : \bigwedge^{\dim \mathfrak{g}} \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$. On peut utiliser l'action par translations à gauche de G sur lui-même pour étendre ω_1 en une forme différentielle ω de degré n^2 sur G. L'intégrale d'une fonction f sur G pour la mesure de Haar est alors égale à l'intégrale sur G de $f\omega$, au sens de l'intégrale d'une forme différentielle sur une variété orientée [6]. De facto, nous ramenons la construction de la mesure de Haar à l'existence de la mesure de Lebesgue

5. Cet espace vectoriel $\mathfrak{g}$ peut être identifié à l'espace vectoriel des matrices antihermitiennes ; muni du commutateur, $\mathfrak{g}$ devient une algèbre de Lie.

6. Pour que cette égalité soit correcte, il faut normaliser ω_1 de sorte que l'intégrale de ω sur G vaille 1.

(cette dernière est utilisée, après lecture dans les cartes de l'atlas, pour définir l'intégrale des formes différentielles).

Nous dirons qu'une matrice unitaire est régulière si ses n valeurs propres sont deux à deux distinctes et noterons G^{reg} (respectivement, T^{reg}) l'ensemble des éléments réguliers de G (respectivement, T). Définissons une application $\Phi : G/T \times T^{\text{reg}} \to G^{\text{reg}}$ par $\Phi(gT, t) = gtg^{-1}$. Cette application est un difféomorphisme local et un revêtement de degré $n!$ (un revêtement étale galoisien de groupe de Galois W, pour être pédant). La préimage par Φ d'une classe de conjugaison incluse dans G^{reg} est de la forme $G/T \times \mathscr{O}$, où $\mathscr{O}$ est une W-orbite dans T^{reg} ; son volume est donc $n!$ fois le volume de G/T. Prendre l'image par Φ multiplie ce volume par le jacobien de Φ : la densité de la mesure image de la mesure de Haar par $\widetilde{V}$ est ainsi proportionnelle à ce jacobien.

Décomposons l'espace $\mathfrak{g}$ des matrices antihermitiennes en somme directe $\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{s}$, où $\mathfrak{t}$ est l'ensemble des matrices diagonales à coefficients imaginaires purs et $\mathfrak{s}$ est l'ensemble des matrices antihermitiennes de diagonale nulle. Soit $t \in T^{\text{reg}}$. L'espace tangent à G^{reg} (respectivement, T^{reg}) au point t s'identifie à $t\mathfrak{g}$[7] (respectivement, $t\mathfrak{t}$) et l'espace tangent à G/T au point T s'identifie à $\mathfrak{s}$. L'application tangente à Φ au point (T, t) est l'application linéaire de $\mathfrak{s} \times (t\mathfrak{t})$ dans $t\mathfrak{g}$ donnée par $(X, tY) \mapsto tY + Xt - tX$. Un calcul par blocs montre que le jacobien de Φ en ce point est égal à la valeur absolue du déterminant de l'endomorphisme $\phi : X \mapsto t^{-1}Xt - X$ de l'espace vectoriel $\mathfrak{s}$. Passons en coordonnées et notons $t = \operatorname{diag}(z_1, \ldots, z_n)$. Pour calculer le déterminant de ϕ, le plus simple est de complexifier $\mathfrak{s}$: les matrices élémentaires $E_{j,k}$ (pour $(j, k) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $j \neq k$) forment une base de $\mathfrak{s} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ et chaque $E_{j,k}$ est un vecteur propre de ϕ pour la valeur propre $z_j^{-1} z_k - 1$. Le déterminant de ϕ est alors le produit des valeurs propres

$$\prod_{\substack{1 \leq j,k \leq n \\ j \neq k}} (z_j^{-1} z_k - 1) = \left| \prod_{1 \leq j < k \leq n} (z_k - z_j) \right|^2 .$$

Pour conclure la preuve, nous observons que dans la formule d'intégration de Weyl, restreindre les domaines d'intégration à G^{reg} et T^{reg} ne change pas la valeur des intégrales, car les complémentaires $G \setminus G^{\text{reg}}$ et $T \setminus T^{\text{reg}}$ sont de mesure nulle. □

À un poids dominant μ, on associe une fonction de classe φ_μ sur G de la façon suivante. On choisit un entier m supérieur à $-\mu_n$; alors $\lambda = (\mu_1 + m, \ldots, \mu_n + m)$ est une suite décroissante d'entiers naturels, donc peut être regardé comme une partition de longueur inférieure ou égale à n. Pour $g \in G$, on pose alors

$$\varphi_\mu(g) = \frac{s_\lambda(z_1, \ldots, z_n)}{(z_1 \cdots z_n)^m},$$

où z_1, ..., z_n sont les valeurs propres de g répétées selon leurs multiplicités. Le résultat ne dépend que de μ et g et pas du choix de m en vertu des formules de Pieri (voir p. 5, exemple (3)).

Exercice. Justifier que la fonction φ_μ est bien une fonction de classe continue.

7. Cette notation $t\mathfrak{g}$ désigne l'image de $\mathfrak{g}$ par l'application linéaire tangente à la translation à gauche par t.

Théorème (Weyl). *Les caractères des représentations irréductibles continues de G sont les fonctions φ_μ. Le degré de la représentation de caractère φ_μ est*

$$\varphi_\mu(1) = \prod_{1\leq i<j\leq n} \frac{\mu_i - \mu_j + j - i}{j-i}.$$

Preuve. On commence par vérifier, à l'aide de la formule d'intégration de Weyl, que les fonctions φ_μ, pour μ poids dominant, forment une famille orthonormée pour le produit scalaire sur $C(G, \mathbb{C})$. Le calcul est direct et ne comporte aucune difficulté, le jacobien dans la formule de Weyl étant compensé par le dénominateur a_δ dans la définition des fonctions de Schur.

Nous prouvons à présent que tout caractère irréductible de G est de la forme φ_μ. Considérons une représentation $\rho : G \to \mathbf{GL}(V)$ (de dimension finie) irréductible continue. Nous pouvons la regarder comme une représentation de T et décomposer V en somme directe de sous-espaces de poids. La restriction à T du caractère χ_ρ est donc de la forme

$$\chi_\rho(\mathrm{diag}(z_1, \ldots, z_n)) = \sum_{\mu\in X} (\dim V_\mu)\ z_1^{\mu_1} \cdots z_n^{\mu_n},$$

la somme ne comportant qu'un nombre fini de termes non-nuls. Nous pouvons ainsi trouver un entier m tel que la fonction

$$(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (z_1 \cdots z_n)^m \chi_\rho(\mathrm{diag}(z_1, \ldots, z_n))$$

soit donnée par un polynôme $P(z_1, \ldots, z_n)$ à coefficients entiers positifs. Comme χ_ρ est une fonction de classe sur G, sa restriction à T est W-invariante, ce qui signifie que P est un polynôme symétrique. On peut alors développer P sur la base des fonctions de Schur :

$$P = \sum_{\lambda\in\mathscr{P}_n} c_\lambda s_\lambda,$$

où $(c_\lambda)_{\lambda\in\mathscr{P}_n}$ est une famille presque toute nulle d'entiers relatifs. Ainsi

$$\chi_\rho = \sum_{\lambda\in\mathscr{P}_n} c_\lambda \varphi_{\lambda-(m,\ldots,m)}.$$

Comme χ_ρ est un caractère irréductible, son produit scalaire avec lui-même vaut 1, et l'orthogonalité des fonctions φ_μ établie dans la première étape nous donne

$$1 = \sum_{\lambda\in\mathscr{P}_n} c_\lambda^2.$$

Dès lors, tous les c_λ sont nuls à l'exception d'un seul, qui vaut ± 1. La positivité des coefficients de P et des fonctions de Schur implique que ce c_λ est $+1$, et en fin de compte

$$\chi_\rho = \varphi_{\lambda-(m,\ldots,m)}.$$

Il faut maintenant justifier que tous les φ_μ sont des caractères irréductibles de G. Mais en fait si l'un d'eux n'était pas un caractère irréductible, alors il serait une fonction de classe continue non-nulle orthogonale à tous les caractères irréductibles de G, en contradiction avec le théorème de Peter–Weyl.

À ce stade, nous avons prouvé la première phrase de l'énoncé du théorème. La formule de dimension résulte maintenant d'un calcul. Écrivant comme précédemment $\mu = \lambda-(m,\ldots,m)$, nous avons

$$\varphi_\mu(1) = s_\lambda(1,\ldots,1) = \lim_{t\to 1} \frac{a_{\lambda+\delta}(t^0,t^1,\ldots,t^{n-1})}{a_\delta(t^0,t^1,\ldots,t^{n-1})}.$$

Le numérateur à droite est un déterminant de Vandermonde

$$a_{\lambda+\delta}(t^0,t^1,\ldots,t^{n-1}) = \begin{vmatrix} (t^{\lambda_1+\delta_1})^0 & \cdots & (t^{\lambda_1+\delta_1})^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ (t^{\lambda_n+\delta_n})^0 & \cdots & (t^{\lambda_n+\delta_n})^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} \bigl(t^{\lambda_j+\delta_j} - t^{\lambda_i+\delta_i}\bigr),$$

et nous pouvons conclure

$$\varphi_\mu(1) = \lim_{t\to 1} \prod_{1\le i<j\le n} \frac{t^{\lambda_j+\delta_j} - t^{\lambda_i+\delta_i}}{t^{\delta_j} - t^{\delta_i}} = \prod_{1\le i<j\le n} \frac{(\lambda_j+\delta_j)-(\lambda_i+\delta_i)}{\delta_j-\delta_i}.$$

□

Exemple. La fonction de Schur $s_{(1,0,\ldots,0)}$ (respectivement, $s_{(1,\ldots,1)}$) est la fonction symétrique élémentaire e_1 (respectivement, e_n), et donc $\varphi_{(1,0,\ldots,0)}$ est la trace et $\varphi_{(1,\ldots,1)}$ est le déterminant. Ainsi la représentation dont le caractère est $\varphi_{(1,0,\ldots,0)}$ (respectivement, $\varphi_{(1,\ldots,1)}$) est la représentation naturelle $\mathbf{U}(n) \to \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ (respectivement, le déterminant $\mathbf{U}(n) \to \mathbb{C}^*$).

4 Construction des représentations

Les groupes $\mathbf{U}(n)$ et $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ entretiennent des liens étroits : le premier est un sous-groupe compact maximal du second et l'algèbre de Lie du second groupe est la complexification de l'algèbre de Lie du premier [8].

Il faut alors comprendre $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ comme l'enveloppe holomorphe de $\mathbf{U}(n)$: les coefficients des représentations de $\mathbf{U}(n)$ (qui sont des fonctions analytiques sur $\mathbf{U}(n)$) se prolongent en des fonctions holomorphes (fonctions de plusieurs variables complexes) sur $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. Nous pouvons même dire plus que fonctions holomorphes : ce sont en fait des fonctions régulières sur la variété algébrique $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$.

Définition. Une fonction $f : \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ est dite régulière si elle est de la forme $g \mapsto P\bigl(g_{i,j}, (\det g)^{-1}\bigr)$, où P est un polynôme à coefficients complexes en n^2+1 indéterminées et où les $g_{i,j}$ sont les coefficients de g.

La $\mathbb{C}$-algèbre des fonctions régulières sur $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ est notée $\mathscr{O}(\mathbf{GL}_n(\mathbb{C}))$.

8. L'algèbre de Lie $\mathfrak{u}(n)$ de $\mathbf{U}(n)$ est l'ensemble des matrices antihermitiennes ; celle $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices $n\times n$ à coefficients complexes. La relation énoncée ci-dessus, à savoir $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{u}(n) \oplus i\mathfrak{u}(n)$, signifie juste qu'une matrice à coefficients complexes s'écrit de façon unique comme la somme d'une matrice antihermitienne et d'une matrice hermitienne.

Proposition. *Une fonction régulière sur $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ qui s'annule sur $\mathbf{U}(n)$ est partout nulle.*

Preuve. On sait que si P est un polynôme à coefficients complexes en disons N indéterminées et si la fonction polynôme définie par P est nulle sur $\mathbb{R}^N$, alors P est le polynôme nul. De plus, il est banal d'étendre ce résultat à des fractions rationnelles.

La proposition se ramène à cet énoncé en utilisant la transformation de Cayley

$$c : A \mapsto \frac{I-A}{I+A},$$

qui envoie l'ensemble $\mathfrak{u}(n)$ des matrices antihermitiennes sur l'ensemble des matrices unitaires n'ayant pas -1 comme valeur propre. En effet, si $f : \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ est une fonction régulière nulle sur $\mathbf{U}(n)$, alors $f \circ c : \mathfrak{gl}(n) \to \mathbb{C}$ est une fonction rationnelle sur l'espace vectoriel complexe $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ nulle sur $\mathfrak{u}(n)$. Comme $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{u}(n) \oplus i\mathfrak{u}(n)$, l'énoncé du premier alinéa entraîne que $f \circ c$ est nulle, puis que f est nulle sur l'ensemble des matrices n'ayant pas -1 pour valeur propre, et donc f est partout nulle par densité. $\square$

Définition. Une représentation $\rho : \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathbf{GL}(V)$ est dite régulière[9] si ses coefficients sont des fonctions régulières, autrement dit si $\mathscr{M}_\rho \subset \mathscr{O}(\mathbf{GL}_n(\mathbb{C}))$.

Proposition. *Soit $\rho : \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathbf{GL}(V)$ une représentation régulière ; elle se restreint en une représentation continue $\rho|_{\mathbf{U}(n)} : \mathbf{U}(n) \to \mathbf{GL}(V)$.*

- *(i) Un sous-espace vectoriel de V est stable par tous les éléments de $\rho(\mathbf{GL}_n(\mathbb{C}))$ dès qu'il est stable par tous les éléments de $\rho(\mathbf{U}(n))$.*
- *(ii) Si ρ est une représentation irréductible de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, alors $\rho|_{\mathbf{U}(n)}$ est une représentation irréductible de $\mathbf{U}(n)$.*

Preuve. (i) Dire d'un sous-espace vectoriel W de V qu'il est stable par tous les éléments de $\rho(\mathbf{U}(n))$ (respectivement, $\rho(\mathbf{GL}_n(\mathbb{C}))$), c'est dire que pour chaque vecteur v dans W et chaque forme linéaire v^* dans l'orthogonal de W, le coefficient $\theta^\rho(v, v^*)$ est la fonction nulle sur $\mathbf{U}(n)$ (respectivement, $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$). Le résultat désiré provient ainsi directement de la proposition précédente.

(ii) est un corollaire immédiat de l'énoncé (i). $\square$

Corollaire ("Unitary trick" de Weyl). *Toute représentation régulière de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ est complètement réductible.*

Preuve. La proposition précédente ramène cet énoncé au théorème de Maschke pour le groupe unitaire. $\square$

Notons U le sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ formé des matrices triangulaires supérieures unipotentes.

9. La terminologie officielle est « représentation rationnelle ».

Proposition. *Pour toute représentation régulière de dimension finie $\rho : \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathbf{GL}(V)$, si V n'est pas réduit à $\{0\}$, alors le sous-espace V^U des éléments de V invariants par U n'est pas réduit à $\{0\}$.*

Preuve. Décomposons V en somme de sous-espaces de poids relativement à l'action du tore maximal de $\mathbf{U}(n)$:

$$V = \bigoplus_{\mu \in \Omega} V_\mu,$$

où Ω est l'ensemble des poids de V. L'ensemble Ω est non vide et fini, donc il possède un élément maximal, disons λ, relativement à l'ordre $\leq$ sur X. Nous allons démontrer que V_λ est inclus dans l'ensemble des éléments de V invariants par U.

Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i < j$, notons $E_{i,j}$ la matrice élémentaire ayant un 1 en position (i, j), et appelons $\alpha_{i,j}$ le poids $\varepsilon_i - \varepsilon_j$, where $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est la base canonique de $X = \mathbb{Z}^n$. Considérons le morphisme de groupes $\theta : s \mapsto I + sE_{i,j}$ de $(\mathbb{C}, +)$ dans U. L'application $\rho \circ \theta$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathrm{End}(V)$ est donnée par un polynôme en s, donc est dérivable ; notons $\widetilde{\rho}(E_{i,j})$ sa dérivée en 0.

La relation de commutation $t\theta(s)t^{-1} = \theta(\alpha_{i,j}(t)s)$, valable pour tout élément t du tore T, entraîne $\rho(t) \circ (\rho \circ \theta)(s) = (\rho \circ \theta)(\alpha_{i,j}(t)s) \circ \rho(t)$. En dérivant par rapport à s et en faisant $s = 0$, on obtient

$$\rho(t) \circ \widetilde{\rho}(E_{i,j}) = \alpha_{i,j}(t)\, \widetilde{\rho}(E_{i,j}) \circ \rho(t).$$

Un calcul simple montre alors que pour tout poids $\mu \in \Omega$, l'endomorphisme $\widetilde{\rho}(E_{i,j})$ envoie V_μ dans $V_{\mu+\alpha_{i,j}}$; en particulier, $\widetilde{\rho}(E_{i,j})$ annule V_λ, puisque $\lambda + \alpha_{i,j} \notin \Omega$ par maximalité de λ.

Par ailleurs, en dérivant la relation fonctionnelle $(\rho\circ\theta)(s+r) = (\rho\circ\theta)(s)\circ(\rho\circ\theta)(r)$ (valable pour $(s, r) \in \mathbb{C}^2$) par rapport à r et en faisant $r = 0$, nous obtenons $(\rho \circ \theta)'(s) = (\rho \circ \theta)(s) \circ \widetilde{\rho}(E_{i,j})$.

Soit $v \in V_\lambda$. La fonction $s \mapsto (\rho \circ \theta)(s)(v)$ est de dérivée nulle, donc est constante. Le vecteur v est donc laissé invariant par tous les éléments de la forme $\theta(s) = I + sE_{i,j}$. Il est donc invariant par le sous-groupe engendré par ces éléments, à savoir U. $\square$

Notons B_- le sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ formé des matrices triangulaires inférieures. Chaque poids $\mu \in X$ détermine un homomorphisme de groupes

$$\widetilde{\mu} : B_- \to \mathbb{C}^*, \quad \begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ * & \ddots & 0 \\ * & * & z_n \end{pmatrix} \mapsto z_1^{\mu_1} \cdots z_n^{\mu_n}.$$

Définissons alors

$$\nabla(\mu) = \bigl\{ f \in \mathscr{O}(\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})) \bigm| \forall (b, g) \in B_- \times \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}),\ f(bg) = \widetilde{\mu}(b) f(g) \bigr\}$$

et munissons cet espace d'une action de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ en posant $g \cdot f = f(?g)$ pour $f \in \nabla(\mu)$ et $g \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$.

Remarques.

(1) On dit que la représentation $\nabla(\mu)$ est obtenue en co-induisant la représentation $\widetilde{\mu}$ de B_- à G. Cette opération de co-induction est adjointe à droite de la restriction de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ à B_-.

(2) L'espace vectoriel $\nabla(\mu)$ peut être interprété comme l'ensemble des sections algébriques (ou holomorphes) d'un fibré en droites sur la variété des drapeaux $B_-\backslash\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. Cette dernière étant une variété algébrique projective, il s'ensuit, en vertu d'un théorème de Serre, que $\nabla(\mu)$ est de dimension finie.

(3) En reprenant les arguments de la preuve de la proposition p. 8, on vérifie que $\nabla(\mu)$ est une représentation régulière de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$.

Théorème de Borel–Weil. *Si μ est un poids dominant, alors $\nabla(\mu)$ est une représentation irréductible de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. La restriction à $\mathbf{U}(n)$ du caractère de $\nabla(\mu)$ est φ_μ.*

Preuve. L'ensemble $\{bu \mid (b,u) \in B_- \times U\}$ des matrices admettant une décomposition LU est dense dans $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. Ce fait élémentaire entraîne que le sous-espace des éléments invariants par U dans $\nabla(\mu)$ est de dimension au plus 1.

De fait, soit f_1 et f_2 deux fonctions invariantes par U appartenant à $\nabla(\mu)$. Il existe $(a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que la fonction $f = a_1 f_1 + a_2 f_2$ s'annule en l'élément neutre de G. Alors pour tout $(b,u) \in B_- \times U$,

$$f(bu) = \tilde{\mu}(b)f(u) = \tilde{\mu}(b)(u \cdot f)(1) = \tilde{\mu}(b)f(1) = 0.$$

La fonction f s'annule donc sur l'ensemble des matrices admettant une décomposition LU, donc est nulle, et ainsi f_1 et f_2 sont linéairement dépendantes.

Ce résultat, joint au théorème de Maschke et à la proposition précédente, implique que $\nabla(\mu)$ est soit une représentation irréductible, soit l'espace vectoriel $\{0\}$. Nous verrons dans les exemples ci-dessous que si μ est dominant, alors $\nabla(\mu) \neq \{0\}$; ceci complètera la preuve de la première affirmation de l'énoncé [10]

La démonstration de la proposition précédente indique un fait plus précis : si λ est un poids maximal de $\nabla(\mu)$ et si f est un élément non-nul dans l'espace de poids $\nabla(\mu)_\lambda$, alors f est invariant par U. Une telle fonction vérifie alors $f(bu) = \widetilde{\mu}(b)f(1)$ pour $(b,u) \in B_- \times U$. Il s'ensuit que nécessairement $\lambda = \mu$, car pour $t \in T$ et $(b,u) \in B_- \times U$, on a

$$\lambda(t)f(bu) = (t \cdot f)(bu) = f(but) = f(bt(t^{-1}ut)) = \widetilde{\mu}(bt)f(1) = \mu(t)\widetilde{\mu}(b)f(1) = \mu(t)f(bu),$$

d'où $\lambda(t)f = \mu(t)f$ par densité dans G de l'ensemble $\{bu \mid (b,u) \in B_- \times U\}$. En conclusion, μ est l'unique élément maximal de l'ensemble (fini) des poids de $\nabla(\mu)$, autrement dit le plus grand élément de cet ensemble.

10. La réciproque est vraie : la condition que μ soit dominant est nécessaire pour que la fonction $bu \mapsto \widetilde{\mu}(b)$, définie sur l'ouvert $\{bu \mid (b,u) \in B_- \times U\}$, se prolonge de façon régulière à $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ tout entier. Du point de vue géométrique, le complément de l'ouvert est l'union de $n-1$ diviseurs (définis comme les zéros des mineurs principaux), et cette structure géométrique est à l'origine des $n-1$ inégalités présentes dans la définition de poids dominant.

L'irréductibilité de $\nabla(\mu)$ et le théorème de Weyl impliquent que le caractère de $\nabla(\mu)$ est de la forme φ_ν, avec ν un poids dominant. Cette fonction φ_ν encode précisément la donnée des dimensions des espaces de poids de $\nabla(\mu)$ (voir la preuve du théorème de Weyl). Confrontant le fait que μ est le plus grand poids de $\nabla(\mu)$ avec le théorème de Littlewood (section 1), nous obtenons $\nu = \mu$. $\square$

La fin de cette section est consacrée à des exemples.

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, définissons le poids dominant $\varpi_k \in X$ comme étant $(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$, avec k termes égaux à 1 suivis de $n - k$ termes égaux à zéro. Chaque poids dominant s'écrit de façon unique $\lambda = \ell_1\varpi_1 + \cdots + \ell_n\varpi_n$, avec ℓ_1, ..., ℓ_{n-1} entiers naturels et ℓ_n entier relatif. (Nous avons simplement effectué un changement de base dans X afin que les inégalités définissant le cône des poids dominants soient plus commode à écrire.)

Si $g \in \mathbf{U}(n)$ a pour valeurs propres z_1, ..., z_n, alors $\varphi_{\varpi_k}(g) = e_k(z_1, \ldots, z_n)$ (voir p. 5, exemple (2)), donc

$$\dim \nabla(\varpi_k) = \varphi_{\varpi_k}(1) = e_k(1, \ldots, 1) = \binom{n}{k}.$$

Pour chaque ensemble X, désignons par $\binom{X}{k}$ l'ensemble des parties de X de cardinal k. Abrégeons $[\![1, n]\!]$ en $[n]$, ce que l'on fait fréquemment en combinatoire. Ainsi $\binom{[n]}{k}$ est l'ensemble des sous-ensembles $I \subset [\![1, n]\!]$ de cardinal k.

Pour $I \in \binom{[n]}{k}$, notons $D_{k,I}$ la fonction régulière sur $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ qui, à une matrice $g = (g_{i,j})$, associe le mineur d'ordre k

$$\begin{vmatrix} g_{1,i_1} & \cdots & g_{1,i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{k,i_1} & \cdots & g_{k,i_k} \end{vmatrix},$$

où i_1, ..., i_k sont les éléments de I listés dans l'ordre croissant. Un calcul simple prouve que

$$D_{k,I}(bg) = \widetilde{\varpi}_k(b) D_{k,I}(g)$$

pour chaque $(b, g) \in B_- \times G$, et ainsi $D_{k,I} \in \nabla(\varpi_k)$.

On peut contrôler que les fonctions $D_{k,I}$ sont linéairement indépendantes. Comme $\nabla(\varpi_k)$ est de dimension $\binom{n}{k}$, ces fonctions forment en fait une base de $\nabla(\varpi_k)$.

Exercice. Dans le cas particulier $k = 1$, ce qui précède signifie que les coefficients matriciels $g_{1,1}$, ..., $g_{1,n}$ forment une base de $\nabla(\varpi_1)$. En écrivant explicitement dans cette base l'action de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ sur $\nabla(\varpi_1)$, retrouver le fait que $\nabla(\varpi_1)$ est isomorphe à la représentation naturelle de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}^n$ (donnée par $\mathrm{id} : \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathbf{GL}(\mathbb{C}^n)$).

Prenons maintenant un poids dominant quelconque $\lambda = \ell_1\varpi_1 + \cdots + \ell_n\varpi_n$. La multiplication dans $\mathscr{O}(\mathbf{GL}_n(\mathbb{C}))$ nous donne alors une application $(f_1, \ldots, f_n) \mapsto f_1^{\ell_1} \cdots f_n^{\ell_n}$ de $\nabla(\varpi_1) \times \cdots \times \nabla(\varpi_n)$ vers $\nabla(\lambda)$. Nous voyons ainsi que $\nabla(\lambda) \neq \{0\}$, ce qui complète la preuve du théorème de Borel–Weil de la section précédente.

Enfin, prenons $k \in [\![1, n]\!]$. Les fonctions $D_{k,I}$ sont certes linéairement indépendantes, mais elles satisfont les relations quadratiques de Plücker que P.-G. Plamondon a présentées dans son cours.

Soit $d \geq 1$ un entier. Le sous-espace vectoriel de $\mathscr{O}(\mathbf{GL}_n(\mathbb{C}))$ engendré par les produits $D_{k,I_1} \cdots D_{k,I_d}$, pour I_1, ..., I_d dans $\binom{[n]}{k}$, est inclus dans $\nabla(d\varpi_k)$, et il est stable par l'action de G ; c'est donc $\nabla(d\varpi_k)$ tout entier. Ainsi les produits $D_{k,I_1} \cdots D_{k,I_d}$ forment une famille génératrice de l'espace vectoriel $\nabla(d\varpi_k)$, et la question se pose d'extraire une base de cette famille génératrice ; autrement dit, nous voulons utiliser les relations de Plücker pour éliminer les éléments superflus.

Une réponse est donnée par le théorème ci-dessous, qui incarne la règle combinatoire donnée par le théorème de Littlewood de la section 1. Avant de l'énoncer, observons que le diagramme de la partition $d\varpi_k$ est le rectangle à k lignes et d colonnes. Un tableau semi-standard T de forme $d\varpi_k$ peut ainsi être vu comme une suite de d colonnes de hauteur k remplies par des entiers appartenant à $[\![1, n]\!]$, donc comme une suite de d éléments I_1, ..., I_d de $\binom{[n]}{k}$; avec ces notations, on définit le monôme

$$D_T = D_{k,I_1} \cdots D_{k,I_d}.$$

Théorème (Hodge). *Les monômes D_T, pour T tableau semi-standard de forme $d\varpi_k$, forment une base de $\nabla(d\varpi_k)$.*

Ce théorème est le début d'une histoire plus longue, qui nous emmènerait vers la théorie du monôme standard de Lakshmibai, Littelmann, Musili et Seshadri et explorerait la géométrie de la variété de drapeaux et la combinatoire du groupe de Weyl. Signalons également que l'histoire racontée dans ces notes pour les groupes $\mathbf{U}(n)$ et $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ s'étend aux autres autres classiques de matrices, et plus généralement aux groupes de Lie compacts et réductifs.

5 Coefficients de Littlewood–Richardson

Définition. On appelle coefficients de Littlewood–Richardon les constantes de structure, dans la base des fonctions de Schur, de la multiplication dans Λ_n. Ce sont les entiers relatifs $c^\lambda_{\mu,\nu}$ tels que, pour chaque couple $(\mu, \nu) \in (\mathscr{P}_n)^2$, on ait

$$s_\mu s_\nu = \sum_{\lambda \in \mathscr{P}_n} c^\lambda_{\mu,\nu} s_\lambda.$$

Ces coefficients jouissent manifestement de la propriété de symétrie $c^\lambda_{\mu,\nu} = c^\lambda_{\nu,\mu}$. En revanche, il n'est pas complètement clair que ces nombres sont des entiers naturels. Expliquons donc leur signification en termes de représentations.

À partir de deux espaces vectoriels V et W (sur un corps quelconque), on peut fabriquer deux autres espaces vectoriels, leur somme directe $V \oplus W$ et leur produit tensoriel $V \otimes W$, de sorte que

$$\dim(V \oplus W) = \dim V + \dim W \quad \text{et} \quad \dim(V \otimes W) = \dim V \times \dim W.$$

(La définition est telle que le dual de $V \otimes W$ soit l'espace des formes bilinéaires sur $V \times W$, et cette propriété peut en fait servir de définition en dimension finie.)

Si V et W sont munies d'une action linéaire d'un groupe G, c'est-à-dire si l'on se donne deux représentations $\pi : G \to \mathbf{GL}(V)$ et $\rho : G \to \mathbf{GL}(W)$, alors G agit également linéairement sur $V \oplus W$ et $V \otimes W$, donnant lieu à des représentations notée $\pi \oplus \rho$ et $\pi \otimes \rho$, et l'on a

$$\chi_{\pi\oplus\rho} = \chi_\pi + \chi_\rho \quad \text{et} \quad \chi_{\pi\otimes\rho} = \chi_\pi \times \chi_\rho$$

dans l'anneau des fonctions de classe sur G.

Reprenons notre étude des représentations des groupes $\mathbf{U}(n)$ et $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. D'après le théorème de Maschke, pour tous poids dominants λ et μ, nous pouvons décomposer $\nabla(\mu) \otimes \nabla(\nu)$ en somme directe de représentations irréductibles : regroupant les termes de la somme selon leurs classes d'isomorphisme, nous obtenons des entiers naturels $c^\lambda_{\mu,\nu}$ tels que

$$\nabla(\mu) \otimes \nabla(\nu) = \bigoplus_{\substack{\lambda \in X \\ \lambda \text{ dominant}}} \nabla(\lambda)^{\oplus c^\lambda_{\mu,\nu}}.$$

Passant aux caractères, cela nous donne

$$\varphi_\mu \varphi_\nu = \sum_\lambda c^\lambda_{\mu,\nu} \varphi_\lambda.$$

Si λ, μ et ν sont des partitions, alors ces $c^\lambda_{\mu,\nu}$ sont les coefficients de Littlewood–Richardson.

Proposition. *Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in (\mathscr{P}_n)^3$. Si $c^\lambda_{\mu,\nu} > 0$, alors le diagramme de λ contient les diagrammes de μ et de ν.*

Preuve. Par symétrie, il suffit de regarder le cas de ν. Posons $p = |\mu|$ et considérons la partition $\rho = (1, \ldots, 1, 0, \ldots)$ avec p termes égaux à 1. Nous avons

$$h_\rho = \sum_{\sigma \in \mathscr{P}_n} K_{\sigma,\rho} s_\sigma, \quad K_{\mu,\rho} > 0, \quad \text{et} \quad s_\sigma s_\nu = \sum_{\tau \in \mathscr{P}_n} c^\tau_{\sigma,\nu} s_\tau.$$

Le terme s_λ apparaît donc avec un coefficient strictement positif dans le membre de droite de

$$s_\nu h_\rho = \sum_{\sigma,\tau \in \mathscr{P}_n} K_{\sigma,\rho} c^\tau_{\sigma,\nu} s_\tau.$$

Or le membre de gauche se calcule en itérant la règle de Pieri, qui ajoute des cases au diagramme de ν. □

Définition. Soit $(\lambda, \nu) \in (\mathscr{P}_n)^2$ un couple de partitions telles que le diagramme de λ contienne celui de ν. La fonction de Schur gauche $s_{\lambda/\nu}$ est définie par l'égalité

$$s_{\lambda/\nu} = \sum_{\mu \in \mathscr{P}_n} c^\lambda_{\mu,\nu} s_\mu.$$

Partons de la même donnée (λ, ν) que dans la définition précédente. Soit $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_p)$ une suite finie d'entiers naturels. Un tableau semi-standard de poids μ et de forme λ/ν est une suite $T = (\lambda_0, \ldots, \lambda_p)$ de partitions telles que $\lambda_0 = \nu$, $\lambda_p = \lambda$, et $\lambda_j \in \lambda_{j-1} \otimes \mu_j$ pour $j \in [\![1, p]\!]$. (Nous avons ici utilisé la notation $\lambda \otimes k$ introduite p. 4 juste avant l'énoncé des formules de Pieri.) On représente un tableau semi-standard en remplissant les cases du diagramme de λ par les entiers de 0 à p, indiquant le plus petit j tel que la case appartienne au diagramme de λ_j, et en supprimant les cases du diagramme de ν (où on a mis zéro). Le tableau ci-dessous est un exemple pour $\lambda = (6, 5, 5, 3, 2)$, $\nu = (4, 2, 1)$, $\mu = (5, 4, 3, 1, 1)$.

				1	1
		1	2	2	
	1	2	3	3	
1	2	4			
3	5				

On note $K_{\lambda/\nu,\mu}$ le nombre de tableaux semi-standards de poids μ et de forme λ/ν. En itérant la formule de Pieri, nous obtenons

$$s_\nu h_{\mu_1} \cdots h_{\mu_p} = \sum_{\lambda \in \mathscr{P}_n} K_{\lambda/\nu,\mu} s_\lambda.$$

Le raisonnement utilisé pour démontrer le théorème de Littlewood dans la section 1 se généralise sans difficulté aux fonctions de Schur gauches :

$$s_{\lambda/\nu} = \sum_{\mu \in X} K_{\lambda/\nu,\mu} x^\mu.$$

On dit qu'un mot sur $i_1 i_2 \cdots i_\ell$ sur l'alphabet $[\![1, n]\!]$ est un mot de Yamanouchi (lattice word en anglais) si pour tout $k \in [\![1, \ell]\!]$ et tout $j \in [\![1, n-1]\!]$, le sous-mot initial $i_1 i_2 \cdots i_k$ contient au moins autant de fois la lettre j que la lettre $j+1$. Par exemple, le mot 11221332142153 est de Yamanouchi. On dit qu'un tableau semi-standard est de Littlewood-Richardon si le mot obtenu en lisant ligne par ligne le tableau du haut vers le bas, chaque ligne étant lue de la droite vers la gauche, est un mot de Yamanouchi. L'exemple donné ci-dessus est un tableau de Littlewood–Richardson.

Règle de Littlewood–Richardson. *Le coefficient $c^\lambda_{\mu,\nu}$ est égal au nombre de tableaux de Littlewood–Richardson de forme λ/ν et de poids μ.*

Trois remarques avant d'esquisser la preuve de cette proposition. La première est d'ordre historique : la règle a été énoncée par Littlewood et Richardson dans les années 1930, mais leurs arguments n'établissaient qu'un cas très particulier, et il a fallu attendre la fin des années 1970 pour qu'une preuve complète et compréhensible soit disponible. La seconde remarque est l'observation que la règle ne rend pas du tout transparente la propriété de symétrie $c^\nu_{\mu,\nu} = c^\lambda_{\nu,\mu}$; sauriez-vous trouver une bijection de l'ensemble des tableaux de Littlewood–Richardson de forme λ/ν et de poids μ sur l'ensemble des tableaux de Littlewood–Richardson de forme λ/μ et de poids ν ? La troisième remarque est une autre propriété des coefficients de Littlewood–Richardson : pour $(\lambda, \mu, \nu) \in (\mathscr{P}_n)^3$, s'il existe un entier $N \geq 1$ tel que $c^{N\lambda}_{N\mu,N\nu} > 0$, alors

$c_{\mu,\nu}^{\lambda} > 0$. La règle de Littlewood–Richardson n'est ici d'aucune aide, mais un autre modèle combinatoire, les *honeycombs* de Knutson et Tao, a permis récemment de démontrer cette conjecture.

La première étape de la preuve que nous présentons est la correspondance de Robinson–Schensted. Soit ℓ un entier positif. Cette correspondance est une bijection $w \mapsto (P(w), Q(w))$ de l'ensemble $\mathcal{W}_n(\ell)$ des mots de longueur ℓ sur l'alphabet $[\![1, n]\!]$ sur l'ensemble des couples (P, Q) de tableaux tels que

— P et Q ont ℓ cases et ont même forme, donnée par une partition de ℓ ;

— P est semi-standard, rempli par des entiers dans $[\![1, n]\!]$;

— Q est standard, c'est-à-dire semi-standard mais rempli par les entiers de 1 à ℓ, chacun apparaissant une et une seule fois.

La construction de $P(w)$ et $Q(w)$ procède par récurrence sur la longueur ℓ de w. Soit w dans $\mathcal{W}_n(\ell - 1)$ et soit a une lettre (un élément de $[\![1, n]\!]$). Nous supposons connaître $P(w)$ et $Q(w)$ et voulons définir $P(wa)$ et $Q(wa)$. Si a est plus grand (au sens large) que toutes les entrées dans les cases de la première ligne de $P(w)$, alors on augmente la longueur de la première ligne de $P(w)$ d'une case, dans laquelle on inscrit a, et on s'arrête là. Sinon, on repère la case la plus à gauche sur la première ligne de $P(w)$ contenant une entrée b strictement plus grande que a et on remplace cette entrée par a ; ainsi on a inséré a dans la première ligne de $P(w)$ au prix d'avoir chassé b. On cherche alors à insérer b dans la deuxième ligne, soit en fin de ligne en ajoutant une case si b est plus grand que toutes les entrées de la deuxième ligne de $P(w)$ (la procédure s'arrête alors), soit en inscrivant b à la place d'une entrée c strictement supérieure à b, choisie la plus à gauche possible. Dans cette dernière situation, on continue en insérant c dans la troisième ligne, etc. Le procédé s'arrête au plus tard quand on a chasse une lettre z de la dernière ligne de $P(w)$: on ajoute alors une nouvelle ligne à $P(w)$, formée d'une seule case, dans laquelle on porte z. Le tableau obtenu au terme de cette procédure est $P(wa)$. La forme de $P(wa)$ diffère alors de $P(w)$ d'une case ; $Q(wa)$ est obtenu à partir de $Q(w)$ en ajoutant cette case, de façon que $P(wa)$ et $Q(wa)$ aient même forme, et en y inscrivant ℓ.

Exemple. Si $w = 35124123312211$, alors $P(w) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 \\ \cline{1-4} 3 & 3 & 3 \\ \cline{1-3} 4 \\ \cline{1-1} 5 \\ \cline{1-1} \end{array}$ et $Q(w) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 & 8 & 9 \\ \hline 3 & 4 & 11 & 12 \\ \cline{1-4} 6 & 7 & 14 \\ \cline{1-3} 10 \\ \cline{1-1} 13 \\ \cline{1-1} \end{array}$. On notera ici la structure remarquable de $P(w)$, qui traduit le fait que le mot inverse 11221332142153 est de Yamanouchi.

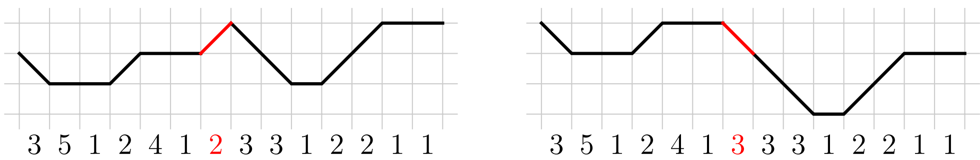
Exercice. Vérifier que si T est un tableau semi-standard, le mot w obtenu en lisant T ligne par ligne de bas en haut, chaque ligne étant lue de gauche à droite, vérifie $P(w) = T$. Ce mot est appelé la *lecture ligne* de T.

La deuxième étape de notre preuve de la règle de Littlewood-Richardson est une structure de graphe sur $\mathcal{W}_n(\ell)$. Les arêtes de ce graphe sont orientées et coloriées. Précisément, étant donnés deux mots w et w' et un entier $i \in [\![1, n-1]\!]$, on écrit $w \xrightarrow{i} w'$ si les deux conditions équivalentes suivantes sont remplies :

— Partant de w : on note $h : [\![0, \ell]\!] \to \mathbb{Z}$ la fonction qui à j associe le nombre de lettres égales à i moins le nombre de lettres égales à $i+1$ parmi les j premières lettres de w. Soit m la valeur maximale de h sur $[\![0, \ell]\!]$ et soit j_0 le plus petit indice tel que $h(j_0) = m$. Alors la j_0-ème lettre de w est un i, et w' s'obtient en la remplaçant par un $i+1$.

— Partant de w' : on note $h' : [\![0,\ell]\!] \to \mathbb{Z}$ la fonction qui à j associe le nombre de lettres égales à i moins le nombre de lettres égales à $i+1$ parmi les j premières lettres de w'. Soit m' la valeur maximale de h' sur $[\![0,\ell]\!]$ et soit j'_0 le plus grand indice tel que $h'(j'_0) = m'$. Alors la (j'_0+1)-ème lettre de w' est un $i+1$, et w s'obtient en la remplaçant par un i.

Ainsi, si $w \xrightarrow{i} w'$, alors w et w' diffèrent d'une seule lettre : un i dans w est devenu un $i+1$ dans w', la position précise étant donnée par la règle expliquée plus haut. La figure ci-dessous illustre que $35124123312211 \xrightarrow{2} 35124133312211$.



Exercice.

(1) On définit le poids d'un mot w comme étant le n-uplet $(p_1, \ldots, p_n)$, où p_i est le nombre de fois où la lettre i apparaît dans w. Vérifier que si $w \xrightarrow{i} w'$, alors le poids de w' est plus petit que le poids de w pour l'ordre $\leq$ sur X.

(2) Vérifier qu'un mot $w = i_1 \cdots i_\ell$ n'est en aval d'aucune arête si et seulement si le mot inverse $i_\ell \cdots i_1$ est un mot de Yamanouchi.

La correspondance de Robinson–Schensted est compatible avec la structure de graphe sur $\mathcal{W}_n(\ell)$ au sens où :

— si $w \xrightarrow{i} w'$, alors $Q(w) = Q(w')$;

— si $v \xrightarrow{i} v'$ et $w \xrightarrow{i} w'$, alors $P(v) = P(w) \iff P(v') = P(w')$.

Pour une partition $\lambda \in \mathscr{P}_n$, notons $\mathcal{T}_n(\lambda)$ l'ensemble des tableaux semi-standards de forme λ remplis par des entiers de 1 à n. La structure de graphe sur $\mathcal{W}_n(|\lambda|)$ induit alors une structure de graphe sur $\mathcal{T}_n(\lambda)$: étant donnés deux tableaux T et T' et un entier $i \in [\![1, n-1]\!]$, on écrit $T \xrightarrow{i} T'$ si l'on peut trouver deux mots w et w' dans $\mathcal{W}_n(|\lambda|)$ tels que $(T, T') = (P(w), P(w'))$ et $w \xrightarrow{i} w'$.

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 2&2\\\hline\end{array} \arrow[r, "2"] & \begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 2&3\\\hline\end{array} \arrow[r, "2"] \arrow[d, "1"'] & \begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 3&3\\\hline\end{array} \arrow[d, "1"] \\
& \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 2&3\\\hline\end{array} \arrow[r, "2"'] & \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&3\\\hline\end{array} \arrow[d, "1"] \\
& & \begin{array}{|c|c|}\hline 2&2\\\hline 3&3\\\hline\end{array}
\end{tikzcd}$$

Notons T_λ le tableau de forme λ n'ayant que des 1 sur sa première ligne, des 2 sur sa deuxième ligne, etc. C'est le seul tableau de $\mathcal{T}_n(\lambda)$ dont le mot inverse de sa lecture ligne est un mot de

Yamanouchi. D'après l'exercice précédent, T_λ est donc le seul tableau de $\mathcal{T}_n(\lambda)$ qui n'est en aval d'aucune arête. Il s'ensuit que le graphe de $\mathcal{T}_n(\lambda)$ est connexe. (En partant d'un tableau T quelconque, on cherche à parcourir le graphe en remontant les flèches. Le processus doit cependant s'arrêter, car le poids augmente strictement à chaque étape et $\mathcal{T}_n(\lambda)$ est fini. Au moment où il s'arrête, on a atteint T_λ.)

Ainsi l'ensemble des composantes connexes de $\mathcal{W}_n(\ell)$ est en bijection avec l'ensemble des tableaux standards à ℓ cases : au tableau standard Q correspond la composante connexe $C_Q = \{w \in \mathcal{W}_n(\ell) \mid Q(w) = Q\}$.

Reprenons $(\lambda, \nu) \in (\mathscr{P}_n)^2$ un couple de partitions telles que le diagramme de λ contienne celui de ν, posons $\ell = |\lambda| - |\nu|$, notons $\mathcal{T}_n(\lambda/\nu)$ l'ensemble des tableaux semi-standards de forme λ/ν remplis par des entiers de 1 à n, et notons $\mathcal{W}_n(\lambda/\nu)$ l'ensemble des lectures lignes des tableaux dans $\mathcal{T}_n(\lambda/\nu)$. On peut vérifier que $\mathcal{W}_n(\lambda/\nu)$ est un sous-graphe complet de $\mathcal{W}_n(\ell)$: si deux mots w et w' dans $\mathcal{W}_n(\ell)$ sont reliés par une arête et si un des deux mots w ou w' appartient à $\mathcal{W}_n(\lambda/\nu)$, alors l'autre y appartient aussi. Autrement dit, $\mathcal{W}_n(\lambda/\nu)$ est l'union d'une famille C_{Q_1}, ..., C_{Q_r} de composantes connexes de $\mathcal{W}_n(\ell)$, où Q_1, ..., Q_r sont des tableaux standards, de forme disons μ_1, ..., μ_r. Nous obtenons alors l'expression suivante pour la fonction de Schur gauche

$$s_{\lambda/\nu} = \sum_{T \in \mathcal{T}_n(\lambda/\nu)} x^{\mathrm{poids}(T)} = \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{w \in C_{Q_i}} x^{\mathrm{poids}(w)} \right) = \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_{\mu_i}} x^{\mathrm{poids}(T)} \right) = \sum_{i=1}^{r} s_{\mu_i}$$

et déduisons que le coefficient de Littlewood-Richardson $c_{\mu,\nu}^{\lambda}$ est le nombre de $i \in [\![1, r]\!]$ tels que $\mu_i = \mu$. Pour conclure la preuve, il suffit maintenant d'observer que les lectures ligne des tableaux de Littlewood–Richardson sont les inverses des mots de Yamanouchi parmi les éléments de $\mathcal{W}_n(\lambda/\nu)$, donc sont les mots w_i tels que $(P(w_i), Q(w_i)) = (T_{\mu_i}, Q_i)$.

Références

[1] A. S. Buch, *The saturation conjecture (after A. Knutson and T. Tao)*, Enseign. Math. **46** (2000), 43–60.

[2] D. Bump, *Lie groups.* Grad. Texts in Math., vol. 225, Springer-Verlag, New York, 2004.

[3] W. Fulton et J. Harris, *Representation theory. A first course.* Grad. Texts in Math., vol. 129, Springer-Verlag, New York, 1991.

[4] W. Fulton, *Young tableaux.* London Math. Soc. Stud. Texts, vol. 35, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[5] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials.* Oxford Math. Monogr., Oxford University Press, New York, 1995.

[6] L. Manivel, *Fonctions symétriques, polynômes de Schubert et lieux de dégénérescence.* Cours Spéc., vol. 3, Société Mathématique de France, Paris, 1998.

[7] M. A. A. van Leeuwen, *The Littlewood-Richardson rule, and related combinatorics*, in MSJ Mem, vol. 11, pp. 95–145, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2001.

[8] H. Weyl, *The classical groups. Their invariants and representations.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1939.