Réflexions dans un cristal

Pierre Baumann, Stéphane Gaussent et Joel Kamnitzer

Résumé

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ une algèbre de Kac-Moody symétrisable. Soit $B(\infty)$ le cristal de Kashiwara de $U_q(\mathfrak{n}^-)$, soit λ un poids dominant, soit $T_\lambda = \{t_\lambda\}$ le cristal à un élément de poids λ, et soit $B(\lambda) \subseteq B(\infty) \otimes T_\lambda$ le cristal de la représentation intégrable de plus haut poids λ. Nous calculons les paramètres en cordes descendants d'un élément $b \otimes t_\lambda$ de $B(\lambda)$ en fonction des paramètres de Lusztig de b.

1 Énoncé du résultat

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Kac-Moody symétrisable. Elle vient avec la décomposition triangulaire $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$, la famille $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ des racines simples, la famille $(\alpha_1^\vee, ..., \alpha_n^\vee)$ des coracines simples, et le groupe de Weyl W engendré par les réflexions simples s_1, ..., s_n. Soit P^+ l'ensemble des poids entiers dominants.

À chaque $\lambda \in P^+$ correspond une représentation irréductible intégrable $L(\lambda)$ de $\mathfrak{g}$. Le choix d'un vecteur de plus haut poids v_λ donne lieu à une surjection $X \mapsto X \cdot v_\lambda$ de $U(\mathfrak{n}^-)$ sur $L(\lambda)$. La combinatoire de cette situation est régie par les cristaux de Kashiwara [6] : le cristal $B(\lambda)$ de $L(\lambda)$ est un sous-cristal de $B(\infty) \otimes T_\lambda$, où $B(\infty)$ est le cristal de $U_q(\mathfrak{n}^-)$ et $T_\lambda = \{t_\lambda\}$ est le cristal à un élément de poids λ. Le cristal $B(\lambda)$ étant normal, nous avons

$$\varphi_i(b \otimes t_\lambda) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid \tilde{f}_i^n(b \otimes t_\lambda) \in B(\lambda)\}$$

pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ et tout $b \otimes t_\lambda \in B(\lambda)$.

Le cristal $B(\infty)$ est muni d'une involution $*$ (voir [6], §8.3), ce qui permet de définir des opérateurs $\tilde{e}_i^* = *\tilde{e}_i*$. Dans [11], Saito définit une bijection

$$\sigma_i : \{b \in B(\infty) \mid \varepsilon_i(b) = 0\} \to \{b \in B(\infty) \mid \varepsilon_i(b^*) = 0\}$$

par $\sigma_i(b) = \tilde{f}_i^{\varphi_i(b^*)} \tilde{e}_i^{*\,\max} b$. Prolongeons σ_i à $B(\infty)$ en posant $\hat{\sigma}_i(b) = \sigma_i(\tilde{e}_i^{\max} b)$ pour tout $b \in B(\infty)$.

Théorème 1 *Soit $\lambda \in P^+$, soit $(s_{i_1}, \ldots, s_{i_\ell})$ une décomposition réduite dans W, et soit $b \in B(\infty)$ tel que $b \otimes t_\lambda \in B(\lambda)$. Définissons par récurrence des éléments b_0, ..., b_ℓ de $B(\infty)$ et des entiers c_1, ..., c_ℓ par*

$$b_0 = b, \quad c_k = \varphi_{i_k}(b_{k-1} \otimes t_\lambda), \quad b_k \otimes t_\lambda = \tilde{f}_{i_k}^{c_k}(b_{k-1} \otimes t_\lambda),$$

pour tout $k \in \{1, \ldots, \ell\}$. Posons enfin $d_k = \langle \alpha_{i_k}^\vee, s_{i_{k-1}} \cdots s_{i_1} \lambda \rangle$. Alors

$$\hat{\sigma}_{i_\ell} \cdots \hat{\sigma}_{i_1} b = \tilde{e}_{i_\ell}^{*d_\ell} \cdots \tilde{e}_{i_1}^{*d_1} b_\ell. \tag{1}$$

Le cas particulier $\ell = 1$ de ce résultat est dû à Saito ([11], proposition 3.3.4) et à Muthiah et Tingley ([10], proposition 2.2).

Plaçons-nous sous les hypothèses du théorème 1. Prenant $k \in \{1, \ldots, \ell\}$, écrivant (1) pour la décomposition réduite $(s_{i_1}, \ldots, s_{i_k})$, et égalant les poids des deux membres, nous trouvons

$$s_{i_1} \cdots s_{i_k} \operatorname{wt}(\hat{\sigma}_{i_k} \cdots \hat{\sigma}_{i_1} b) + \lambda = s_{i_1} \cdots s_{i_k} \operatorname{wt}(b_k \otimes t_\lambda). \tag{2}$$

Notant n_1, ..., n_ℓ les entiers solutions du système d'équations

$$s_{i_1} \cdots s_{i_k} \operatorname{wt}(\hat{\sigma}_{i_k} \cdots \hat{\sigma}_{i_1} b) - \operatorname{wt}(b) = \sum_{p=1}^{k} n_p \, s_{i_1} \cdots s_{i_{p-1}} \alpha_{i_p},$$

pour $k \in \{1, \ldots, \ell\}$, nous obtenons alors

$$n_k = -c_k - \langle \alpha_{i_k}^\vee, \operatorname{wt}(b_k \otimes t_\lambda) \rangle. \tag{3}$$

Supposons qu'en outre $\mathfrak{g}$ soit de dimension finie, et prenons pour $(s_{i_1}, \ldots, s_{i_\ell})$ une décomposition réduite de l'élement le plus long de W. Il suit alors de [11] que les entiers n_1, ..., n_ℓ sont les paramètres de Lusztig de b relativement à cette décomposition réduite (voir par exemple [2], §3 pour cette notion). Dans ces conditions, la formule (3) est équivalente à la relation découverte par Morier-Genoud [9] entre les paramètres de Lusztig de b et les paramètres en cordes de b', où $b' \otimes t_\lambda$ est l'image de $b \otimes t_\lambda$ par l'involution de Schützenberger de $B(\lambda)$.

Toujours dans le cas où $\mathfrak{g}$ est de dimension finie, l'égalité (2) reflète la possibilité d'exprimer les sommets du polytope de Mirković-Vilonen de $b \otimes t_\lambda$ de deux façons différentes : soit en termes de réflexions de Saito, autrement dit en termes de paramètres de Lusztig, soit en termes de la structure de cristal de $B(\lambda)$ (voir [4], §6). La principale motivation du présent travail réside dans la possibilité d'étendre partiellement ce résultat au cas où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Kac-Moody symétrisable.

2 Démonstration

Ramenons-nous au cas d'une matrice de Cartan symétrique grâce à la méthode de repliement du diagramme de Dynkin (voir par exemple [7], §5). Soit Λ la $\mathbb{C}$-algèbre préprojective complétée construite sur le graphe de Dynkin de $\mathfrak{g}$. En vecteur-dimension ν, les structures de Λ-module sont les points d'une variété affine $\Lambda(\nu)$, appelée variété nilpotente de Lusztig. Les composantes irréductibles de ces variétés sont indexées par $B(\infty)$ (voir [8], théorème 5.3.1) : à un élément $b \in B(\infty)$ de poids $-\nu$ est associée une composante irréductible Λ_b de $\Lambda(\nu)$. Cette bijection permet de lire les opérations de cristal de $B(\infty)$ en termes d'opérations algébriques sur les Λ-modules. Le théorème 1 se trouve alors être la traduction du théorème 4 ci-dessous.

Pour $i \in \{1, ..., n\}$, notons S_i le Λ-module simple de vecteur-dimension α_i et I_i l'annulateur de S_i. Nous définissons le i-socle $\operatorname{soc}_i M$ (respectivement, la i-tête $\operatorname{hd}_i M$) d'un Λ-module M comme étant le plus grand sous-module (respectivement, quotient) de M isomorphe à une somme directe de copies de S_i. Alors $\operatorname{soc}_i M \cong \operatorname{Hom}_\Lambda(\Lambda/I_i, M)$ et $\operatorname{hd}_i M \cong (\Lambda/I_i) \otimes_\Lambda M$.

Si $(s_{i_1}, \ldots, s_{i_\ell})$ est une décomposition réduite dans W, alors le Λ-bimodule $I_{i_1} \otimes_\Lambda \cdots \otimes_\Lambda I_{i_\ell}$ est isomorphe à l'idéal produit $I_{i_1} \cdots I_{i_\ell}$ (voir [3]). Ce dernier ne dépend que du produit $w = s_{i_1} \cdots s_{i_\ell}$ et peut donc être désigné par la notation I_w. Comme I_w est basculant, la théorie de Brenner-Butler fournit deux paires de torsion $(\mathscr{T}_w, \mathscr{F}_w)$ et $(\mathscr{T}^w, \mathscr{F}^w)$ dans la catégorie des Λ-modules de dimension finie, données par

$$\mathscr{T}_w = \{T \mid I_w \otimes_\Lambda T = 0\}, \qquad \mathscr{F}_w = \{T \mid \operatorname{Tor}_1^\Lambda(I_w, T) = 0\},$$
$$\mathscr{T}^w = \{T \mid \operatorname{Ext}^1_\Lambda(I_w, T) = 0\}, \qquad \mathscr{F}^w = \{T \mid \operatorname{Hom}_\Lambda(I_w, T) = 0\}.$$

Le sous-module de torsion d'un Λ-module M de dimension finie relativement à $(\mathscr{T}_w, \mathscr{F}_w)$ (respectivement, $(\mathscr{T}^w, \mathscr{F}^w)$) est noté M_w (respectivement, M^w).

Lemme 2 *Soit $w \in W$, soit $i \in \{1, ..., n\}$, et soit M un Λ-module de dimension finie. Supposons que $s_i w > w$ et que $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(S_i, M) = 0$. Alors $M^{s_i w} \cong I_i \otimes_\Lambda M^w$.*

Preuve. Pour commencer, observons que $\operatorname{soc}_i M \in \mathscr{T}_{s_i}$ ([1], exemple 5.6 (i)), d'où $I_i \otimes_\Lambda \operatorname{soc}_i M = 0$. Posons $N = \operatorname{Hom}_\Lambda(I_i, M)$. Appliquant deux fois le théorème 5.4 (i) de [1], nous obtenons

$$M^{s_i w} \cong I_{s_i w} \otimes_\Lambda \operatorname{Hom}_\Lambda(I_{s_i w}, M) \cong I_i \otimes_\Lambda I_w \otimes_\Lambda \operatorname{Hom}_\Lambda(I_w, N) \cong I_i \otimes_\Lambda N^w.$$

Compte tenu de l'isomorphisme $S_i \cong \Lambda/I_i$, l'hypothèse $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(S_i, M) = 0$ conduit à la suite exacte $0 \to \operatorname{soc}_i M \to M \to N \to 0$. L'hypothèse $s_i w > w$ entraîne que $\mathscr{T}_{s_i} \subseteq \mathscr{T}^w$ ([1], proposition 5.16), d'où $\operatorname{soc}_i M \in \mathscr{T}^w$. Nous avons ainsi une suite exacte $0 \to \operatorname{soc}_i M \to M^w \to N^w \to 0$, d'où nous déduisons que $I_i \otimes_\Lambda M^w \cong I_i \otimes_\Lambda N^w \cong M^{s_i w}$. $\square$

Pour un Λ-module M et un mot $(i_1, \ldots, i_\ell)$, définissons les sous-modules $\operatorname{soc}_{(i_1,\ldots,i_k)} M$ de M par récurrence sur $k \in \{0, \ldots, \ell\}$ de la façon suivante ([5], §2.4) :

$$\operatorname{soc}_{()} M = 0, \quad \operatorname{soc}_{(i_1,\ldots,i_k)} M / \operatorname{soc}_{(i_1,\ldots,i_{k-1})} M = \operatorname{soc}_{i_k}(M / \operatorname{soc}_{(i_1,\ldots,i_{k-1})} M).$$

Pour $i \in \{1, ..., n\}$, notons $\hat{I}_i$ l'enveloppe injective de S_i. Pour $\lambda \in P^+$, posons $\hat{I}_\lambda = \bigoplus_{i=1}^n \hat{I}_i^{\oplus \lambda_i}$, où $\lambda_i = \langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle$.

Lemme 3 *Soit $\lambda \in P^+$, soit $w \in W$, et soit $(s_{i_1}, \ldots, s_{i_\ell})$ une décomposition réduite de w. Alors $\operatorname{soc}_{(i_1,\ldots,i_\ell)} \hat{I}_\lambda$ est le plus grand sous-module de $\hat{I}_\lambda$ appartenant à $\mathscr{T}_w$ et son vecteur-dimension est égal à $\lambda - w^{-1}\lambda$.*

Preuve. L'énoncé équivaut à dire que $\operatorname{soc}_{(i_1,\ldots,i_\ell)} \hat{I}_\lambda \in \mathscr{T}_w$ et que $\operatorname{Hom}_\Lambda(X, \hat{I}_\lambda / \operatorname{soc}_{(i_1,\ldots,i_\ell)} \hat{I}_\lambda) = 0$ pour tout module $X \in \mathscr{T}_w$. Par additivité, nous pouvons donc nous ramener au cas où λ est un poids fondamental, c'est-à-dire $\hat{I}_\lambda$ est un module indécomposable $\hat{I}_j$.

Le module $\operatorname{soc}_{(i_1,\ldots,i_\ell)} \hat{I}_j$ est le module noté $I_{\mathbf{i},j}$ dans [5], §2.4, avec $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_\ell)$. C'est un objet injectif de la catégorie $\mathscr{T}_w$ ([5], théorème 2.8 (iii) et [1], exemple 5.15). Montrons qu'il contient tous les sous-modules de $\hat{I}_j$ appartenant à $\mathscr{T}_w$. Soit X un tel sous-module. Alors la somme $Y = X + \operatorname{soc}_{(i_1,\ldots,i_\ell)} \hat{I}_j$ appartient à $\mathscr{T}_w$. Comme $\operatorname{soc}_{(i_1,\ldots,i_\ell)} \hat{I}_j$ est injectif dans $\mathscr{T}_w$, il est un facteur direct de Y. Or tous les sous-modules non-nuls de $\hat{I}_j$ contiennent son socle S_j, ce qui exclut l'existence de somme directe non-triviale à l'intérieur de $\hat{I}_j$. Par conséquent, $\operatorname{soc}_{(i_1,\ldots,i_\ell)} \hat{I}_j$ est soit égal à Y tout entier, soit réduit à 0. La seconde possibilité a lieu quand $j \notin \{i_1, \ldots, i_\ell\}$, mais dans ce cas X est lui aussi nul, car pour des raisons de vecteur-dimension, il ne peut pas contenir le socle S_j de $\hat{I}_j$ ([5], corollaire 9.3 et lemme 10.2). Donc $\operatorname{soc}_{(i_1,\ldots,i_\ell)} \hat{I}_j$ contient X dans les deux cas de figure.

Enfin, l'assertion sur le vecteur-dimension est prouvée dans [5], corollaire 9.2. $\square$

Théorème 4 *Soit $\lambda \in P^+$, soit $w \in W$, soit $(s_{i_1}, \ldots, s_{i_\ell})$ une décomposition réduite de w, et soit M un sous-module de dimension finie de $\hat{I}_\lambda$. Construisons par récurrence une chaîne $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_\ell$ de sous-modules de $\hat{I}_\lambda$ de la façon suivante :*

$$M_0 = M, \quad M_k / M_{k-1} = \operatorname{soc}_{i_k}(\hat{I}_\lambda / M_{k-1}).$$

Alors $(M_\ell)_w = \operatorname{soc}_{(i_1,\ldots,i_\ell)} \hat{I}_\lambda$ et $M_\ell / (M_\ell)_w \cong \operatorname{Hom}_\Lambda(I_w, M)$.

Preuve. Des arguments classiques montrent que si $f : X \to Y$ est un homomorphisme de Λ-modules, alors $f(\operatorname{soc}_{(i_1,\ldots,i_\ell)} X) \subseteq \operatorname{soc}_{(i_1,\ldots,i_\ell)} Y$. Appliquant ce résultat à la surjection $\hat{I}_\lambda \to$

$\hat{I}_\lambda/M$, nous obtenons que $\operatorname{soc}_{(i_1,\ldots,i_\ell)} \hat{I}_\lambda$ est inclus dans M_ℓ. La première égalité de l'énoncé découle alors du lemme 3.

Par ailleurs, $S_{i_k} \in \mathscr{F}^{s_{i_k}\cdots s_{i_\ell}}$ pour tout $k \in \{1,\ldots,\ell\}$, d'où $(M_{k-1})^{s_{i_k}\cdots s_{i_\ell}} = (M_k)^{s_{i_k}\cdots s_{i_\ell}}$. La définition de M_k entraîne que $\operatorname{soc}_{i_k}(\hat{I}_\lambda/M_k) = 0$, autrement dit $\operatorname{Hom}_\Lambda(S_{i_k}, \hat{I}_\lambda/M_k) = 0$; compte tenu du caractère injectif de $\hat{I}_\lambda$, cela donne $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(S_{i_k}, M_k) = 0$. Une utilisation répétée du lemme 2 conduit alors à $M^w \cong I_w \otimes_\Lambda M_\ell$. Utilisant les relations $M_\ell/(M_\ell)_w \cong \operatorname{Hom}_\Lambda(I_w, I_w \otimes_\Lambda M_\ell)$ ([1], théorème 5.4 (ii)) et $\operatorname{Hom}_\Lambda(I_w, M/M^w) = 0$, nous obtenons la seconde égalité de l'énoncé. $\square$

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 1. Adoptons les notations utilisées dans son énoncé. Soit M un point général de la composante irréductible Λ_b. La condition $b \otimes t_\lambda \in B(\lambda)$ se traduit par $\varepsilon_i(b^*) \leq \langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ ([6], proposition 8.2), d'où $\dim \operatorname{soc}_i M \leq \dim \operatorname{soc}_i \hat{I}_\lambda$. Il existe donc une inclusion $M \hookrightarrow \hat{I}_\lambda$. Les modules M_k construits dans l'énoncé du théorème 4 sont alors des points généraux des composantes Λ_{b_k} et le module $\operatorname{Hom}_\Lambda(I_w, M)$ est un point général de $\Lambda_{\hat{\sigma}_{i_\ell}\cdots\hat{\sigma}_{i_1} b}$ ([1], proposition 5.24). Il reste à observer que $\operatorname{soc}_{(i_1,\ldots,i_k)} \hat{I}_\lambda / \operatorname{soc}_{(i_1,\ldots,i_{k-1})} \hat{I}_\lambda$ est isomorphe à la somme directe de d_k copies de S_{i_k}.

Références

[1] P. Baumann, J. Kamnitzer, P. Tingley, *Affine Mirković-Vilonen polytopes,* prépublication arXiv:1110.3661.

[2] A. Berenstein and A. Zelevinsky, *Tensor product multiplicities, canonical bases and totally positive varieties,* Invent. Math. **143** (2001), 77–128.

[3] A. B. Buan, O. Iyama, I. Reiten, J. Scott, *Cluster structures for 2-Calabi-Yau categories and unipotent groups,* Compos. Math. **145** (2009), 1035–1079.

[4] M. Ehrig, *MV-polytopes via affine buildings,* Duke Math. J. **155** (2010), 433–482.

[5] C. Geiß, B. Leclerc, J. Schröer, *Kac-Moody groups and cluster algebras,* Adv. Math. **228** (2011), 329–433.

[6] M. Kashiwara, *On crystal bases,* in: *Representations of groups (Banff, 1994)*, CMS Conf. Proc. vol. 16, American Mathematical Society, 1995, pp. 155–197.

[7] M. Kashiwara, *Similarity of crystal bases,* in: *Lie algebras and their representations (Seoul, 1995)*, Contemp. Math. vol. 194, American Mathematical Society, 1996, pp. 177–186.

[8] M. Kashiwara, Y. Saito, *Geometric construction of crystal bases,* Duke Math. J. **89** (1997), 9–36.

[9] S. Morier-Genoud, *Relèvement géométrique de la base canonique et involution de Schützenberger,* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **337** (2003), 371–374.

[10] D. Muthiah, P. Tingley, *Affine PBW Bases and MV Polytopes in Rank 2,* prépublication arXiv:1209.2205.

[11] Y. Saito, *PBW basis of quantized universal enveloping algebras,* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **30** (1994), 209–232.

Pierre Baumann, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université de Strasbourg et CNRS, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France.
`p.baumann@unistra.fr`

Stéphane Gaussent, Université de Lyon, ICJ (UMR 5208), Université Jean Monnet, 42023 Saint-Etienne Cedex 2, France.
`stephane.gaussent@univ-st-etienne.fr`

Joel Kamnitzer, Department of Mathematics, University of Toronto, Toronto, ON, M5S 2E4 Canada.
`jkamnitz@math.toronto.edu`