Révision : suites et séries numériques

Préparation à l'agrégation interne 2024-2025

Introduction

Cette feuille concerne la révision des sections 9.1 et 9.2. La démonstration d'un bon nombre de résultats de ces deux parties s'appuient sur des notions topologiques et en particulier sur le fait que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des espaces métriques. Cette révision pourrait donc être menée en parallèle avec celle des sections 10.1 et 10.3.

La séance du 17 septembre sera consacrée au travail autour de cette feuille de révision.

Programme

Le texte en italique contient quelques commentaires et recommandations sur les parties du programme qui précédent.

9.1 Nombres réels, nombres complexes

Corps $\mathbb{R}$ des nombres réels et $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Ce paragraphe ne fait pas explicitement partie du travail pour la séance du 17 septembre, mais sa révision est indispensable pour une bonne compréhension de ce qui suit. Ce contenu est bien résumé par exemple dans Analyse 1 de Monier.

Suites convergentes, divergentes, suites extraites, valeurs d'adhérence. Opérations sur les limites.

Il est très important de refaire le lien entre ces définitions et les démonstrations sans se reposer sur les automatismes de calcul des limites. Commencez par redémontrer les propriétés des opérations sur les limites en n'utilisant que les définitions.

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure. Toute suite croissante majorée est convergente. Suites adjacentes, théorème des segments emboités. Droite numérique achevée.

Complétude de $\mathbb{R}$: toute suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ converge. Théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite bornée de $\mathbb{R}$ on peut extraire une sous-suite convergente. Extension de ces résultats à $\mathbb{C}$.

Il faut connaître les démonstrations (au moins dans le grandes lignes) des résultats cités dans ces deux derniers paragraphes. Non seulement ça permet de mieux comprendre le sujet, mais les méthodes de ces démonstrations sont très utiles pour l'écrit.

Développement décimal d'un nombre réel. Cas des nombres rationnels.

Il faut voir le développement décimal d'un nombre réel comme une suite particulière (voire exercice 2) de nombres décimaux qui tende vers ce nombre.

Comportement asymptotique d'une suite. Relations de comparaison : domination, prépondérance (u est négligeable devant v), équivalence. Notations $u = O(v)$ et $u = o(v)$.

Suites de nombres réels définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Suites définies par une relation de récurrence linéaire à deux termes et à coefficients constants, ou par une relation homographique.

Prêtez une attention particulière à la relation entre le comportement de la fonction génératrice et celui de la suite récurrente : monotonie, points d'accumulation etc.

9.2 Séries de nombres réels ou complexes

Une série numérique est un cas particulier de suite numérique. Donc tout résultat de la section précédente reste valable.

Séries à termes positifs. La série converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

Étude de la convergence par utilisation des relations de comparaison, comparaison à une série géométrique, à une série de Riemann. Sommation des relations de prépondérance et d'équivalence pour les séries convergentes et divergentes. Comparaison d'une série et d'une intégrale, cas des séries de Riemann.

Il faut savoir étudier la convergence de séries de Riemann.

Critère de Cauchy pour les séries à termes réels ou complexes. Convergence absolue. Convergence d'une série alternée dont le terme général décroît vers 0 en valeur absolue, signe et majoration du reste. Exemples d'emploi de la transformation d'Abel. Exemples d'emploi d'un développement asymptotique du terme général.

Vous trouverez dans le livre de Hauchecorne des nombreux exemples autour des critères usuels de convergence de séries, qui montrent l'importance de la vérification de toutes les conditions nécessaires pour l'utilisation de ces critères. Opérations sur les séries. Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

Bibliographie

Les ouvrages non spécifiques à la préparation au concours

- DEMAILLY Jean-Pierre. *Analyse numérique et équations différentielles*, EDP sciences, 2006
- GOURDON Xavier, *Les maths en tête*, Ellipses.
- HAUCHECORNE, Bertrand, *Les contre-exemples en mathématiques*, Ellipses
- MONIER, Jean-Marie. *Analyse 1, cours et 300 exercices corrigés*, Dunod (1999)
- MONIER, Jean-Marie. *Analyse 3, cours et 500 exercices corrigés*, Dunod (2000)
- ROMBALDI, Jean-Étienne *Éléments d'analyse réelle*, EDP Sciences (2019)

Ouvrages spécifiques de préparation au concours

- DANTZER ,Jean-François, *Mathématiques pour l'agrégation interne, analyse et probabilités*, Vuibert, 2007.
- PULKOWSKI, Marci et MONTAGNON, Pierre, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation interne*, Ellipses, 2018 ;
- QUEFFELEC, Hervé, ZUILY Claude, *Analyse pour agrégation*, Dunod (2007)

Exercices

Suites réelles ou complexes

Questions « du cours ».

Il faut savoir démontrer les résultats et savoir répondre aux questions suivantes.

1. Toute suite d'entiers convergente est stationnaire à partir d'un certain rang.
2. Soit (u_n) une suite réelle de termes positifs qui tend vers 0. Est-elle nécessairement décroissante à partir d'un certain rang ?
3. est-il vrai que si la suite (u_n) converge, la fonction f est continue telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \in D_f$, alors la suite $(f(u_n))$ converge ?
4. En n'utilisant que la définition de la limite, montrer que la suite de terme général $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$ tend vers $\frac{a}{c}$ dans les situations suivantes :
   (a) $a = 0$, $b, c, d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.
   (b) $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ac \neq 0$.
   (c) $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ac \neq 0$.
5. Le théorème de la limite monotone.
6. Théorème de Bolzano-Weierstrass (cas réel et complexe).
7. Soit (u_n) une suite numérique et soit la suite (v_n) définie par $v_n = u_{n+k}$ où $k \neq 0$ est un entier naturel fixé. Les suites (u_n) et (v_n) sont-elles équivalentes ?
8. Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes strictement positifs. Soient (x_n) et (y_n) deux suites. On suppose $x_n \sim u_n$ et $y_n \sim v_n$. Alors $x_n + y_n \sim u_n + v_n$.
9. Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n - v_n \to 0$. Les deux suites sont-elles équivalentes ? La réciproque est-elle vraie ?
10. Est-il vrai que si la suite u_n est telle que $u_n - u_{n+1} \to 0$ alors elle converge ?

Commencez par essayer d'y répondre par vous mêmes. Si vous n'y arrivez pas, regardez dans un des ouvrages cités dans la bibliographie. Le but est d4apprendre (ou réapprendre) à le faire.

Exercices

Exercice 1. Montrer que un nombre réel a deux écritures décimales si et seulement si c'est un nombre décimal.

Exercice 2. Soit x un réel fixé. On construit les suites (x_n) et (y_n) suivantes :

$$x_0 = [x];\ x_{n+1} = x_n + \frac{[10^{n+1}(x - x_n)]}{10^{n+1}} \text{ et } y_n = x_n + \frac{1}{10^n}.$$

1. Démontrer que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes et déterminer leur limite commune.

2. En déduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. À quelle condition nécessaire et suffisante un nombre est-il rationnel ?
3. Proposer un exemple de suites de rationnels convergeant respectivement vers π, vers e, vers $\ln 2$ et donner pour chacun d'entre eux une estimation de l'erreur commise.

Exercice 3. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \cos(n)$. déterminer l'ensemble de ses valeurs d'adhérence.

Exercice 4. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. Une suite non majorée tend vers $+\infty$.
2. Une suite convergente est minorée.
3. Une suite qui tend vers $-\infty$ est majorée.
4. Toute suite qui tend vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang.
5. Toute suite décroissante et minorée par 0 a pour limite 0.
6. Toute suite qui converge vers 0 est soit croissante et négative, soit décroissante et positive.

Exercice 5. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n > 0$,

$$u_{n+1} = u_n^3 + u_n^2 + u_n.$$

Pour quelles valeurs de u_0 la suite (u_n) est-elle convergente ?

Exercice 6. Soit (u_n) une suite réelle et soit (v_n) définie par $v_n = \frac{u_0 + \ldots u_n}{n+1}$. Montrer successivement :

1. Si $u_n \to 0$, alors $v_n \to 0$.
2. Si $u_n \to l \in \mathbb{R}$, alors $v_n \to l$. La réciproque est-elle vraie ?
3. Si $u_n \to +\infty$, alors $v_n \to +\infty$.
4. Si (u_n) est monotone et $v_n \to l$, alors $u_n \to l$.

Exercice 7. Soit (u_n) une suite réelle. Montrer que

1. $u_{n+1} - u_n \to l \in \mathbb{R}$, alors $\frac{u_n}{n} \to l$.
2. Soit de plus $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to l$ alors $\sqrt[n]{u_n} \to l$

Exercice 8. Soit (u_n) une suite à termes positifs telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_{n+2} \leq \frac{u_{n+1} + a_n}{3}.$$

Montrer que $(u_n) \to 0$.

Exercice 9. On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n + 1}{u_n + 2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 & = & 2 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{v_n + 1}{v_n + 2} \end{cases}$$

Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Déterminer leur limite commune notée α.

Séries

Questions « du cours ».

Il faut savoir démontrer les résultats et savoir répondre aux questions suivantes.

- Toute série qui converge absolument converge. Donner deux exemples de séries qui convergent mais ne convergent pas absolument.
- Le théorème d'Abel.
- Deux démonstrations du théorème sur la convergence des séries alternées :
  1. directement
  2. comme conséquence du théorème d'Abel
- Théorème de comparaison entre une série et une intégrale. En déduire la convergence de séries de Riemann.
- Étudier la convergence des séries de Bertrand.
- Théorème de sommation par paquets. Permutations des termes.

Exercices

Exercice 10. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n > 0$,

$$u_{n+1} = u_n^3 + u_n^2 + u_n.$$

(C'est la suite de l'exercice 5)

Étudier la convergence de la série (v_n) de terme général $v_n = u_n^2$. (Dans le cas délicat, on pourra utiliser la série $\sum(w_n)$, définie par $w_n = u_{n+1} - u_n$ et montrer que $v_n \sim w_n$.)

Exercice 11. Soient les suites (u_n) et v_n définies par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| < |v_n|$.
2. Montrer que la série de terme général u_n diverge, alors que celle de terme général v_n converge.

Exercice 12. Soit (z_n) une suite de nombres complexes non nuls telle que

$$n \neq m \Rightarrow |z_n - z_m| > 1.$$

Montrer la convergence de la série $\dfrac{1}{z_n^3}$.

Exercice 13. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2 + \ln(u_n)$.

1. Montrer qu'elle est convergente.
2. Soit $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Étudier la série de terme général $v_n = u_n - \ell$.
3. En déduire un équivalent de la suite (s_n) définie par $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 14. Étudier la nature des séries de terme général suivant :

1. $u_n = \dfrac{\cos(\frac{2n\pi}{3})}{\sqrt{n}}$;
2. $v_n = \dfrac{\exp(i\theta)}{n}$;
3. $w_n = \dfrac{j^m}{\sqrt[3]{n}}$, (où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$).

Exercice 15. En utilisant les sommes de Riemann déterminer les limites des suites définies par le terme général suivant :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$;
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$;
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$.

Exercice 16. Soit (u_n) une suite réelle telle que la série $\sum u_n^2$ converge. Soit σ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et (v_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v+n = u_{\sigma(n)}$.

1. Montrer la convergence et calculer la somme de la série$\sum v_n^2$.
2. Quelle est la nature de la série $\sum |u_n v_n|$?
3. Déterminer les bornes supérieure et inférieure de $\sum |u_n v_n|$ lorsque σ parcourt l'ensemble des bijections de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Exercice 17. Montrer que la série de terme général définie par

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

pour tout $n \geq 2$, converge et calculer la somme.

Exercice 18. Le but de cet exercice est de trouver le développement asymptotique de la série harmonique.

Soit pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, H_n la somme partielle de la série harmonique : $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $u_n = H_n - \ln n$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1. Montrer que $H_n \sim \ln n$.
2. Étudier la nature de la série de terme général u_n.
3. En déduire que la suite (u_n) converge et trouver sa limite, qu'on notera γ.
4. Soit pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $R_n = \sum k = n^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. En utilisant la comparaison avec une intégrale, donner un équivalent de R_n.
5. En étudiant la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \gamma$, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, montrer que

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n}).$$