L1 S2 - Mathématiques pour les sciences - DM1

Amaury Bélières Frendo - Université de Strasbourg

À rendre le 16/02/24

Consignes

Ce DM peut se faire en groupe (max 2 personnes). Les exercices sont indépendants et l'exercie 2 est optionnel.

1 Primitives et intégrales

a) Montrer qu'une primitive de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$$

est donée par $x \mapsto \arctan(x)$.
Préciser les ensembles de définition de f et de sa primitive.

b) Calculer une primitive de

$$g : x \mapsto \frac{3x^4 + 2x^2 + 1}{x^3(x^2+1)^2},$$

en précisant les ensembles de définition de g et de sa primitve.

c) Trouver une primitive de $h : x \mapsto (\cos(x) + 3x\sin(x) + 4x^2 + x - 5)e^x$ en précisant les ensembles de définition de h et de sa primitive.

d) Calculer les intégrales suivantes :

$$A := \int_1^2 \frac{1}{\sinh x} dx,$$

$$B := \int_1^2 \frac{1}{1+e^x} dx,$$

$$L := \int_{1/\sqrt{2}}^2 e^{-\arcsin x} dx.$$

Il est conseillé d'utiliser les changements de variables suivants

$$u := \cosh x, \quad t := e^x, \quad t := \sin\theta,$$

avec $\sinh x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto (e^x - e^{-x})/2$ et $\cosh x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto (e^x + e^{-x})/2$.

e) Soient $(a,b) \in \mathbb{N}^2$. Calculer

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b.$$

2 Un peu d'analyse

Dans tout l'exercice, a et b sont deux réels.

a) Montrer que si une fonction continue est positive sur un segment $[a,b]$ est nulle si, et seulement si, son intégrale sur $[a,b]$ est nulle.
Indice : Si f est une fonction non nulle continue, on peut trouver un point x, et un voisinage de x dans lequel f est strictement positive.

b) Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, avec g positive, non indentiquement nulle.
Déduire de la question **2a** qu'il existe $d \in [a,b]$, tel que

$$\int_{[a,b]} fg = f(d) \int_{[a,b]} g.$$

c) Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a,b]$. Montrer que

$$\left(\int_{[a,b]} fg \right)^2 \leq \int_{[a,b]} f^2 \int_{[a,b]} g^2.$$

Indice : on pourra étudier les racines de

$$P(\lambda) = \int_{[a,b]} (f + \lambda g)^2 = \lambda^2 \int_{[a,b]} g^2 + 2\lambda \int_{[a,b]} fg + \int_{[a,b]} f^2.$$

d) Toujours avec les hypothèses de la question **c**, montrer que

$$\left(\int_{[a,b]} fg \right)^2 = \int_{[a,b]} f^2 \int_{[a,b]} g^2$$

si, et seulement si, $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}, f = \lambda_0 g$.

3 Intégrale de Wallis

$\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n := \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

a) L'intégrale I_n est elle bien définie ?

b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

c) Montrer que $\forall u \in [0,1]$, on a $0 \leq 1 - u \leq e^{-u}$.

d) En déduire une majoration de I_n à l'aide de $J_n := \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}$.

e) Montrer que la suite (J_n) est bornée. On pourra remarquer que $\forall x \geq 1$, $e^{-x^2} \leq e^{-x}$.
En déduire que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

f) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $I_{n-1} - I_n$ à l'aide d'une intégration par parties. En déduire que $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$.

i) En déduire une expression de I_n à l'aide de factorielles.

j) En déduire une expression de $\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(\theta) d\theta$.