L1 S2 - Algèbre - DM1

Amaury Bélières Frendo - Université de Strasbourg

06/03/24

Consignes

À rendre par mail le 09/03/24 avant 23h59.

1 Questions de cours

a) Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, alors leur intersection aussi est un sous espace vectoriel de E.

b) L'ensemble des combinaisons linéaires de n vecteurs $u_1, .., u_n$ de E est un sous espace vectoriel de E.

c) Deux vecteurs forment une famille libre si et seulement si ils sont non-colinéaires.

d) Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, F et G sont supplémentaires si et seulement si $E = F+G$ et $F \cap G = 0_E$.

e) Si la famille $(u_1, .., u_n)$ de E est libre, si v est un vecteur de E, alors la famille $(u_1, .., u_n, v)$ est liée si et seulement si v est combinaison linéaire des $u_1, .., u_n$.

2 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Soient E l'espace des suites convergentes à valeurs dans $\mathbb{R}$, $F = \{u \in E,\, \exists c \in \mathbb{R},\, \text{t.q.}\, \forall n \in \mathbb{N},\, u_n = c\}$ l'espace des suites constantes, et $G = \left\{u \in E,\, \text{t.q.}\, u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right\}$ l'espace des suites qui tendent vers 0.

a) Montrer que E, F et G sont des s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

b) Montrer que $E = F \oplus G$.

3 Familles libres

Soit $\mu \in \mathbb{R}$. On introduit, $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ définis par

$$\begin{cases} u = (1, 1, \mu) \\ v = (1, \mu, 1) \\ w = (\mu, 1, 1) \end{cases} \tag{3.1}$$

Donner une C.N.S sur μ pour que la famille (u, v, w) soit libre dans $\mathbb{R}^3$.

4 Sous-espaces vectoriels

Soit $F = \left\{P \in \mathbb{R}[X],\, \text{t.q.}\, P = abX^4 - \frac{b}{a}X^3 + \frac{a}{b}X,\, a, b \in \mathbb{R}\right\}$. F est il un s.e.v de $\mathbb{R}[X]$?