

# La droite affine de Berkovich

Gustave Billon

8 avril 2019

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Topologie de la droite affine de Berkovich</b>	<b>2</b>
1.1	Plongement de l'ensemble des boules fermées de $K$ dans $\mathbb{A}_K^{1,an}$ . . .	3
1.2	Détermination de l'ensemble des points de $\mathbb{A}_K^{1,an}$ . . . . .	5
1.3	Existence de points de type 4 . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Dynamique dans la droite affine de Berkovich</b>	<b>7</b>
2.1	Démonstration du théorème 3 . . . . .	8
2.2	Image d'un point de type donné par une fonction polynomiale . . .	9
2.2.1	Stratégie de la preuve . . . . .	9
2.2.2	Calcul de $\epsilon_x$ et $\eta_x$ . . . . .	11
2.3	Norme des zéros d'un polynôme de $K[T]$ . . . . .	12

## Introduction

La droite affine de Berkovich est un objet qui permet de faire de l'analyse sur des variétés définies sur un corps muni d'une norme non archimédienne. Commençons donc par définir une norme non-archimédienne.

**Définition 1.** *Soit  $K$  un corps. On appelle norme non archimédienne sur  $K$  une norme  $|\cdot|$  multiplicative sur  $K$ , vérifiant pour tous  $x, y \in K$  :  $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ .*

L'inégalité triangulaire vérifiée par toutes les normes est ainsi remplacée par une inégalité plus forte. Il est facile de voir que pour une norme non-archimédienne, si  $|x| \neq |y|$ , on a  $|x + y| = \max\{|x|, |y|\}$ . En effet, si on suppose par exemple  $|x| > |y|$ , on a d'une part  $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\} = |x|$  et d'autre part  $|x| = |x + y + (-y)| \leq \max\{|x + y|, |y|\}$  or  $|x| > |y|$  donc  $|x| \leq |x + y|$  puis  $|x| = |x + y|$ .

On se donne dans la suite un corps normé non-archimédien et complet, que l'on note  $K$ . Dans le cas archimédien, un tel corps est obtenu, à partir de  $\mathbb{Q}$ , en complétant  $\mathbb{Q}$  pour une norme archimédienne (par exemple la valeur absolue), ce qui donne  $\mathbb{R}$ , puis en prenant la clôture algébrique de  $\mathbb{R}$ , celle-ci reste complète, ce qui donne  $\mathbb{C}$  un corps archimédien normé complet et algébriquement clos.

C'est un peu plus compliqué dans le monde non-archimédien. En effet, si on considère une norme non archimédienne sur  $\mathbb{Q}$ , donc une norme  $p$ -adique pour un nombre premier  $p$ , on peut toujours considérer le complété  $\mathbb{Q}_p$  de  $\mathbb{Q}$ , qui est le corps des nombres  $p$ -adiques. Le problème est que la clôture algébrique de  $\mathbb{Q}_p$  n'est plus complète. Il faut donc une étape supplémentaire par rapport au cas archimédien, et considérer  $\mathbb{C}_p$ , le complété de la clôture algébrique de  $\mathbb{Q}_p$ .  $\mathbb{C}_p$  reste bien algébriquement clos. On peut donc par exemple supposer dans la suite  $K = \mathbb{C}_p$ .

Pour faire de l'analyse sur  $K$ , on se heurte à de nombreuses difficultés. Par exemple,  $K$  est totalement discontinu. En effet, on vérifie aisément que dans un corps non-archimédien, les boules ouvertes et les boules fermées sont à la fois des ouverts et des fermés. Par conséquent, si une partie  $A$  de  $K$  contient deux points distincts  $x_1$  et  $x_2$ ,  $A$  n'est pas connexe puisque la boule  $B\left(x_0, \frac{|x_0 - x_1|}{2}\right)$  est ouverte et fermée dans  $A$ , les seules composantes connexes de  $K$  sont donc les points.

Cette difficulté, ainsi que de nombreuses autres, peut être contournée en travaillant avec la droite affine de Berkovich, que nous allons à présent introduire.

## 1 Topologie de la droite affine de Berkovich

On pose

$$\mathbb{A}_K^{1,an} = \{\text{semi-norme multiplicative sur } K[T] \text{ qui étend la norme sur } K\}$$

On a donc, pour tout  $x \in \mathbb{A}_K^{1,an}$ ,  $P, Q \in K[T]$  :

- (i)  $|PQ|_x = |P|_x |Q|_x$
- (ii)  $|0|_x = 0$
- (iii)  $|P + Q|_x \leq |P|_x + |Q|_x$
- (iv)  $|a|_x = |a|$  pour  $a \in K$

En considérant l'égalité  $|P + Q|_x = |(P + Q)^n|_x^{\frac{1}{n}}$  on peut remplacer le (iii) par une inégalité plus forte, analogue à celle obtenue pour la norme non-archimédienne sur  $K$  :

$$|P + Q|_x \leq \max\{|P|_x, |Q|_x\}$$

On remarque que  $\mathbb{A}_K^{1,an} \subset \mathbb{R}_+^{K[T]}$ , donc  $\mathbb{A}_K^{1,an}$  vient avec une norme produit naturelle, qui est telle que pour tout espace topologique  $X$  et pour toute fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{A}_K^{1,an}$ ,  $f$  est continue si et seulement si la fonction

$$\begin{aligned} X &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto |P|_{f(x)} \end{aligned}$$

est continue pour tout polynôme  $P \in K[T]$ .

Dans la suite, pour  $x \in \mathbb{A}_K^{1,an}$ , on note  $|P(x)|$  la quantité  $|P|_x$ .

## 1.1 Plongement de l'ensemble des boules fermées de $K$ dans $\mathbb{A}_K^{1,an}$

La deuxième remarque importante est que  $\mathbb{A}_K^{1,an}$  est un espace qui contient  $K$ . En effet, pour  $z \in K$ , on obtient une semi-norme sur  $K[T]$  en posant pour tout polynôme  $P \in K[T] : |P|_z = |P(z)|$ . On a donc une application

$$\begin{aligned} K &\rightarrow \mathbb{A}_K^{1,an} \\ z &\mapsto |\cdot|_z \end{aligned}$$

En considérant les polynômes  $T - z$  pour  $z \in K$ , on vérifie que cette application est injective. De plus, la continuité de la norme et des fonctions polynomiales sur  $K$  donne que pour  $P \in K[T]$ , l'application  $z \in K \mapsto |P(z)|$  est continue, donc on dispose bien d'une injection continue de  $K$  dans  $\mathbb{A}_K^{1,an}$ . De plus, les semi-normes associées aux points de  $K$  sont exactement celles qui ne sont pas des normes. En effet, si  $x \in \mathbb{A}_K^{1,an}$  est telle qu'il existe  $P \in K[T], P \neq 0$  avec  $|P(x)| = 0$ , comme  $K$  est algébriquement clos on peut écrire

$$P = \prod_{i=1}^d (T - \lambda_i)$$

Donc comme  $x$  est une semi-norme multiplicative  $|P|_x = \prod_{i=1}^d |T - \lambda_i|_x = 0$ , donc il existe  $i_0$  avec  $|T - \lambda_{i_0}|_x = 0$ . On va montrer que  $x = |\cdot|_{\lambda_{i_0}}$ . En effet, soit  $Q \in K[T]$ . En effectuant la division euclidienne de  $Q$  par  $T - \lambda_{i_0}$ , on obtient  $Q = A(T - \lambda_{i_0}) + Q(\lambda_{i_0})$  avec  $z \in K$ . Alors par multiplicativité de  $x$   $|A(T - \lambda_{i_0})|_x = 0$  donc comme  $x$  est "non-archimédienne" et étend la norme sur  $K$ , on a  $|Q|_x = |Q(\lambda_{i_0})|$ .

Une autre façon d'obtenir des éléments de  $\mathbb{A}_K^{1,an}$  celle de  $K$  est de considérer la norme sup sur les boules de  $K$  et de poser, pour  $z_0 \in K$  et  $r > 0$  :

$$x_{\overline{B}(z_0, r)} : P \in K[T] \mapsto \sup_{\overline{B}(z_0, r)} |P|$$

Il est aisé de vérifier que l'on obtient ainsi des semi-normes. Le point plus délicat est de montrer qu'elles sont multiplicatives. Prenons donc  $P, Q$  des polynômes de  $K[T]$  et posons  $P(z_0 + T) = \sum_{i=0}^{d_1} a_i T^i$  et  $Q(z_0 + T) = \sum_{j=0}^{d_2} b_j T^j$ . On a alors :  $PQ = \sum_{i,j} a_i b_j T^{i+j}$ . De plus on a les inégalités, pour tout  $z \in K$  avec  $z \in \overline{B}(z_0, r)$  :

$$\begin{cases} |P(z)| \leq \sup_{0 \leq i \leq d_1} |a_i| |z|^i \\ |Q(z)| \leq \sup_{0 \leq j \leq d_2} |b_j| |z|^j \\ |(PQ)(z)| \leq \sup_{i,j} |a_i| |b_j| |z|^{i+j} \end{cases}$$

De plus, dans chaque ligne, on a égalité dès que l'un des termes à l'intérieur du sup est strictement plus grand que tous les autres. Si l'on admet que le groupe

des valeurs  $|K^\times|$  est dense dans  $\mathbb{R}_+$ , on peut faire tendre dans les inégalités ci-dessus  $|z|$  vers  $r$  par valeurs inférieures. Il est alors aisé de voir que pour  $|z| < r$  et  $|z|$  suffisamment proche de  $r$ , les inégalités ci-dessus sont des égalités. En passant à la limite, on obtient finalement :

$$\begin{cases} \sup_{\overline{B}(z_0, r)} |P| = \sup_{0 \leq i \leq d_1} |a_i| r^i \\ \sup_{\overline{B}(z_0, r)} |Q| = \sup_{0 \leq j \leq d_2} |b_j| r^j \\ \sup_{\overline{B}(z_0, r)} |PQ| = \sup_{i, j} |a_i| |b_j| r^{i+j} \end{cases}$$

ce qui montre la multiplicativité de la norme  $x_{\overline{B}(z_0, r)}$ , sous réserve de la proposition suivante :

**Proposition 1.** *Le groupe des valeurs  $|K^\times|$  de  $K$  est dense dans  $\mathbb{R}_+$*

*Démonstration.* En effet,  $|K^\times|$  est un sous-groupe de  $\mathbb{R}_+^*$ , donc en passant au logarithme, on obtient que  $\log(|K^\times|)$  est un sous-groupe de  $\mathbb{R}$ . Pour montrer qu'il est dense, il suffit donc de montrer qu'il possède des éléments strictement positifs aussi petits que l'on veut. C'est bien le cas, car  $K$  est algébriquement clos, donc si  $z \in K$ ,  $|z| > 1$ , en considérant les racines de  $z$  on obtient  $\frac{1}{n}|z| \in \log |K^\times|$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

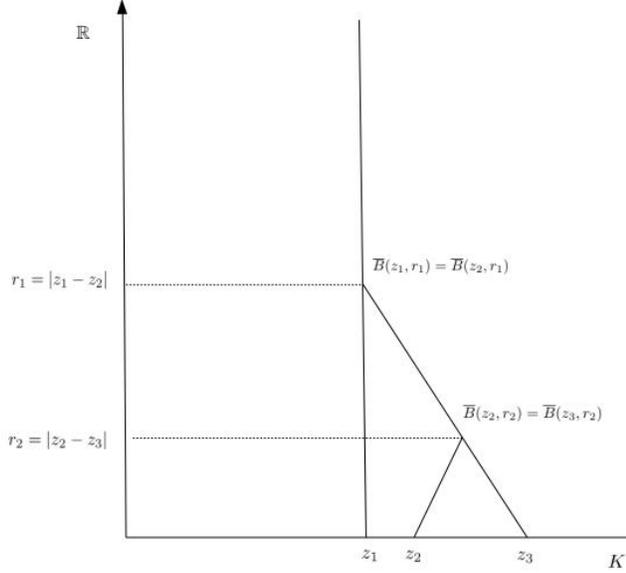
En prouvant que  $x_{\overline{B}(z_0, r)}$  est un élément de  $\mathbb{A}_K^{1, an}$ , on a aussi démontré la proposition suivante :

**Proposition 2.** *Pour  $P \in K[T]$ , en posant  $P(z_0 + T) = \sum_{i=0}^{d_1} a_i T^i$  on a  $|P(x_{\overline{B}(z_0, r)})| = \sup_{0 \leq i \leq d_1} |a_i| r^i$*

Vérifions à présent que l'application  $\overline{B} \mapsto x_{\overline{B}}$  est une injection de l'ensemble des boules fermées de  $K$  vers la droite affine de Berkovich. Soient  $\overline{B}_1 \neq \overline{B}_2$  deux boules fermées de  $K$ . On a ou bien l'une des deux boules est incluse dans l'autre, ou bien les deux sont disjointes. Si  $\overline{B}_1 \subsetneq \overline{B}_2$ , alors le rayon de  $\overline{B}_1$  est strictement plus petit que celui de  $\overline{B}_2$  et elles ont le même centre, donc la proposition 2 donne  $x_{\overline{B}_1} \neq x_{\overline{B}_2}$ . D'autre part, si  $\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 = \emptyset$ , soit  $z_0 \in \overline{B}_1$  et posons  $\overline{B}_1 = \overline{B}(z_1, r_1)$ ,  $\overline{B}_2 = \overline{B}(z_2, r_2)$ . Alors  $\sup_{\overline{B}_2} |T - z_0| = |z_2 - z_0| > r_1$  et  $\sup_{\overline{B}_1} |T - z_0| \leq r_1$  donc on a également  $x_{\overline{B}_1} \neq x_{\overline{B}_2}$ .

On peut dès à présent se faire une idée de la topologie de la droite affine de Berkovich en considérant le sous-ensemble constitué des points associés aux boules fermées de  $K$ . Pour cela, considérons la relation d'ordre  $\leq$  sur  $\mathbb{A}_K^{1, an}$  donnée par  $x \leq y$  si pour  $P \in K[T]$ ,  $|P|_x \leq |P|_y$ . Considérons le dessin suivant, deux points étant reliés signifiant que l'un (placé au-dessus) est plus grand que l'autre.

On voit que pour deux boules  $\overline{B}(z_1, r_1)$  et  $\overline{B}(z_2, r_2)$ , l'ensemble  $\{x \geq x_{\overline{B}(z_1, r_1)}\} \cap \{x \geq x_{\overline{B}(z_2, r_2)}\}$  est non vide, et admet un minimum qui est  $\overline{B}(z_1, |z_1 - z_2|) = \overline{B}(z_2, |z_1 - z_2|)$ . On voit donc apparaître sur le dessin un "chemin" entre chaque



paire de boules fermées, ce qui donne envie de montrer que le sous-ensemble considéré de  $\mathbb{A}_K^{1,an}$  est connexe par arcs.

Pour le montrer, il suffit de voir que pour  $z_0 \in K$ , l'application

$$\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{A}_K^{1,an} \\ r \mapsto x_{\overline{B}(z_0, r)}$$

est continue, car alors la composante connexe par arcs de tout  $x_{\overline{B}}$  contiendra  $\{x \geq x_{\overline{B}}\}$  et la remarque précédente montrera la connexité par arcs de l'ensemble des boules fermées de  $K$  plongé dans  $\mathbb{A}_K^{1,an}$ . Or la continuité de  $\phi$  est une conséquence immédiate de la proposition 2.

On a donc plongé l'espace topologique totalement discontinu  $K$  dans un espace plus grand, dans lequel tous les points de  $K$  (boules fermées de rayon nul) sont dans la même composante connexe.

## 1.2 Détermination de l'ensemble des points de $\mathbb{A}_K^{1,an}$

Demandons-nous à présent dans quelle mesure on a compris l'ensemble de Berkovich une fois qu'on a compris l'ensemble des boules fermées de  $K$ , c'est-à-dire s'il existe beaucoup d'autres points dans  $\mathbb{A}_K^{1,an}$ . Pour cela, tentons de caractériser les boules de  $K$  uniquement en termes de normes sur  $K[T]$ . Soit  $x = x_{\overline{B}} \in \mathbb{A}_K^{1,an}$ . Si  $r$  est le rayon de  $\overline{B}$ , les points  $z_0$  de  $\overline{B}$  sont exactement les points tels que  $|T - z_0|_x = r$  est le minimum de la fonction  $z \in K \mapsto |T - z|_x \in \mathbb{A}_K^{1,an}$ .

Soit maintenant  $x \in \mathbb{A}_K^{1,an}$  quelconque et considérons la fonction  $\phi : z \in K \mapsto |T - z|_x \in \mathbb{R}_+$ . L'ensemble  $\{\phi(z)\}_{z \in K}$  admet une borne inférieure  $m$ .

Remarquons que si  $m$  est atteinte pour  $z_0 \in K$ , alors  $\{z \in K, \phi(z) = m\} = \overline{B}(z_0, m)$ . En effet, si  $|z - z_0| \leq m$ ,  $m \leq |z - T|_x \leq |z - z_0 + z_0 - T|_x \leq \max\{|z - z_0|_x, |z_0 - T|_x\} = m$  et réciproquement si  $\phi(z) = m$ ,  $|z - z_0| = |z - T + T - z_0|_x \leq \max\{\phi(z), \phi(z_0)\} = m$ . Qui plus est, si  $|z - z_0| > m$ , on a  $|T - z|_x = |T - z_0 + z_0 - z|_x = |z_0 - z|_x$  car  $|T - z_0|_x = m < |z_0 - z|$  donc  $|T - z|_x = \sup_{\overline{B}(z_0, m)} |T - z|$ . On obtient donc finalement :  $x = x_{\overline{B}(z_0, m)}$ .

Dans le cas général, on peut juste trouver une suite  $(z_n)$  de  $K$  telle que  $\phi(z_n) \rightarrow m$  avec  $(\phi(z_n))$  strictement décroissante. Remarquons qu'alors la suite  $\overline{B}_n = \overline{B}(z_n, \phi(z_n))$  est décroissante. En effet, cela revient à dire que  $z_{n+1} \in \overline{B}_n$ . Or  $|z_{n+1} - z_n| \leq \max\{\phi(z_{n+1}), \phi(z_n)\} = \phi(z_n)$ .

On va montrer que, dans cette situation, on a  $x_{\overline{B}_n} \rightarrow x$ , c'est-à-dire, pour  $P \in K[T]$ ,  $|P|_x = \lim_{n \rightarrow +\infty} |P|_{x_{\overline{B}_n}}$ . Par multiplicativité de la norme et comme  $K$  est algébriquement clos, il suffit en effet de le montrer pour les polynômes de la forme  $T - \lambda$ ,  $\lambda \in K$ . Or on a pour  $\lambda \in K$  :

- Si  $\lambda \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B}_n$ , alors  $|T - \lambda|_{x_{\overline{B}_n}} = \phi(z_n) \rightarrow m$  avec de plus  $|T - \lambda|_{x_{\overline{B}_n}} \geq |T - \lambda|_x$  car  $|T - \lambda|_x = |T - z_n + z_n - \lambda|_x \leq \max\{\phi(z_n), |z_n - \lambda|_x\} = \phi(z_n)$ . Donc  $|T - \lambda|_x = m$  et  $|T - \lambda|_{x_{\overline{B}_n}} \rightarrow |T - \lambda|_x$ .
- Si  $\lambda \notin \overline{B}_n$  pour  $n \geq n_0$ ,  $|T - \lambda|_{x_{\overline{B}_n}} = |T - \lambda|_{x_{\overline{B}_{n_0}}}$  de plus  $|T - \lambda|_{x_{\overline{B}_n}} = |z_n - \lambda|_x = |z_n - T + T - \lambda|_x = \sup\{\phi(z_n), |T - \lambda|_x\}$  pour  $z$  suffisamment grand par stricte décroissance de  $z_n$  (qui implique  $\phi(z_n) \neq |T - \lambda|_x$  pour tout  $n$  sauf au plus un). Finalement, comme  $|T - \lambda|_{x_{\overline{B}_{n_0}}}$  ne dépend pas de  $n$ ,  $|T - \lambda|_{x_{\overline{B}_n}} = |T - \lambda|_x$  pour  $n$  suffisamment grand. Ceci achève de montrer  $x_n \rightarrow x$ .

On peut donc énoncer le théorème suivant (le fait qu'il soit vrai pour les points correspondant à des boules fermées de  $K$  est une conséquence de la densité dans  $\mathbb{R}_+$  de  $|K^\times|$ )

**Théorème 1.** *Tout  $x \in \mathbb{A}_K^{1,an}$  est de la forme  $P \in K[T] \mapsto \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\overline{B}_n} |P|$  avec  $\overline{B}_n$  une suite strictement décroissante de boules fermées de  $K$*

Réciproquement, on vérifie aisément que pour toute suite décroissante  $\overline{B}_n$  de boules fermées, on obtient une semi-norme multiplicative sur  $K[T]$  en posant  $|P|_x = \lim_{n \rightarrow +\infty} |P|_{x_{\overline{B}_n}}$ .

On peut alors distinguer deux cas :

- Soit l'intersection  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B}_n$  est non vide. Alors il est facile de vérifier que c'est une boule de  $K$  de rayon  $r \geq 0$  et  $x = x_{\bigcap \overline{B}_n}$ . Si  $r = 0$  (i.e.  $x \in K$ ), on dit que  $x$  est de type 1. Si  $r \in |K^\times|$  on dit que  $x$  est de type 2, et si  $r > 0$  et  $r \notin |K^\times|$ , on dit que  $x$  est de type 3. Remarquons qu'il existe des points de type 3 si et seulement si  $|K^\times| \neq \mathbb{R}_+^*$ . Dans la suite, on supposera que c'est le cas (on peut montrer que c'est le cas dans  $\mathbb{C}_p$ ).
- Soit l'intersection des  $\overline{B}_n$  est vide. On dit alors que  $x$  est de type 4. Remarquons qu'alors nécessairement si  $r_n$  est le rayon de  $B_n$ , on a  $r_n \rightarrow r > 0$  car si  $r_n \rightarrow 0$ , la suite des  $B_n$  est une suite décroissante de fermés dont le rayon tend vers 0 et est donc non vide par complétude de  $K$ .

Finalement, le dessin de la sous-section précédente ne contient pas forcément tous les points de  $\mathbb{A}_K^{1,an}$ , mais il donne tout de même une très bonne idée de

$\mathbb{A}_K^{1,an}$ , puisque celui-ci est constitué des points du dessin de limites de tels points. En particulier,  $\mathbb{A}_K^{1,an}$  est connexe par arcs : si  $(\overline{B}_n)$  est une suite décroissante de boules fermées tendant vers  $x \in \mathbb{A}_K^{1,an}$ , et  $\gamma_n$  un chemin continu de  $\overline{B}_n$  vers  $\overline{B}_{n+1}$  la concaténation des  $\gamma_n$  donne un chemin continu de  $\overline{B}_0$  vers  $x$ .

### 1.3 Existence de points de type 4

On peut cependant se demander si, dans la sous-section précédente, on a effectivement trouvé de nouveaux points de  $\mathbb{A}_K^{1,an}$ . En effet, on n'a pas réussi à démontrer que  $\mathbb{A}_K^{1,an}$  n'était constitué que points associés à des boules fermées, mais cela ne nous dit pas qu'il contient en effet d'autres points, c'est-à-dire des points de type 4. Le théorème suivant nous fournit une réponse.

**Théorème 2.** *Si  $K$  possède une partie dénombrable et dense, alors pour tout  $r > 0$  il existe une suite  $\overline{B}_n$  décroissante de boules fermées de rayon  $r_n$  de  $K$  telles que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B}_n = \emptyset$  et  $r_n \rightarrow r$*

Démontrons à présent ce théorème. Soit  $\{x_n\}$  une partie dénombrable et dense de  $K$ ,  $r > 0$  et  $(r_n)$  une suite de réels positifs strictement décroissante tendant vers  $r$ . Posons  $\overline{B}_0 = \overline{B}(x_0, r_0)$ . Comme  $\{x_n\}$  est dense, il existe  $k \geq 1$  tel que  $r_1 < |x_0 - x_k| < r_0$ . Soit  $k_1$  le plus petit entier vérifiant cette condition et posons  $\overline{B}_1 = \overline{B}(x_{k_1}, r_1)$ , si bien que  $\overline{B}_1 \subset \overline{B}_0$  et pour  $k < k_1$ ,  $x_k \notin \overline{B}_1$ . En itérant cette construction, on obtient une suite  $(\overline{B}_n)$  de boules strictement décroissante et une suite  $(k_n)$  d'entiers strictement croissante avec  $k_n$  le plus petit entier tel que  $r_n < |x_{k_{n-1}} - x_{k_n}| < r_{n-1}$  et  $\overline{B}_n$  est la boule de centre  $x_{k_n}$  et de rayon  $r_n$ , si bien que pour  $k < k_n$ ,  $x_k \notin \overline{B}_n$ . On a alors  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B}_n \cap \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \emptyset$ . Or si  $z \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B}_n$ , on aurait  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B}_n = \overline{B}(z, r)$ , et donc l'intersection des  $\overline{B}_n$  contiendrait un  $x_k$ , puisque ceux-ci forment une partie dense de  $K$ .

Notons que l'on peut montrer que  $\overline{\mathbb{Q}}$  est dense dans  $\mathbb{C}_p$ . Comme  $\overline{\mathbb{Q}}$  est dénombrable, cela implique donc que  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}_p}^{1,an}$  contient des points de type 4.

## 2 Dynamique dans la droite affine de Berkovich

On va à présent montrer que l'on peut faire de l'analyse sur  $\mathbb{A}_K^{1,an}$  en y faisant de la dynamique des polynômes. Il n'est à première vue pas évident que les polynômes fournissent des fonctions continues sur  $\mathbb{A}_K^{1,an}$ , puisque la droite affine de Berkovich n'est pas munie d'une quelconque structure algébrique. En revanche, on peut définir de façon très naturelle une fonction polynomiale sur  $\mathbb{A}_K^{1,an}$  pour chaque polynôme  $Q \in K[T]$  en posant pour  $x \in \mathbb{A}_K^{1,an}$

$$\forall P \in K[T], |P|_{Q(x)} = |P \circ Q|_x$$

Ou, écrit avec une autre convention,  $|P(Q(x))| = |(P \circ Q)(x)|$ . Il est immédiat que la fonction polynomiale associée à  $Q$  est continue et que son action sur  $K \subset \mathbb{A}_K^{1,an}$  correspond à l'action algébrique (elle commute avec l'injection  $K \subset \mathbb{A}_K^{1,an}$ ).

Nous allons dans cette partie prouver le théorème suivant. On dit qu'un polynôme non constant  $P \in K[T]$ ,  $P = \sum_{i=0}^d a_i T^i$  a bonne réduction si et seulement si  $|a_i| \leq 1$  pour tout  $0 \leq i \leq d$  et  $|a_d| = 1$  :

**Théorème 3.** *Soit  $P \in K[T]$ .  $P$  a bonne réduction si et seulement si  $P^{-1}(x_g) = x_g$*

où on a noté  $x_g$  le point de Gauss :

$$x_g = x_{\overline{B}(0,1)}$$

Pour démontrer cela, on a besoin de deux résultats importants. Tout d'abord, pour  $P \in K[T]$  un polynôme non constant, le type est préservé par l'action de  $P$ . De plus le théorème suivant joue un rôle important dans la preuve du théorème 3 :

**Théorème 4.** *Soit  $Q \in K[T]$ ,  $Q = \sum_{i=0}^d a_i T^i$ . Posons pour  $r \in \mathbb{R}_+$ ,  $F(r) = \sup_{\overline{B}(0,r)} |Q| = \max\{|a_i| r^i\}$ . On dit que  $r \geq 0$  est un rayon critique de  $Q$  s'il existe  $0 \leq i_1 < i_2 \leq d$  tels que  $F(r) = |a_{i_1}| r^{i_1} = |a_{i_2}| r^{i_2}$ . Avec ces conventions, on a que si  $r$  est un rayon critique de  $Q$  et si  $i_1 < i_2$  sont les indices extrémaux tels que  $F(r) = |a_{i_1}| r^{i_1} = |a_{i_2}| r^{i_2}$ , alors  $Q$  admet exactement  $i_2 - i_1$  racines de  $Q$  dans  $K$ , comptées avec multiplicité.*

## 2.1 Démonstration du théorème 3

Commençons par démontrer le théorème 3 en supposant acquis les deux résultats que nous venons d'énoncer.

Remarquons d'abord la proposition suivante :

**Proposition 3.** *Si  $z_0 \in K$  et  $r \in \mathbb{R}_+$ , et si  $P \in K[T]$  avec  $P(z_0 + T) = \sum_{i=0}^d a_i T^i$ , alors  $P(x_{\overline{B}(z_0,r)}) = x_{\overline{B}(P(z_0), \max_{i \geq 1} \{|a_i| r^i\})}$ .*

En effet, si  $\lambda \in K$ , on a

$$\begin{aligned} |T - \lambda|_{P(x_{\overline{B}(z_0,r)})} &= \sup_{\xi \in \overline{B}(z_0,r)} |P(\xi) - \lambda| \\ &= \sup_{|z| \leq r} \left| \sum_{i=0}^d a_i z^i - \lambda \right| \\ &= \begin{cases} |\lambda - P(z_0)| & \text{si } |\lambda - P(z_0)| \geq \max_{i \geq 1} \{|a_i| r^i\} \\ \max_{i \geq 1} \{|a_i| r^i\} & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \left| T - \lambda(x_{\overline{B}(P(z_0), \sup_{i \geq 1} \{|a_i| r^i\})}) \right| \end{aligned}$$

Supposons maintenant que  $P = \sum_{i=0}^d b_i T^i$  ait bonne réduction. La proposition précédente nous donne immédiatement que  $P(x_g) = x_g$ . Soit  $x \in$

$P^{-1}(x_g)$ . Comme on a supposé que l'ensemble des points de type 2 est totalement invariant par  $P$ , on peut écrire  $x = x_{\overline{B}(z_0, r)}$  avec  $r \in |K^\times|$ . En posant  $P(z_0 + T) = \sum_{i=0}^d |a_i| T^i$  on obtient toujours avec la proposition 3 :  $\max_{i \geq 1} |a_i| r^i = 1$  et  $|P(z_0)| \leq 1$ . Cette dernière inégalité implique que  $|z_0| \leq 1$  (sinon  $|P(z_0)| = |b_d| |z_0|^d > 1$ ). De plus on a  $|a_d| = |b_d|$  donc  $|a_d| = 1$  ce qui implique que  $r \leq 1$ . Comme de plus les  $|a_d|$  sont des sommes produits de  $|b_d|$  et de  $|z_0|$  et que ces quantités sont de modules inférieurs à 1, on obtient que  $|a_d| \leq 1$  puis si  $r < 1$ ,  $\max_{i \geq 1} |a_i| r^i \leq 1$ . On a donc  $r = 1$ , puis  $x = x_g$ . On a donc bien montré  $P^{-1}(x_g) = x_g$ .

Pour l'autre sens de l'équivalence, supposons  $P^{-1}(x_g) = x_g$ , et montrons que  $P$  a bonne réduction. Posons toujours  $P = \sum_{i=0}^d b_i T^i$ . On a, par la proposition 3,  $P(x_g) = x_{\overline{B}(b_0, \sup_{i \geq 1} |b_i|)} = x_{\overline{B}(0, 1)}$ , ce qui donne exactement  $\sup_{0 \leq i \leq d} |a_i| = 1$ . Il suffit à présent de montrer que  $|a_d| = 1$ . Considérons pour cela la fonction  $F(r) = \sup_{0 \leq i \leq d} |a_i| r^i$ . Pour  $r$  grand,  $F(r) = |a_d| r^d$ , mais si  $|a_d| < 1$ , comme  $\sup_{0 \leq i \leq d} |a_i| = 1$ , il existe  $j < d$  tel que  $F(1) = |a_j| 1^j = 1 > |a_d|$ . Donc comme les fonctions  $r \mapsto |a_i| r^i$  sont continues,  $P$  admet un rayon critique (au sens du théorème 4)  $r_0 > 1$ , donc  $P$  admet une racine  $z_0$  de module strictement supérieur à 1 par le théorème 4. On a donc pour  $r \geq 0$   $P(x_{\overline{B}(z_0, r)}) = \overline{B}(0, \phi(r))$  avec  $\phi$  continue,  $\phi(0) = 0$  et  $\phi(r)$  tend vers l'infini en l'infini. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc  $r_1$  tel que  $\phi(r_1) = 1$ , donc  $P(x_{\overline{B}(z_0, r_1)}) = x_g$ , ce qui est absurde par hypothèse, donc  $|a_d| = 1$  et  $P$  a bonne réduction, ce qui termine la démonstration du théorème 3.

## 2.2 Image d'un point de type donné par une fonction polynomiale

Démontrons à présent le premier point que nous avons admis pour la démonstration qui précède, à savoir que l'image par une fonction polynomiale d'un point de type  $i$  est un point de type  $i$  pour  $i = 1, 2, 3, 4$ . C'est une conséquence immédiate de la proposition 3 pour les points de type 1, 2 et 3. Pour un points de type 4, il est aisé de remarquer que leur image par une fonction polynomiale non constante ne peut être un point de type 1. En effet, si  $P(x)$  est un point de type 1 avec  $P$  non constant, alors il existe  $Q \in K[T]$  non nul tel que  $|Q \circ P(x)| = 0$ , et comme  $Q \circ P \neq 0$ , on a que  $x$  n'est pas une norme sur  $K[T]$  donc  $x$  est de type 1. Pour montrer que l'image d'un point de type 4 ne peut être un point de type 2 ou 3, nous allons construire deux objets pour chacun des points de  $\mathbb{A}_K^{1, an}$  de type 2, 3 et 4.

### 2.2.1 Stratégie de la preuve

Ces deux objets sont associés au corps  $K(T)$ . Si  $x \in \mathbb{A}_K^{1, an}$  avec  $x$  norme sur  $K[T]$  (i.e.  $x$  n'est pas un point de type 1), on vérifie aisément que  $x$  induit une norme sur  $K(T)$  en posant  $\left| \frac{P}{Q} \right|_x = \frac{|P(x)|}{|Q(x)|}$ .  $K(T)$  est alors muni d'une norme non archimédienne  $x$ . Empressons-nous donc de compléter  $K(T)$  pour la norme

$x$ , et nommons  $\mathcal{H}(x)$  cette complétion. Nous pouvons alors regarder d'une part le groupe des valeurs  $|\mathcal{H}(x)^\times|$  et d'autre part, comme  $\mathcal{H}(x)$  est un corps non-archimédien, le corps résiduel  $\widetilde{\mathcal{H}(x)} = \frac{\mathcal{H}(x)^\circ}{\mathcal{H}(x)^\circ\circ}$ . On a bien sûr  $|K^\times| \subset |\mathcal{H}(x)^\times|$  et  $\widetilde{K} = \frac{K^\circ}{K^\circ\circ} \subset \widetilde{\mathcal{H}(x)}$ . On va classifer les points de  $\mathbb{A}_K^{1,an}$  selon que ces inclusions sont strictes ou non, ce qui suffira à montrer qu'un point de type 4 s'envoie sur un point de type 4 par une application polynomiale.

Remarquons tout d'abord que l'on peut travailler avec le groupe des valeurs et le corps résiduel de  $K(T)$ , qui sont égaux à ceux de  $\mathcal{H}(x)$ . En effet, comme  $K(T) \subset \mathcal{H}(x)$ , on a  $|K(T)^\times| \subset |\mathcal{H}(x)^\times|$  et  $\widetilde{K(T)} \subset \widetilde{\mathcal{H}(x)}$ . De plus, si  $p \in \mathcal{H}(x)$ , on dispose d'une suite  $(p_n)$  d'éléments de  $K(T)$  telle que  $p_n \rightarrow p$ . Alors, à partir d'un certain rang,  $|p_n - p| < |p_n|$ , donc  $|p| = |p_n|$ , ce qui donne  $|K(T)^\times| = |\mathcal{H}(x)^\times|$ . De plus si  $|p| \leq 1$ , pour  $n$  grand  $|p_n - p| \leq 1$  donc  $|p_n| \leq 1$ . Comme de plus pour  $n$  grand  $|p_n - p| < 1$ , on a  $\overline{p_n} = \overline{p} \in \widetilde{\mathcal{H}(x)}$  puis  $\widetilde{K(T)} = \widetilde{\mathcal{H}(x)}$ . On a introduit  $\mathcal{H}(x)$  parce que les objets que nous étudions ont une utilité dans un cadre bien plus large que notre démonstration et qu'il serait très étrange de faire de l'analyse dans un corps non complet, mais la remarque que nous venons de faire montre que nous aurions pu nous contenter de  $K(X)$  ici.

Pour  $x \in \mathbb{A}_K^{1,an}$  sans noyau, posons

$$\epsilon_x = \begin{cases} 1 & \text{si } |\mathcal{H}(x)^\times| = |K^\times| \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\eta_x = \begin{cases} 0 & \text{si } \widetilde{\mathcal{H}(x)} = \widetilde{K} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour comprendre comment ces nombres vont nous donner une information sur l'image des points de  $\mathbb{A}_K^{1,an}$  par les applications polynomiales, commençons par remarquer que si  $x \in \mathbb{A}_K^{1,an}$  sans noyau et  $P \in K[T]$ , alors  $\epsilon_x \geq \epsilon_{P(x)}$  et  $\eta_x \geq \eta_{P(x)}$ . En effet, on a  $|Q(P(x))| = |(Q \circ P)(x)|$ , donc  $|K[T]^\times|_{P(x)} \subset |K[T]^\times|_x$ . Comme  $|K[T]^\times|_x$  engendre  $|K(T)^\times|_x$ , on a  $|K(T)^\times|_{P(x)} \subset |K(T)^\times|_x$ , donc si  $\epsilon_x = 1$ ,  $\epsilon_{P(x)} = 1$ . De même, si  $\eta_x = 0$ , si  $F \in K(T)$  telle que  $|F|_{Q(x)} \leq 1$ , alors  $|F \circ Q|_x \leq 1$  donc comme le corps résiduel pour la norme  $x$  de  $K(T)$  est le corps résiduel de  $K$ , il existe  $z \in K$  tel que  $|F \circ Q - z|_x < 1$ , c'est-à-dire  $|F - z|_{Q(x)} < 1$ , donc la classe de  $F$  dans le corps résiduel de  $K(T)$  pour la norme  $Q(x)$  est la même que la classe de  $z$ , ce qui montre de  $\eta_{P(x)} = 0$ .

Nous allons à présent calculer  $\eta_x$  et  $\epsilon_x$  pour  $x$  de type 2, 3 ou 4, et nous allons montrer que les valeurs de  $\eta_x$  et  $\epsilon_x$  caractérisent le type de points de  $\mathbb{A}_K^{1,an}$  sans noyau, selon le tableau suivant :

	$\epsilon_x$	$\eta_x$
Type 2	1	1
Type 3	2	0
Type 4	1	0

On voit à la lecture de ce tableau que le fait que  $\eta_{P(x)} \leq \eta_x$  et  $\epsilon_{P(x)} \leq \epsilon_x$  suffit

à montrer que si  $x$  est de type 4,  $P(x)$  est également de type 4, le dernier point qui restait à obtenir.

### 2.2.2 Calcul de $\epsilon_x$ et $\eta_x$

On sait que pour  $x \in \mathbb{A}_K^{1,an}$  sans noyau, l'ensemble  $|K[T]^\times|_x$  engendre le groupe  $|K(T)^\times|_x$ . Le calcul de  $\epsilon_x$  revient donc à se demander si  $|K^\times| = |K[T]^\times|_x$ . La proposition 2 (et le fait que  $K$  est algébriquement clos donc  $|K^\times|$  est divisible) donne alors immédiatement que si  $x$  de type 2,  $\epsilon_x = 1$  et si  $x$  de type 3,  $\epsilon_x = 2$ . Reste à comprendre le cas des points de type 4. Supposons de  $x$  de type 4. La densité de  $|K^\times|$  dans  $\mathbb{R}_+$  donne qu'il existe une suite décroissante  $(\overline{B}_n)$  de boules fermées de  $K$  d'intersection vide, et de rayons dans  $|K^\times|$  (i.e.  $x_{\overline{B}_n}$  de type 2) telle que  $x_{\overline{B}_n} \rightarrow x$ . Soit  $P \in K[T]$ . Comme  $\bigcap \overline{B}_n = \emptyset$ , pour  $n$  grand,  $\overline{B}_n$  ne contient aucune des racines de  $P$ , donc comme  $K$  algébriquement clos  $|P|_{x_{\overline{B}_n}}$  est constant à partir d'un certain rang  $n_0$ . Alors  $|P(x)| = |P(x_{\overline{B}_{n_0}})| \in |K^\times|$ . On en déduit  $|K[T]|_x = |K|$  puis  $\epsilon_x = 1$  pour  $x$  de type 4.

Occupons-nous à présent de  $\eta_x$ .

- Si  $x \in \mathbb{A}_K^{1,an}$  de type 2, associé à la boule  $\overline{B}(z_0, r)$  ( $r \in |K^\times|$ ), soit  $P \in K[T]$  et supposons  $|P(x)| \leq 1$  et notons  $\overline{P}$  la classe de  $P$  dans le corps résiduel de  $K(T)$  pour la norme  $x$ . On a alors  $\overline{P} \in \widetilde{K}$  si et seulement si il existe  $\lambda \in K^\circ$  tel que  $|(P - \lambda)(x)| < 1$ . Posons  $P(z_0 + T) = \sum_i a_i T^i$ . On a alors  $|P(x)| = \max_{i \geq 0} \{|a_i| r^i\} \leq 1$  et pour  $\lambda \in K$ ,  $|(P - \lambda)(x)| = \max\{|a_0 - \lambda|, \max_{i \geq 1} \{|a_i| r^i\}\}$ . On voit donc que si on prend un des  $a_i$  pour  $i \geq 1$  tel que  $|a_i| r^i = 1$  (c'est possible car  $r \in |K^\times|$ ), on a  $|(P - \lambda)(x)| = 1$  pour tout  $\lambda \in K$ , donc  $\widetilde{K}$  est strictement inclus dans le corps résiduel pour  $x$  de  $K(T)$ .
- Si  $x$  est de type 3, associé à la boule  $\overline{B}(z_0, r)$  avec  $r \notin |K^\times|$ , donnons-nous  $\frac{P}{Q} \in K(T)^{0,x}$ , donc avec  $|P|_x \leq |Q|_x$ . On va montrer qu'il existe  $\lambda \in K^0$  avec  $\left| \frac{P}{Q} - \lambda \right| < 1$ . Si  $|P|_x < |Q|_x$ , il suffit de prendre  $\lambda = 0$ . Supposons donc  $|P(x)| = |Q(x)|$ . Posons de plus  $P(z + z_0) = \sum a_i z^i$  et  $Q(z + z_0) = \sum b_i z^i$ . Alors d'après la proposition 2, on a  $|P(x)| = \max\{|a_i| r^i\}$ . Remarquons que si  $|a_{i_1}| r^{i_1} = |a_{i_2}| r^{i_2}$ , alors  $r^{i_1 - i_2} = \frac{|a_{i_1}|}{|a_{i_2}|} \in |K^\times|$  donc  $i_1 = i_2$ . Soit donc  $i_1$  l'unique indice où le max est atteint. Le même développement vaut pour  $Q$  :  $|Q(x)| = \max\{|b_i| r^i\}$  et soit  $i_2$  l'unique indice où le max est atteint. Comme  $|P(x)| = |Q(x)|$ , l'argument précédent montre  $i_1 = i_2$  et on voit alors après un bref calcul que  $\left| \frac{P}{Q} - \frac{a_{i_1}}{b_{i_1}} \right| < 1$ . De plus comme  $|P(x)| = |Q(x)| = |a_{i_1}| r^{i_1} = |b_{i_1}| r^{i_1}$  on a  $\left| \frac{a_{i_1}}{b_{i_1}} \right| = 1$ . Finalement  $\widetilde{K(T)}^x = \widetilde{K}$  et  $\eta_x = 0$ .
- Supposons  $x$  de type 4. Comme on a supposé que  $\mathbb{R}_+ \setminus |K^\times|$  est non-vide, il est facile de montrer que c'est en fait un sous-ensemble dense (les arguments sont analogues à montrer que  $|K^\times|$  est dense).  $x$  est donc limite d'une suite strictement décroissante  $(x_n)$  de points de type 3. Soit  $\frac{P}{Q} \in K(T)$  avec  $|P|_x \leq |Q|_x$ . Pour  $n$  grand, les racines de  $P$  et  $Q$  sont

hors de  $\overline{B}_n$  (avec  $x_n = x_{\overline{B}_n}$ ), donc  $|P(x_n)| = |P(x)|$  et  $|Q(x_n)| = |Q(x)|$ . Pour un certain  $n_0$  grand, on peut donc choisir  $\lambda \in K^\circ$  comme au point précédent pour avoir  $|(P - \lambda Q)(x_{n_0})| < |Q(x_{n_0})| = |Q(x)|$ . Comme la suite  $x_n$  est décroissante on en déduit que  $|(P - \lambda Q)(x)| < |Q(x)|$ , donc dans le corps résiduel pour  $x$  de  $K(T)$ , la classe de  $\lambda$  est celle de  $\frac{P}{Q}$ , ce montre que  $\eta_x = 0$

### 2.3 Norme des zéros d'un polynôme de $K[T]$

Nous allons dans cette sous-section démontrer le théorème 4. Le théorème et sa preuve ne font pas intervenir la droite de Berkovich. Soit donc  $Q$  un polynôme de  $K[T]$ . D'une part, posons

$$Q = \sum_{i=0}^N a_i T^i$$

Donnons-nous également un rayon critique  $r_0$  de  $Q$ , et appelons  $i_1 < i_2$  les indices extrémaux tels que  $|a_{i_1}|r^{i_1} = |a_{i_2}|r^{i_2}$ . D'autre part, comme  $K$  est algébriquement clos,  $Q$  est scindé sur  $K[T]$ . On va trier les racines de  $Q$  en comparant leur norme à  $r_0$  : notons  $R_0$  l'ensemble des racines de  $Q$  de norme  $r_0$ ,  $R_1$  l'ensemble des racines de  $Q$  de norme strictement inférieure à  $r_0$  et  $R_2$  l'ensemble des racines de  $Q$  de norme strictement supérieure à  $r_0$ . Il s'agit alors de montrer que  $R_0$  est non vide. On a alors

$$Q = a_N \prod_{\alpha \in R_0} (T - \alpha) \prod_{\alpha \in R_1} (T - \alpha) \prod_{\alpha \in R_2} (T - \alpha)$$

où, pour alléger les notations, on a, au choix, supposé que  $Q$  ne possède pas de racine double, ou effectué un abus de notation et compté les racines avec multiplicité dans chaque produit (le même abus de notation sera alors effectué quand on écrira  $\#R_0$  : les racines seront comptées avec multiplicité).

Remarquons que si  $|z| = r_0^-$  (c'est-à-dire pour  $|z|$  tendant vers  $r_0$  par valeurs strictement inférieures, ce qui est possible car  $|K^\times|$  est dense dans  $\mathbb{R}_+$ ), on a  $|z - \alpha| = |\alpha|$  si  $\alpha \in R_0$  ou  $\alpha \in R_2$  et  $|z - \alpha| = |z|$  si  $\alpha \in R_1$ . De même, si  $|z| = r_0^+$ , on a  $|z - \alpha| = |\alpha|$  si  $\alpha \in R_2$  et  $|z - \alpha| = |z|$  si  $\alpha \in R_1$  ou  $\alpha \in R_0$

En passant au module dans les deux écritures de  $Q$ , on obtient, d'abord pour  $|z| = r_0^-$  :

$$\begin{aligned} |Q(z)| &= |a_{i_1}| |z|^{i_1} \\ &= |a_N| \left( \prod_{\alpha \in R_0 \cup R_2} |\alpha| \right) |z|^{\#R_1} \end{aligned}$$

ensuite pour  $|z| = r_0^+$  :

$$\begin{aligned} |Q(z)| &= |a_{i_2}| |z|^{i_2} \\ &= |a_N| \left( \prod_{\alpha \in R_2} |\alpha| \right) |z|^{\#R_1 + \#R_0} \end{aligned}$$

On en déduit que  $i_1 = \#R_1$  et  $i_2 = \#R_1 + \#R_0$ , ce qui donne  $\#R_0 = i_2 - i_1$ . Cela démontre le théorème 4.

## Références

- [1] Alain M. Robert, *A Course in p-adic Analysis*. Springer-Verlag, 2000.
- [2] Matthew Baker, Robert Rumely, *Potential Theory on the Berkovich Projective Line*. 2000.