Une Démonstration du théorème de de Rham à l'aide de la cohomologie des faisceaux

Gustave Billon

22 décembre 2018

Résumé

Ce mémoire d'enseignement d'approfondissement est consacré à la démonstration, via la cohomologie des faisceaux, du théorème de de Rham, qui donne un isomorphisme entre la cohomologie singulière d'une variété sur $\mathbb{R}$ et sa cohomologie de de Rham. Après avoir énoncé le théorème de de Rham, on présente quelques rudiments de la théorie des faisceaux ainsi que les axiomes d'une théorie de cohomologie des faisceaux. On s'attache ensuite à démontrer l'existence d'une telle théorie, en s'appuyant sur la notion de faisceau fin. La dernière partie est consacrée à la démonstration du théorème de de Rham, dont le seul point qui n'est pas plus ou moins automatique avec la machinerie de la cohomologie des faisceaux est le théorème des petites chaînes, auquel est consacrée la dernière sous-partie.

Table des matières

1 Énoncé du théorème de de Rham

Soit X une variété, que l'on suppose à base dénombrable. On dispose dans ce cas de deux théories de cohomologie sur X.

On a d'une part le complexe de de Rham des formes différentielles

$$\Omega^0(X) \xrightarrow{d} \Omega^1(X) \xrightarrow{d} \cdots$$

qui donne en passant à la cohomologie de de Rham des groupes

$$H^{\cdot}_{dR}(X)$$

D'autre part, on dispose du complexe des cochaînes singulières sur X

$$C^0(X) \xrightarrow{d} C^1(X) \xrightarrow{d} \cdots$$

défini comme le complexe dual du complexe $C_{\cdot}(X)$ des chaînes singulières, avec pour $q \in \mathbb{N}$

$$C_q(X) = \bigoplus_{\sigma:\Delta_q \xrightarrow{\mathcal{C}^\infty} X} \mathbb{Z}.\sigma$$

Ce complexe, en passant à la cohomologie, donne les groupes de cohomologie singulière

$$H^{\cdot}_s(X)$$

Enfin, on dispose d'un morphisme de complexes $\tau : \Omega^{\cdot}(X) \to C^q(X)$ obtenu en posant pour $q \in \mathbb{N}$, $f \in \Omega^q(X)$ et $\sigma \in C^q(X)$

$$\tau(f)(\sigma) = \langle f, \sigma \rangle = \int_\sigma f = \int_{\Delta^q} \sigma^* f$$

Le fait que τ soit bien un morphisme de complexe se traduit par

$$\langle df, \sigma \rangle = \langle f, \partial\sigma \rangle$$

ce qui découle d'un calcul immédiat et d'une application de la formule de Stokes.

On peut alors, une fois introduits ces trois objets, énoncer le théorème de de Rham.

Théorème 1. *Le morphisme de complexes $\tau : \Omega^{\cdot}(X) \to C^{\cdot}(X)$ est un quasi-isomorphisme de complexes.*

Nous allons présenter une démonstration de ce théorème qui repose sur la théorie des faisceaux et plus précisément sur la théorie de cohomologie des faisceaux. La partie suivante est donc consacrée à la présentation des axiomes d'une théorie de cohomologie des faisceaux et des propriétés utiles à la démonstration du théorème de de Rham qui découlent de cette définition.

2 Présentation axiomatique de la cohomologie des faisceaux

2.1 Généralités sur les faisceaux

Nous allons d'abord introduire les faisceaux via leur aspect "préfaisceaux", puis nous introduirons un autre point de vue possible, l'espace des germes, qui met plus en valeur l'aspect topologique de la définition des faisceaux, et qui permet de définir l'image d'un morphisme de faisceaux.

Soit X un espace topologique et R un anneau commutatif. On note $\mathcal{O}_X$ la catégorie dont les objets sont des ouverts de X, et si U et V sont des ouverts de X, $Hom(U,V)$ est un singleton si $V \subset U$ et vide sinon.

2.1.1 Définition via la notion de préfaisceau

Définition 1. *On appelle préfaisceau de R-modules sur X un foncteur*

$$F : \mathcal{O}_X \to R - Mod$$

La donnée d'un préfaiseau F de R-modules sur X est donc la donnée d'un R-module pour chaque ouvert de X ainsi que d'une application $F(U) \to F(V)$ pour tous modules $U \subset V$.

Si $V \subset U$ sont des ouverts de X et si $f \in F(U)$, par analogie avec les fonctions définies sur X, on note $f|_V$ et on appelle restriction de f à V l'image de f par le morphisme de R-modules $F(U \to V)$.

Définition 2. *Si F, G sont des préfaiseaux de R-modules sur X, on appelle morphisme de préfaiseaux une transformation naturelle de F vers G.*

Un morphisme de préfaisceaux de F vers G est donc la donnée d'un morphisme de R-modules $F(U) \to G(U)$ pour tout ouvert U de X, qui commutent à la restriction.

Par exemple, si M est un R-module, les ensembles d'applications des ouverts de X vers M, munis de la restriction usuelle des applications, forme un préfaisceau de R-modules sur X. Si N est un autre R-module et $\phi : M \to N$ un morphisme de R-modules, alors ϕ induit un morphisme de préfaisceaux du faisceau des applications des ouverts de X vers M vers les applications des ouverts de X vers N.

De même, pour $q \in \mathbb{N}$, les ensembles de q-cochaînes singulières $C^q(U)$ pour U ouvert de X, avec la restriction usuelle des applications, forment un préfaisceau de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, et les différentielles $d : C^q(U) \to C^{q+1}(U)$ donnent un morphisme de préfaisceaux entre les $C^q(U)$ et les $C^{q+1}(U)$.

On peut alors définir les faisceaux comme des préfaisceaux vérifiant une propriété de recollement et une propriété de détermination locale.

Définition 3. *On applelle faisceau de R-modules sur X un préfaisceau $\mathcal{F}$ de R-modules sur X vérifiant les deux propriétés suivantes :*

1. *Si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts de X et $(f_i)_{i\in I}$ une famille telle que $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ et pour $i, j \in I$, $f_j|U_i \cup U_j = f_j|U_i \cup U_j$, alors il existe $f \in \mathcal{F}\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right)$ telle que pour $i \in I$, $f|_{U_i} = f_i$. (recollement)*
2. *Si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts de X et $f, g \in \mathcal{F}\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right)$ telles que pour tout $i \in I$, $f|_{U_i} = g|_{U_i}$, alors $f = g$. (détermination locale)*

Par exemple, les applications d'un ouvert de X à valeurs dans un R-module est un faisceau, mais pas les cochaînes singulières des ouverts de X, qui ne vérifient pas la propriété de détermination locale. Si X est une variété, alors l'existence de partitions de l'unité sur X permet au préfaisceau des fonctions lisses sur X (qui vérifie trivialement la condition de détermination locale), de vérifier la condition de recollement, et donc d'être un faisceau.

2.1.2 Espace des germes, faisceautisation

Un faisceau peut également être vu comme l'espace topologique des germes de ses "fonctions". Ce point de vue permet de mettre en oeuvre un processus de "faisceautisation", c'est-à-dire la construction, pour chaque préfaisceau F, d'un faisceau qui est le faisceau "le plus proche" de F. C'est ce point de vue "espace des germes" que nous allons à présent exposer.

Soit F un préfaisceau de R-modules et $x \in X$. On définit l'ensemble F_x des germes de F en x comme

$$F_x = \left(\bigsqcup_{x\in U \text{ ouvert de } X} F(U) \right) \Big/ \sim$$

avec $f \sim g$ s'il existe un voisinage ouvert U de x tel que $f|_U = g|_U$. Si U ouvert de X et $f \in F(U)$, on appelle germe de f en x et note f_x la classe de f dans F_x.

On appelle alors espace des germes de F et nous noterons E_F l'ensemble $\bigcup_{x\in X} F_x$, muni de la topologie induite en prenant comme base d'ouverts les ensembles

$$W_{U,f} = \{f_x, x \in U\}$$

pour U ouvert de X et $f \in F(U)$. Ainsi, deux germes sont proches l'un de l'autre si ce sont deux germes d'une même fonction f, en deux points qui sont eux-mêmes proches l'un de l'autre. Il faut cependant vérifier que les $W_{U,f}$ définissent bien une base d'ouverts, ce qui est le cas car on a l'égalité pour U, V ouverts de X, $f \in F(U)$ et $g \in F(V)$:

$$W_{U,f} \cap W_{V,g} = \bigcup_{x\in U\cap V, f_x = g_x} W_{f|_{U_x}, U_x}$$

où pour $x \in U \cap V$ tel que $f_x = g_x$, U_x est un ouvert de $U \cap V$ tel que $f|_{U_x} = g|_{U_x}$.

Posant $\pi : E_F \to X$ tel que pour $f_x \in E_F$, $\pi(f_x) = x$, on voit immédiatement que π est surjective. C'est de plus un homéomorphisme local. En effet, si $f_x \in E_F$ avec $x \in U$ ouvert de X et $f \in F(U)$, π induit une bijection de $W_{U,f}$ (qui est un voisinage ouvert de x dans E_F) sur U, et il est immédiat de voir que cette bijection est continue et ouverte, donc que c'est un homéomorphisme.

Par ailleurs, pour $x \in X$, $F_x = \pi^{-1}(x)$ est muni d'une structure de R-module en posant $f_x + g_x = (f+g)_x$ et $\lambda f_x = (\lambda f)_x$. On vérifie que les opérations du R-module F_x sont continues pour la topologie de E_F.

Donnons-nous à présent un espace topologique E muni des attributs que nous venons de construire pour l'espace de germes E_F, c'est-à-dire d'un homéomorphisme local $\pi : E \to X$ et de structures de R-modules sur les fibres $\pi^{-1}(x)$ dont les opérations sont continues. On obtient alors un faisceau $\mathcal{F}_E$ en définissant $\mathcal{F}_E(U)$ comme le module des applications continues $f : U \to E$ telles que $\pi f = id_X$ et en prenant la restriction usuelle des fonctions comme restriction sur $\mathcal{F}_E$. La continuité des opérations sur les fibres $\pi^{-1}(x)$ permet d'associer des structures de R-modules aux $\mathcal{F}_E(U)$, faisant de $\mathcal{F}_E$ un préfaisceau sur X. Les propriétés de recollement et de détermination locale sont par ailleurs immédiatement vérifiées, et font de $\mathcal{F}_E$ un faisceau.

Définition 4. *Si F est un préfaisceau de R-modules sur X, on appelle faisceautisé de F le faisceau $\mathcal{F}_{E_F}$ associé à l'espace des germes de F.*

On définit de façon canonique un morphisme de faisceaux ϕ de F vers son faisceautisé en posant pour U ouvert de X et $f \in F(U)$

$$\phi_U(f) : x \in U \mapsto f_x \in \mathcal{F}_{E_F}$$

On remarque que $\phi_U(f)$ est l'inverse de $\pi|_{W_{U,f}}$, ce qui donne que $\phi_U(f)$ est, comme annoncé, dans $\mathcal{F}_{E_F}$. Il est immédiat que ϕ_U est un morphisme de R-modules et commute à la restriction. Il découle de cela que pour toute section $s \in \mathcal{F}(U)$, il existe une famille d'ouverts (U_i) telle que $U = \bigcup U_i$ et $\pi|_{U_i} = \phi_{U_i}(f_i)$ pour un certain $f_i \in F(U_i)$.

On voit également que F a de plus la propriété de détermination locale (resp. de recollement) si et seulement si ϕ_U est une injection (resp. une surjection) pour tout ouvert U de X. Ainsi, si F est un faisceau, ϕ est un isomorphisme de faisceaux.

On a alors que le faisceautisé de F, relié à F par ϕ est le "faisceau le plus proche de F" au sens de la proposition suivante. On appelle support d'un morphisme de préfaisceaux $\phi : F \to G$ et on note $supp(\phi)$ l'adhérence de l'ensemble des points $x \in X$ tels que l'application induite par ϕ sur F_x est non nulle, c'est-à-dire l'adhérence des points qui admettent un voisinage ouvert V tel que ϕ_V est non nulle.

Proposition 1. *Soit F un préfaisceau de R-modules sur X et $F \xrightarrow{\phi} \mathcal{F}_{E_F}$ son faisceautisé. Pour tout morphisme de préfaisceaux $F \xrightarrow{\psi} \mathcal{G}$ tel que $\mathcal{G}$ est un faisceau, il existe un unique morphisme $\mathcal{F}_{E_F} \xrightarrow{\tilde{\psi}} \mathcal{G}$ tel que $\psi = \tilde{\psi}\phi$.*

De plus on a $supp(\tilde{\phi}) = supp(\phi)$, et si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille localement finie d'ouverts de X et $(\theta_i)_{i\in I}$ une famille de morphismes de F vers un faisceau $\mathcal{G}$ telle que $supp(\theta_i) \subset U_i$, alors $\widetilde{\sum_{i\in I} \theta_i} = \sum_{i\in I} \tilde{\theta}_i$

En effet, l'unicité de $\tilde{\psi}$ vient de la surjectivité locale de ϕ : si U est un ouvert de X et $s \in \mathcal{F}_{E_F}(U)$, on peut se donner (U_i) famille d'ouverts et $f_i \in F(U_i)$ avec $s|_{U_i} = \phi_{U_i}(f_i)$. On en déduit que $\tilde{\psi}(s)|_{U_i} = \psi(f_i)$, ce qui donne l'unicité de $\tilde{\psi}$ comme $\mathcal{G}$ satisfait la propriété de détermination locale. L'existence de $\tilde{\psi}$, quant à elle, provient du fait que si U ouvert de X et $f, g \in F(U)$, alors si $\phi_U(f) = \phi_U(g)$, on a que $f_x = g_x$ pour $x \in U$, d'où l'on déduit $\phi(f)_x = \psi(g)_x$, et la propriété de recollement de $\mathcal{G}$ permet de conclure $\psi_U(f) = \psi_U(g)$: on peut donc bien poser $\tilde{\psi}(\phi_U(f)) = \psi_U(f) = \psi_U(g)$, l'image d'un recollement étant le recollement des images. On vérifie aisément qu'on obtient ainsi un morphisme de faisceaux.

Le fait que $supp(\tilde{\phi}) = supp(\phi)$ vient du fait que si ϕ s'annule sur un ouvert U, vue l'expression qu'on a donnée pour $\tilde{\psi}$, cette dernière s'annule également sur U. L'additivité de $\psi \mapsto \tilde{\psi}$ est immédiate vue l'expression donnée pour $\tilde{\psi}$.

Remarquons que si E est un espace topologique muni d'un difféomorphisme local $\pi : E \to X$ dont les fibres sont munies de structures de R-modules telles que les opérations soient continues, on a un homéomorphisme de l'espace des germes de $\mathcal{F}_E$ vers E qui commute avec les projections sur X et induit des isomorphismes de R-modules sur les fibres des projections, en posant

$$\Phi(s_x) = s(x)$$

Ainsi, il y a équivalence entre la vision des faisceaux comme des préfaisceaux particuliers et la vision des faisceaux via l'espace des germes.

Donnons-nous à présent $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux faisceaux de R-modules sur X ainsi qu'un morphisme de faisceaux

$$\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$$

On voudrait définir l'image et le noyau de ψ dans la catégorie des faisceaux. Remarquons que l'on obtient des préfaisceaux

$$Ker(\phi) : U \mapsto Ker(\phi_U)$$

et

$$\phi(\mathcal{F}) : U \mapsto Im(\phi_U)$$

Le fait que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ satisfassent la propriété de détermination locale donne que $Ker(\phi)$ et $\phi(\mathcal{F})$ la satisfont également. De plus, la détermination locale pour $\mathcal{G}$ donne également le recollement pour $Ker(\phi)$. En revanche, $\phi(\mathcal{F})$ ne satisfait pas nécessairement la propriété de détermination locale et n'est donc pas toujours un faisceau. On appelle donc $Im(\phi)$ le faisceautisé de $\phi(\mathcal{F})$. Comme $\phi(\mathcal{F})$ est un sous-faisceau de $\mathcal{G}$ satisfaisant la propriété de détermination locale, la proposition 1 permet d'affirmer que $Im\phi$ est le plus petit sous-faisceau de $\mathcal{G}$ contenant $\phi(\mathcal{F})$.

On note $\Gamma(X, .)$ le foncteur de la catégorie des faisceaux de R-modules sur X vers R-mod qui à un faisceau $\mathcal{F}$ associe le module $\Gamma(X, \mathcal{F})$ de ses sections globales. La remarque que l'on vient de faire sur l'image d'un morphisme nous dit que si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des faisceaux et $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux, le morphisme induit de $\Gamma(X,\mathcal{F})$ vers $\Gamma(X,\mathcal{G})$ n'est pas nécessairement surjectif. Cependant, si ϕ est injectif, ϕ induit bien un morphisme injectif $\Gamma(X,\mathcal{F}) \to \Gamma(X,\mathcal{G})$, ce qui revient à dire que le foncteur $\Gamma(X,.)$ est exact à gauche.

2.2 Définition axiomatique de la cohomologie des faisceaux

On a vu que pour un morphisme surjectif de faisceaux de R-modules $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$, le morphisme de R-modules induit $\Gamma(X,\mathcal{F}) \to \Gamma(X,\mathcal{G})$ n'est pas nécessairement surjectif. On introduit la cohomologie des faisceaux, qui permet de mesurer le défaut de surjectivité de ce dernier morphisme.

Définition 5. *Une théorie de cohomologie des faisceaux de R-modules sur X est la donnée*

(i) D'un foncteur $H^q(X,.)$ pour tout $q \in \mathbb{N}$ de la catégorie des faisceaux de R-modules sur X vers la catégorie des R-modules.

(ii) Pour toute suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$$

et tout $q \in \mathbb{N}$, d'un morphisme

$$H^q(X,\mathcal{F}'') \xrightarrow{\partial} H^{q+1}(X,\mathcal{F}')$$

(iii) D'un isomorphisme de foncteurs

$$H^0(X,.) \xrightarrow{\sim} \Gamma(X,.)$$

tels que

1. *Pour toute suite exacte courte*

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$$

la suite

$$H^0(X,\mathcal{F}') \to H^0(X,F) \to H^0(X,\mathcal{F}'') \xrightarrow{\partial} H^1(X,\mathcal{F}') \to H^1(X,F) \to \dots$$

est exacte

2. *Pour tout morphisme de suites exactes courtes*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{F}' & \to & \mathcal{F} & \to & \mathcal{F}'' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathcal{G}' & \to & \mathcal{G} & \to & \mathcal{G}'' & \to & 0 \end{array}$$

le diagramme induit pour $q \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{ccc} H^q(X,\mathcal{F}) & \xrightarrow{\partial} & H^{q+1}(X,\mathcal{F}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^q(X,\mathcal{G}) & \xrightarrow{\partial} & H^{q+1}(X,\mathcal{G}) \end{array}$$

est commutatif.

La suite exacte longue associée à la suite exacte courte permet de mesurer le défaut de surjectivité de $\Gamma(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\phi} \Gamma(X,\mathcal{G})$ pour un morphisme $\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G}$ surjectif. En effet, en posant $K = Ker(\phi)$, on a une suite exacte courte

$$0 \to K \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$$

En passant en cohomologie, on obtient que la suite

$$0 \to \Gamma(X,K) \to \Gamma(X,\mathcal{F}) \to \Gamma(X,\mathcal{G}) \to H^1(X,K) \to \cdots$$

est exacte. La non-nullité des $H^q(X,.)$ pour $q \geq 1$ est donc un symptôme du fait de $\Gamma(X,\mathcal{F}) \to \Gamma(X,\mathcal{G})$ n'est pas surjectif.

Nous allons à présent énoncer un résultat qui d'une part explicite un peu plus le lien entre cohomologie des faisceaux et foncteur $\Gamma(X,.)$, et d'autre part constitue le principal ingrédient de la preuve du théorème de de Rham. Supposons donnée un théorie de cohomologie des faisceaux $H^\cdot(X,.)$, et précisons que si $\mathcal{F}$ est un faisceau, on dit que $\mathcal{F}$ est acyclique (pour cette théorie) si pour $q \geq 1$, $H^q(X,\mathcal{F}) = 0$. Par ailleurs, on appelle une résolution de $\mathcal{F}$ une suite exacte de faisceaux

$$\mathcal{C}^0 \to \mathcal{C}^1 \to \mathcal{C}^2 \to \cdots$$

telle que

$$Ker(\mathcal{C}^0 \to \mathcal{C}^1) = \mathcal{F}$$

Théorème 2. *(De Rham-Weil) Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de R-modules sur X, et supposons données deux résolutions de $\mathcal{F}$ par des faisceaux acycliques, avec un morphisme de résolutions :*

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{F} & \to & \mathcal{C}^0 & \to & \mathcal{C}^1 & \to & \mathcal{C}^2 & \cdots \\
\| & & \downarrow\phi & & \downarrow\phi & & \downarrow\phi & \\
\mathcal{F} & \to & \mathcal{D}^0 & \to & \mathcal{D}^1 & \to & \mathcal{D}^2 & \cdots
\end{array}$$

Alors les groupes de cohomologie du faisceau $\mathcal{F}$ sont isomorphes aux groupes de cohomologie du complexe induit $\Gamma(X,\mathcal{C}^\cdot)$ (de même pour le complexe $\Gamma(X,\mathcal{D}^\cdot)$), de façon compatible avec le morphisme de résolutions ϕ, c'est-à-dire qu'on a un diagramme commutatif pour tout $q \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{ccc}
H^q(X,\mathcal{F}) & \to & H^q(\Gamma(X,\mathcal{C}^\cdot)) \\
\| & & \downarrow\phi^* \\
H^q(X,\mathcal{F}) & \to & H^q(\Gamma(X,\mathcal{D}^\cdot))
\end{array}$$

En effet, posons

$$\begin{cases} K^i & = Ker(\mathcal{C}^i \to \mathcal{C}^{i+1}) = Im(\mathcal{C}^{i-1} \to \mathcal{C}^i) \\ L^i & = Ker(\mathcal{D}^i \to \mathcal{D}^{i+1}) = Im(\mathcal{D}^{i-1} \to \mathcal{D}^i) \end{cases}$$

On a alors deux suites exactes courtes

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \to & K^i & \to & \mathcal{C}^i & \to & K^{i+1} \to 0 \\
 & & \downarrow\phi & & \downarrow\phi & & \downarrow\phi \\
0 & \to & L^i & \to & \mathcal{D}^i & \to & L^{i+1} \to 0
\end{array}$$

avec de plus $K^0 = L^0 = \mathcal{F}$ et $\phi : K^0 \to L^0$ est l'identité de $\mathcal{F}$. On en déduit des suites exactes longues en cohomologie

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \to & H^q(X,\mathcal{C}^i) & \to & H^q(X,K^{i+1}) & \to & H^{q+1}(X,K^i) & \to & H^{q+1}(X,\mathcal{C}^i) & \to \cdots \\
 & & \downarrow \phi^* & & \downarrow \phi^* & & \downarrow \phi & & \downarrow \phi^* & \\
\cdots & \to & H^q(X,\mathcal{D}^i) & \to & H^q(X,L^{i+1}) & \to & H^{q+1}(X,L^i) & \to & H^{q+1}(X,\mathcal{D}^i) & \to \cdots
\end{array}$$

Comme les $\mathcal{C}^i$ et les $\mathcal{D}^i$ sont acycliques, on en déduit pour $q \geq 1$ les isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc}
H^q(X,K^{i+1}) & \xrightarrow{\sim} & H^{q+1}(X,K^i) \\
\downarrow \phi^* & & \downarrow \phi^* \\
H^q(X,L^{i+1}) & \xrightarrow{\sim} & H^{q+1}(X,L^i)
\end{array}$$

puis, par récurrence :

$$\begin{array}{ccc}
H^q(X,K^0) & \xrightarrow{\sim} & H^1(X,K^{q-1}) \\
\downarrow \phi^* & & \downarrow \phi^* \\
H^q(X,L^0) & \xrightarrow{\sim} & H^1(X,L^{q-1})
\end{array}$$

avec $K^0 = L^0 = \mathcal{F}$. De plus, les suites exactes longues donnent en $q = 0$ les suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
\Gamma(X,\mathcal{C}^i) & \to & \Gamma(X,K^{i+1}) & \xrightarrow{\partial} & H^1(X,K^i) & \to & 0 \\
\downarrow \phi^* & & \downarrow \phi^* & & \downarrow \phi^* & & \\
\Gamma(X,\mathcal{D}^i) & \to & \Gamma(X,L^{i+1}) & \xrightarrow{\partial} & H^1(X,L^i) & \to & 0
\end{array}$$

Par le théorème d'isomorphisme, les ∂ induisent des isomorphismes

$$\begin{array}{cccc}
H^{i+1}(\Gamma(X,\mathcal{C}^\cdot)) = & \frac{\Gamma(X,K^{i+1})}{Im(\Gamma(X,\mathcal{C}^i)\to\Gamma(X,K^{i+1}))} & \xrightarrow{\sim} & H^1(X,K^i) \\
 & \downarrow \phi^* & & \downarrow \phi^* \\
H^{i+1}(\Gamma(X,\mathcal{D}^\cdot)) = & \frac{\Gamma(X,L^{i+1})}{Im(\Gamma(X,\mathcal{D}^i)\to\Gamma(X,L^{i+1}))} & \xrightarrow{\sim} & H^1(X,L^i)
\end{array}$$

d'où l'on déduit le diagramme recherché pour $q \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{ccc}
H^q(X,\mathcal{F}) & \to & H^q(\Gamma(X,\mathcal{C}^\cdot)) \\
\| & & \downarrow \phi^* \\
H^q(X,\mathcal{F}) & \to & H^q(\Gamma(X,\mathcal{D}^\cdot))
\end{array}$$

3 Construction d'une théorie de cohomologie des faisceaux

Nous allons construire dans cette partie une théorie de cohomologie des faisceaux dans le cas où X est une variété et où les faisceaux considérés sont des faisceaux de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

Pour cela, nous allons faire usage du produit tensoriel de deux faisceaux. Pour $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ des faisceaux, on peut considérer le préfaisceau induit par le produit tensoriel des sections :

$$P : U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes \mathcal{G}(U)$$

On appelle produit tensoriel de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ le faisceautisé de P.

Comme les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels sont plats, on a que que pour tout faisceau $\mathcal{F}$ de R-espaces vectoriels sur X que le foncteur $. \otimes \mathcal{F}$ est exact : si

$$0 \to \mathcal{G}' \to \mathcal{G} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G}'' \to 0$$

est une suite exacte courte de faisceaux, alors on a une suite exacte courte :

$$0 \to \mathcal{G}' \otimes \mathcal{F} \to \mathcal{G} \otimes \mathcal{F} \xrightarrow{\phi \otimes id} \mathcal{G}'' \otimes \mathcal{F} \to 0$$

3.1 Stratégie pour la construction de la théorie de cohomologie

Supposons donnée une classe de "bons" faisceaux de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels sur X, telle que si $\mathcal{F}$ est un "bon" faisceau, les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. Si
$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{G}' \to 0$$
est une suite exacte courte, alors on a une suite exacte courte
$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{G}) \to \Gamma(X, \mathcal{G}') \to 0$$
2. Pour tout faisceau $\mathcal{G}$, le faisceau $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ est "bon".

Notons $\underline{\mathbb{R}}$ le faisceau localement constant, c'est-à-dire le faisceau tel que $\underline{\mathbb{R}}(U)$ est l'espace vectoriel des fonctions localement constantes sur U pour U ouvert de X.

Supposons également donnée une résolution $\mathcal{C}^{\cdot}$ du faisceau constant $\underline{R}$ par de "bons" faisceaux, c'est-à-dire une suite exacte

$$0 \to \underline{\mathbb{R}} \to \mathcal{C}^0 \to \mathcal{C}^1 \to \cdots$$

où les $\mathcal{C}^q$ sont bons. Alors pour tout faisceau $\mathcal{F}$, on obtient un complexe de "bons" faisceaux

$$\mathcal{C}^0 \otimes \mathcal{F} \to \mathcal{C}^1 \otimes \mathcal{F} \to \cdots$$

puis un complexe de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels

$$\Gamma(X, \mathcal{C}^0 \otimes \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{C}^1 \otimes \mathcal{F}) \to \cdots$$

Remarquons de plus que comme $. \otimes \mathcal{F}$ est exact et $\Gamma(X, .)$ est exact à gauche, on a que la suite

$$0 \to \Gamma(X, \underline{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{C}^0 \otimes \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{C}^1 \otimes \mathcal{F})$$

est exacte, puis comme $\underline{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{F} = \mathcal{F}$

$$\Gamma(X, \mathcal{F}) = Ker\left(\Gamma(X, \mathcal{C}^0 \otimes \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{C}^1 \otimes \mathcal{F})\right) = H^0(\Gamma(X, \mathcal{C}^{\cdot} \otimes \mathcal{F}))$$

Cela fait des foncteurs $\mathcal{F} \mapsto H^q(\Gamma(X, \mathcal{C}^\cdot \otimes \mathcal{F}))$ pour $q \in \mathbb{N}$ de bons candidats pour constituer une théorie de cohomologie des faisceaux. Pour montrer que c'est effectivement le cas, il suffit de voir que si

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{F}' & \to & \mathcal{F} & \to & \mathcal{F}'' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathcal{G}' & \to & \mathcal{G} & \to & \mathcal{G}'' & \to & 0 \end{array}$$

sont des suites exactes courtes reliées par un morphisme de suites exactes courtes, on a des morphismes ∂ pour $q \in \mathbb{N}$ comme dans le diagramme ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} H^q(\Gamma(X, \mathcal{C}^\cdot \otimes \mathcal{F}'')) & \xrightarrow{\partial} & H^{q+1}(\Gamma(X, \mathcal{C}^\cdot \otimes \mathcal{F})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^q(\Gamma(X, \mathcal{C}^\cdot \otimes \mathcal{G}'')) & \xrightarrow{\partial} & H^{q+1}(\Gamma(X, \mathcal{C}^\cdot \otimes \mathcal{G})) \end{array}$$

tels que ce diagramme commute pour $q \in \mathbb{N}$ et tels que les deux suites longues induites par les ∂ pour $\mathcal{F}$ et pour $\mathcal{G}$ soient exactes.

Pour avoir l'existence de ces ∂, il suffit de voir que pour toute suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$$

la suite de complexes induite

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{C}^\cdot \otimes \mathcal{F}') \to \Gamma(X, \mathcal{C}^\cdot \otimes \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{C}^\cdot \otimes \mathcal{F}'') \to 0$$

est exacte. L'existence des ∂ et les propriétés qu'on leur veut viendront alors de la suite exacte longue associée à toute suite exacte courte en cohomologie et de la fonctorialité de celle-ci.

Or l'exactitude de

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{C}^\cdot \otimes \mathcal{F}') \to \Gamma(X, \mathcal{C}^\cdot \otimes \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{C}^\cdot \otimes \mathcal{F}'') \to 0$$

découle immédiatement de l'exactitude des $\mathcal{C}^q \otimes .$ et du fait que les $\mathcal{C}^q$, donc les $\mathcal{C}^q \otimes \mathcal{F}'$ sont de "bons" foncteurs.

Remarquons au passage que si $\mathcal{F}$ est un "bon" faisceau, alors $\mathcal{F}$ est acyclique pour la théorie de cohomologie des faisceaux que nous venons de construire. En effet, en notant $K^i = Ker(\mathcal{C}^i \to \mathcal{C}^{i+1}) = Im(\mathcal{C}^{i-1} \to \mathcal{C}^i)$, on a que

$$0 \to K^i \to \mathcal{C}^i \to K^{i+1} \to 0$$

est une suite exacte courte, donc comme $. \otimes \mathcal{F}$ est exact et $K^i \otimes \mathcal{F}$ est "bon"

$$0 \to \Gamma(X, K^i \otimes \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{C}^i \otimes \mathcal{F}) \to \Gamma(X, K^{i+1} \otimes \mathcal{F}) \to 0$$

est exacte, ce qui permet de conclure.

Pour avoir l'existence d'une théorie de cohomologie des faisceaux, il nous reste donc à trouver une classe de "bons" faisceaux satisfaisant les deux propriétés énoncées plus haut, ainsi qu'une résolutions du faisceau constant $\underline{\mathbb{R}}$ par des faisceaux de cette classe.

3.2 Faisceaux fins

Le but de cette section est de trouver une propriété qui définisse une classe de "bons" faisceau telle que celle qu'on a supposée donnée à la section précédente.

Soit $\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels sur X. On cherche une condition suffisante sur $Ker(\phi)$ pour que ϕ induise une surjection $\Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{G})$ et on veut que cette condition se transmette au produit tensoriel $Ker(\phi) \otimes \mathcal{F}'$ pour tout faisceau $\mathcal{F}'$.

La surjectivité de ϕ signifie que pour $g \in \Gamma(X, \mathcal{G})$, il existe $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert (que l'on peut supposer localement fini car X est à base dénombrable) et $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tels que pour $i \in I$, $g|_{U_i} = \phi(f_i)$. On a alors pour $i, j \in I$, $f_i - f_j \in Ker(\phi)(U_i \cup U_j)$ mais $f_i - f_j$ n'est pas nécessairement nul, ce qui empêche de les recoller pour trouver un antécédent à g.

On va essayer de "corriger" les f_i en $\tilde{f}_i = f_i + \delta_i$ tels que $\phi(\tilde{f}_i) = \phi(f_i) = g|_{U_i}$ et $\tilde{f}_i - \tilde{f}_j = 0$ pour tout $i, j \in I$. Cela revient à trouver $\delta_i \in Ker(\phi)(U_i)$ tel que $\delta_i - \delta_j = f_j - f_i$ pour $i, j \in I$. Si on y arrive, il suffira de recoller les $\tilde{f}_i$ pour obtenir un antécédent de g dans $\Gamma(X, \mathcal{F})$

Procédons à un calcul formel, pour voir si on peut trouver de tels δ_i, et si oui, comment. On voudrait, en posant $\alpha_{ij} = f_j - f_i \in Ker(\phi)(U_i \cap U_j)$:

$$\sum_j (\delta_i - \delta_j) = \sum_j \alpha_{ij}$$

pour $i \in I$, d'où

$$|I|\delta_i = \sum_j \alpha_{ij} + \sum_j \delta_j$$

Seules les valeurs des $\delta_i - \delta_j$ nous importent, on peut donc supposer

$$\sum_j \delta_j = 0$$

On voudrait donc poser pour $i \in I$:

$$\delta_i = \frac{1}{|I|} \sum_j \alpha_{ij}$$

On voit que l'on pourrait rendre ce calcul valide (c'est-à-dire essentiellement sommer les α_{ij}) si l'on disposait de partitions de l'unité dans le faisceau $Ker(\phi)$ où vivent les α_{ij}.

Définition 6. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels sur X. On dit que $\mathcal{F}$ est fin si pour tout recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ localement fini de $\mathcal{F}$, il existe des endomorphismes*

$$\theta_i : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$$

vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) Pour tout $i \in I$, $supp(\theta_i) \subset U_i$

(ii) $\sum_{i\in I} \theta_i = id$
Une telle famille $(\theta_i)_{i\in I}$ est appelée une partition de l'unité de $\mathcal{F}$ subordonnée au recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$.

Remarquons que si $\mathcal{F}$ est fin et $\mathcal{G}$ un faisceau quelconque, la famille $\theta_i \otimes id_{\mathcal{G}}$ est une partition de l'unité du faisceau $\mathcal{F}\otimes\mathcal{G}$ subordonnée aux U_i, donc $\mathcal{F}\otimes\mathcal{G}$ est un faisceau fin. La classe des faisceau fins satisfait donc à la deuxième condition requise pour la classe des "bons" faisceaux demandés à la section précédente.

Revenons à présent à l'étude de l'endomorphisme

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G}$$

Reprenons les notations introduites avant la définition 6 et supposons que le faisceau $Ker(\phi)$ soit fin. Soit donc $(\theta_i)_{i\in I}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement ouvert localement fini $(U_i)_{i\in I}$. Voyons comment faire marcher le calcul formel avec ces outils.

Pour $i, j \in I$, on peut prolonger $\theta_i(\alpha_{ij})$ à U_i tout entier en recollant $\theta_j(\alpha_{ij})$ et la section nulle de $U_i \backslash supp(\theta_j)$. Le calcul formel devient alors valide en posant pour $i \in I$

$$\delta_i = \sum_{j\in I} \theta_j(\alpha_{ij}) \in Ker(\phi)(U_i)$$

On a alors pour $i, j \in I$:

$$\delta_i - \delta_j = \sum_{k\in I} \theta_k(\alpha_{ik}) + \sum_{k\in I} \theta_k(\alpha_{kj}) = \sum_{k\in I} \theta_k(\alpha_{ij})$$

donc les δ_i satisfont les conditions suffisantes qui pesaient sur eux pour qu'on ait un antécédent à $g \in \Gamma(X, \mathcal{G})$ dans $\Gamma(X, \mathcal{F})$.

3.3 Existence d'une théorie de cohomologie des faisceaux

On a donc montré que si $Ker(\phi)$ est un faisceau fin, ϕ induit un morphisme surjectif $\Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{G})$. La classe des faisceaux fins satisfait donc également la première propriété des "bons" faisceaux de la section précédente. Ainsi, d'après la section précédente, il nous suffit de disposer d'une résolution du faisceau constant $\underline{\mathbb{R}}$ par des faisceaux fins pour disposer d'une théorie de cohomologie des faisceaux. Cette résolution nous est donnée par la proposition suivante. Remarquons tout d'abord que la restriction à un ouvert U de X des formes différentielles sur X permet de munir, pour $q \in \mathbb{N}$, l'ensemble des formes différentielles de degré q $\Omega^q(X)$ d'une structure de préfaisceau dont il est très aisé de voir que c'est un faisceau. On note Ω^q_X ce faisceau. De plus comme la différentielle extérieure d commute avec la restriction, on obtient un complexe de faisceaux :

$$\Omega^0_X \xrightarrow{d} \Omega^1_X \xrightarrow{d} \Omega^2_X \xrightarrow{d} \cdots$$

Proposition 2. *Le complexe de de Rham*

$$\Omega^0_X \xrightarrow{d} \Omega^1_X \xrightarrow{d} \Omega^2_X \xrightarrow{d} \cdots$$

est une résolution du faisceau constant $\underline{\mathbb{R}}$ par des faisceaux fins.

En effet, les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ définies sur un ouvert de X de différentielles nulle sont bien les fonctions localement constantes, donc

$$Ker(\Omega_X^0 \to \Omega_X^1) = \underline{\mathbb{R}_X}$$

Soit maintenant $q \geq 1$ et montrons que la suite

$$\Omega_X^{q-1} \to \Omega_X^q \to \Omega_X^{q+1}$$

est exacte. Il s'agit de montrer que si V est un ouvert de X et $f \in \Omega_X^q(V)$ avec $df = 0$, pour tout $x \in V$ il existe un ouvert $U \subset V$ contenant x et $g_U \in \Omega_X^q(U)$ tels que

$$f|_U = d(g_U)$$

Prenons $U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^n$ une carte de X avec U un voisinage ouvert de x contenu dans V et tel que $\phi(U)$ est une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$. On a alors $d(\phi^{-1*}f|_U) = 0$, donc comme $H_{dR}^q(B) = 0$, il existe $g \in \Omega^{q-1}(\phi(U))$ telle que $dg = \phi^{-1*}f|_U$. Il suffit alors pour conclure de remarquer que $\phi^* g \in \Omega_X^{q-1}(U)$ et

$$d(\phi * g) = \phi^* \phi^{-1*} f|_U = f|_U$$

ce qui permet de conclure que

$$\Omega_X^0 \xrightarrow{d} \Omega_X^1 \xrightarrow{d} \Omega_X^2 \xrightarrow{d} \cdots$$

est bien une résolution de $\underline{\mathbb{R}}$.

Le fait que les faisceaux Ω_X^q soient fins découle de l'existence de partitions de l'unité de X associées à chaque recouvrement ouvert localement fini de X. Pour obtenir une partition de l'unité sur Ω_X, il suffit de considérer les endomorphismes de faisceau donnés par la multiplication par les fonctions de la partition de l'unité.

Nous venons donc de terminer la démonstration du théorème suivant :

Théorème 3. *Pour toute variété X, il existe une théorie de cohomologie des faisceaux de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels sur X telle que les faisceaux fins soient acycliques.*

Le théorème de de Rham-Weil nous dit alors que si on dispose de deux théories de cohomologie des faisceaux $H^\cdot(X,.)$ et $\tilde{H}^\cdot(X,.)$ sur X et si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur X admettant une résolution

$$\mathcal{C}^0 \to \mathcal{C}^1 \to \mathcal{C}^2 \to \cdots$$

telle que les $\mathcal{C}^q$ sont acycliques à la fois dans la théorie $H^\cdot(X,.)$ et dans la théorie $\tilde{H}^\cdot(X,.)$, alors pour $q \in \mathbb{N}$ on a des isomorphismes :

$$H^q(X,\mathcal{F}) \simeq \tilde{H}^q(X,\mathcal{F})$$

En fait on dispose d'un théorème beaucoup plus général, que l'on n'abordera pas ici et qui n'intervient pas dans la preuve du théorème de de Rham-Weil, qui dit que deux théories de cohomologie des faisceaux sur X telles que tout faisceau admet une résolution par des acycliques sont égales à un unique isomorphisme près.

4 Démonstration du théorème de de Rham

Nous disposons à présent de tous les outils conceptuels nécessaires à la démonstration du théorème de de Rham, et nous consacrons cette partie à sa démonstration. Le point géométrique important de la démonstration est le suivant.

Si X est une variété et $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X, on introduit comme dans la première section les q-chaînes de X pour $q \in \mathbb{N}$:

$$C_q(X) = \bigoplus_{\sigma : \Delta_q \xrightarrow{\mathcal{C}^\infty} X} \mathbb{Z}.\sigma$$

et on note $C_q^{\mathcal{U}}(X)$ les q-chaînes $\mathcal{U}$-petites, c'est-à-dire l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont la base sont les fonctions lisses définies sur Δ_q et à valeurs dans un des U_i :

$$C_q^{\mathcal{U}}(X) = \bigoplus_{\substack{\sigma : \Delta_q \xrightarrow{\mathcal{C}^\infty} X \\ \exists i \in I, \sigma(\Delta_q) \subset U_i}} \mathbb{Z}.\sigma$$

Les $C_q^{\mathcal{U}}(X)$ forment un complexe de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. On va considérer dans la suite l'injection canonique

$$C_q^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{i} C_q(X)$$

qui est un morphisme de complexes.

Proposition 3. *(Théorème des petites chaînes) Si X est une variété et $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X, alors il existe un morphisme de complexes de degré 0 :*

$$k : C_.(X) \to C_.^{\mathcal{U}}(X)$$

et une application linéaire de degré 1

$$h : C_.(X) \to C_.(X)$$

tels que $i \circ k = id_{C_.^{\mathcal{U}}(X)}$ et $k \circ i = \partial h + h \partial$

Nous allons d'abord ramener, à l'aide de la cohomologie des faisceaux, le théorème de de Rham à la proposition 3, puis nous démontrerons cette dernière.

4.1 Conséquences de la cohomologie des faisceaux en lien avec le théorème de de Rham

Reprenons les notations de la première section. On dispose d'une part du complexe de de Rham

$$\Omega^0(X) \xrightarrow{d} \Omega^1(X) \xrightarrow{d} \cdots$$

dont nous avons vu qu'il peut être vu comme le complexe des sections globales d'une résolution acyclique (car fine) du faisceau constant $\underline{\mathbb{R}}_X$:

$$\Omega_X^0 \xrightarrow{d} \Omega_X^1 \xrightarrow{d} \Omega_X^2 \xrightarrow{d} \cdots$$

D'autre part, on a vu que le complexe des cochaînes singulières

$$C^0(X) \xrightarrow{d} C^1(X) \xrightarrow{d} \cdots$$

peut être vu comme un complexe de préfaisceaux, mais que les $C^q(X)$ ne satisfont pas la propriété de détermination locale et ne sont donc pas des faisceaux. Pour pouvoir tout de même appliquer la théorie que l'on a développée sur les faisceaux, on dispose de l'outil de faisceautisation. Considérons donc pour $q \in \mathbb{N}$ le faisceautisé $\mathcal{C}_X^q$ du faisceau C^q. La proposition 1 montre que la différentielle $C_X^q \xrightarrow{d} C_X^{q+1}$ induit de façon canonique une différentielle $\mathcal{C}_X^q \xrightarrow{d} \mathcal{C}_X^{q+1}$, qui fait de $\mathcal{C}_X^\cdot$ un morphisme de faisceaux et de la surjection canonique $C_X^\cdot \to \mathcal{C}_X^\cdot$ un morphisme de complexes.

$\tau : \Omega_X^q \to C_X^q$ induit donc un morphisme de complexes :

$$\begin{array}{ccccccc}
\Omega_X^0 & \xrightarrow{d} & \Omega_X^1 & \xrightarrow{d} & \Omega_X^2 & \xrightarrow{d} & \cdots \\
\downarrow \tau & & \downarrow \tau & & \downarrow \tau & & \\
\mathcal{C}_X^0 & \xrightarrow{d} & \mathcal{C}_X^1 & \xrightarrow{d} & \mathcal{C}_X^2 & \xrightarrow{d} & \cdots
\end{array}$$

Un premier pas vers le théorème de de Rham serait de montrer que ce dernier morphisme est un quasi-isomorphisme. Pour cela, d'après le théorème 2, il nous suffit de voir que la deuxième ligne du diagramme précédent est une résolution acyclique du faisceau constant $\underline{\mathbb{R}}_X$. C'est ce que nous allons montrer.

Tout d'abord, on a

$$Ker(\mathcal{C}_X^0 \xrightarrow{d} \mathcal{C}_X^1) = \underline{\mathbb{R}}_X$$

En effet, le préfaisceau C_X^0 s'identifie trivialement à l'ensemble $\mathbb{R}^X$ des fonctions de X dans $\mathbb{R}$ dont il est immédiat de voir que c'est un faisceau. Par conséquent, on a des isomorphismes canoniques $\mathcal{C}_X^0 \simeq C_X^0 \simeq \underline{\mathbb{R}}_X$. De plus pour $f \in \mathcal{C}^0(V)$, V ouvert de X, $df = 0$ si et seulement si pour $x \in X$, il existe un voisinage ouvert $U \subset V$ de x tel que $df|_U = 0$, c'est-à-dire pour $\sigma \in C_1(U)$

$$0 = f(\partial\sigma) = f(\sigma(1)) - f(\sigma(0))$$

ce qui revient à dire que f est constante sur chaque composante connexe par arc de U, c'est-à-dire $f \in \underline{\mathbb{R}}_X$.

Le fait que le complexe $\mathcal{C}_X^\cdot$ soit exact découle du fait que la cohomologie singulière d'une boule est nulle dès que le degré est ≥ 1, et admet une démonstration similaire à celle que nous avons présentée pour le complexe $(\Omega_X^\cdot)$. Nous allons plutôt expliciter la preuve du fait que les $\mathcal{C}_X^q$ sont des faisceaux fins, sur laquelle nous sommes passés vite pour les Ω_X^q. Le fait que les $\mathcal{C}_X^q$ sont fins nous donnera leur caractère acyclique, dont nous avons besoin. Soit (U_i) un recouvrement ouvert localement fini de X. Il existe une partition de l'unité de X subordonnée aux $(U_i)_{i\in I}$ qu'on note $(\theta_i)_{i\in I}$ (il n'est en fait pas nécessaire que les θ_i soient lisses, ni même continues). Considérons les endomorphismes de préfaisceau

$$\begin{array}{rccc} l_i : & C_X^q & \to & C_X^q \\ & f & \mapsto & (\sigma \mapsto \theta_i(\sigma(0))f(\sigma)) \end{array}$$

D'après la proposition 1, notant $\phi : C_X^q \to \mathcal{C}_X^q$ le morphisme de faisceautisation, les l_i induisent des morphismes $\tilde{l_i} : \mathcal{C}_X^q \to \mathcal{C}_X^q$ tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} C_X^q & \xrightarrow{l_i} & C_X^q \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi \\ \mathcal{C}_X^q & \xrightarrow{\tilde{l_i}} & \mathcal{C}_X^q \end{array}$$

et on a de plus $supp(\tilde{l_i}) = supp(l_i)$ et

$$\sum_i \tilde{l_i} = \widetilde{\sum_i l_i} = i\tilde{d_{C_X^q}} = id_{\mathcal{C}_X^q}$$

ce qui achève de démontrer que $\mathcal{C}_X^q$ est un faisceau fin, donc acyclique.

Comme le morphisme de complexes τ induit l'identité sur $\mathbb{R}_X$, c'est un donc un morphisme de résolutions de $\mathbb{R}_X$ Nous pouvons donc à présent appliquer le théorème 2, qui nous donne un diagramme commutatif pour $q \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{ccc} H^q(X,\mathbb{R}_X) & \to & H^q(\Omega^q(X)) \\ \| & & \downarrow \tau^* \\ H^q(X,\mathbb{R}_X) & \to & H^q(\mathcal{C}^q(X)) \end{array}$$

d'où l'on déduit le lemme suivant :

Lemme 1. *le morphisme de complexes $\tau : \Omega^\cdot(X) \to \mathcal{C}^\cdot(X)$ est un quasi-isomorphisme.*

Il nous suffit à présent, pour avoir le théorème de de Rham, de montrer que le morphisme de faisceautisation $C_X^\cdot \to \mathcal{C}_X^\cdot$ induit un quasi-isomorphisme entre les complexes des sections globales : $C^\cdot(X) \to \mathcal{C}^\cdot(X)$.

Comme les préfaisceaux C_X^q satisfont la propriété de recollement, le morphisme $C^q(X) \to \mathcal{C}^q(X)$ est surjectif. En introduisant son noyau $C_0^q(X)$, on obtient une suite exacte courte

$$0 \to C_0^\cdot(X) \to C^\cdot(X) \to \mathcal{C}^\cdot(X) \to 0$$

à laquelle est associée une suite exacte longue en cohomologie, qui permet de voir que le morphisme $C^\cdot(X) \to \mathcal{C}^\cdot(X)$ est un quasi-isomorphisme si et seulement si on a pour $q \in \mathbb{N}$, $H^q(C_0^\cdot(X)) = 0$. Or $C_0^q(X)$ est constitué des sections f dont tous les germes sont nuls, c'est-à-dire telles qu'il existe un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de X tel que pour $i \in I$, $f|_{U_i} = 0$. On en déduit, en notant, pour $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert, $C_{0,\mathcal{U}}^q(X)$ l'ensemble des sections globales de C_X^q qui s'annulent sur tous les ouverts de $\mathcal{U}$:

$$C_0^q(X) = \bigcup_{\mathcal{U}} C_{0,\mathcal{U}}^q(X)$$

On voit alors que si $H^q(C^q_{0,\mathcal{U}}) = 0$ pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, alors tout cycle de $C^q_0(X)$, qui est un cycle dans un des $C^q_{0,\mathcal{U}}$, est un bord dans ce même ensemble et donc un bord dans $C^q_0(X)$. Donc il suffit pour avoir le théorème de de Rham, de montrer que pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, $H^q(C^q_{0,\mathcal{U}}) = 0$. En introduisant l'ensemble $C^q_{\mathcal{U}}$ des fonctions linéaires définies sur l'espace $C^{\mathcal{U}}_q$ des chaînes $\mathcal{U}$-petites, ainsi que le morphisme de restriction $R : C^q(X) \to C^q_{\mathcal{U}}(X)$, on obtient une suite exacte courte :

$$0 \to C^{\cdot}_{0,\mathcal{U}}(X) \to C^{\cdot}(X) \xrightarrow{R} \mathcal{C}^{\cdot}_{\mathcal{U}}(X) \to 0$$

Ainsi, en considérant encore une fois la suite exacte longue induite en cohomologie, on voit qu'il nous suffit de démontrer que pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$, le morphisme de restriction

$$C^{\cdot}(X) \xrightarrow{R} \mathcal{C}^{\cdot}_{\mathcal{U}}(X)$$

est un quasi-isomorphisme.

Montrons qu'il suffit d'avoir la proposition 3 pour terminer la démonstration du théorème de de Rham. On a que la restriction $R : C^{\cdot}(X) \to \mathcal{C}^{\cdot}_{\mathcal{U}}(X)$ est duale de l'inclusion $i : C^{\mathcal{U}}_{\cdot}(X) \to C_{\cdot}(X)$. Pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$, la proposition 3 nous donne un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} C_{\cdot}(X) & \xleftarrow{i} & C^{\mathcal{U}}_{\cdot}(X) \\ & & \| \\ C_{\cdot}(X) & \xrightarrow{k} & C^{\mathcal{U}}_{\cdot}(X) \end{array}$$

ainsi qu'une application linéaire de degré 1 $h : C_{\cdot}(X) \to C_{\cdot}(X)$ avec

$$i \circ k - id_{C_{\cdot}(X)} = \partial h + h\partial$$

En notant K (resp. H) l'application duale de k (resp. h), on obtient un diagramme dual :

$$\begin{array}{ccc} C^{\cdot}(X) & \xrightarrow{R} & C^{\cdot}_{\mathcal{U}}(X) \\ & & \| \\ C^{\cdot}(X) & \xleftarrow{K} & C^{\cdot}_{\mathcal{U}}(X) \end{array}$$

ainsi qu'une application linéaire de degré -1 $H : C^{\cdot}(X) \to C^{\cdot}(X)$ tel que

$$R \circ K - id_{C^{\cdot}(X)} = Hd + dH$$

On a alors qu'en passant en cohomologie, $H_* d_* + d_* H_* = 0$ puis $R \circ K = id = K \circ R$, ce qui termine la démonstration du théorème de de Rham.

4.2 Démonstration du théorème des petites chaînes

Il s'agit de construire une application $k : C_q(X) \to C^{\mathcal{U}}_q(X)$ qui soit, à peu de choses près, la réciproque de l'injection $i : C^{\mathcal{U}}_q(X) \to C_q(X)$. Il faut donc trouver un moyen d'associer à une q-chaîne de X une q-chaîne "plus petite". L'idée est la suivante : on va associer à chaque chaîne la subdivision barycentrique de cette chaîne, c'est-à-dire la somme des chaînes obtenues (récursivement) en ajoutant le barycentre de la chaîne de départ aux chaînes de la subdivision barycentrique de son bord. Pour pouvoir considérer le barycentre d'une chaîne, on va d'abord travailler dans le complexe des chaînes singulières affines A_q, puis on se ramènera à $C_q(X)$ en poussant en avant les chaînes affines. Posons donc pour $q \in \mathbb{N}$

$$A_q = Vect_{\mathbb{R}}(\{\tau : \Delta_q \to \Delta_q, \tau \text{ affine }\})$$

On pose alors, en notant $x_0, x_1, \dots, x_q$ les sommets de Δ_q, pour $\tau \in A_q$:

$$bary(\tau) = \frac{\tau(x_0) + \cdots + \tau(x_q)}{q+1}$$

On définit également pour $y \in \Delta_q$ un morphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $y.$: $A_{q-1} \to A_q$ en posant, si $\tau \in A_{q-1}$, $y\tau(x_0) = y$ et si $i \geq 1$, $y\tau(x_i) = \tau(x_{i-1})$ ($y\tau$ est le simplexe dont le premier sommet est y et les autres sont ceux de τ). On définit alors la subdivision barycentrique d'une chaîne avec l'application suivante, qu'on définit d'abord sur les simplexes affines de Δ_q :

$$\begin{array}{rccc} Sd : & A_q & \to & A_q \\ & \tau & \mapsto & \begin{cases} \tau & \text{Si } q = 0 \\ bary(\tau)Sd(\partial\tau) & \text{Sinon} \end{cases} \end{array}$$

Où on a étendu Sd par linéarité à A_q tout entier. On définit également une application linéaire R de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccc} R : & A_q & \to & A_{q+1} \\ & \tau & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{Si } q = 0 \\ bary(\tau)(\tau - Sd(\tau) - R(\partial\tau) & \text{Sinon} \end{cases} \end{array}$$

On a alors

$$\partial Sd = Sd\partial$$

En effet, c'est évident si $q = 0$ et si $q \geq 1$, pour τ affine de Δ_q vers Δ_q :

$$\begin{array}{rcl} \partial(Sd(\tau)) & = & \partial(bary(\tau)Sd(\partial\tau)) \\ & = & Sd(\partial\tau) - bary(\tau)(\partial(Sd(\partial\tau))) \end{array}$$

avec par récurrence

$$\partial Sd(\partial\tau) = Sd(\partial^2\tau) = 0$$

Par le même genre de calcul, on obtient

$$id - Sd = R\partial - \partial R$$

On voudrait à présent s'assurer que l'opérateur Sd ainsi défini donne bien, conformément à l'intuition, des chaînes affines plus petites que celles passées en argument. Soit τ simplexe affine de A_q. On a pour $0 \leq i \leq q$,

$$\begin{aligned} |bary(\sigma - \tau(x_i))| &= \left| \frac{\sum_{j=0}^{q} \tau(x_j)}{q+1} - \tau(x_i) \right| \\ &= \frac{1}{q+1} \left| \sum_{j=0}^{q} \tau(x_j) - \tau(x_i) \right| \\ &\leq \frac{1}{q+1} \sum_{0 \leq j \leq q, j \neq i} |\tau(x_j) - \tau(x_i)| \\ &\leq \frac{q}{q+1} diam(\tau) \end{aligned}$$

où $diam(\tau)$ désigne le diamètre de τ. On va montrer que

$$diam(Sd(\tau)) \geq \frac{q}{q+1}$$

En effet, si a, b sont deux sommets d'un simplexe affine apparaissant dans la somme $Sd(\tau)$, alors ou bien l'un des deux est le barycentre de τ, auquel cas le calcul précédent permet de conclure, ou bien les deux sont des sommets d'un terme apparaissant dans la subdivision barycentrique d'une arête de τ. Comme le diamètre des arêtes de τ est plus petit que celui de τ, un raisonnement par récurrence permet de conclure. Ainsi, la suite $(diam(Sd^i(\tau)))$ converge vers 0. Donc si $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert de Δ_q, comme Δ_q est compact, $\mathcal{U}$ admet un nombre de Lebesgue. Il existe donc pour tout $\tau \in A_q$ un entier $s(\tau)$ tel que $Sd^{s(\tau)}(\tau)$ est $\mathcal{U}$-petite.

Nous pouvons construire des opérateurs Sd et R sur $C_q(X)$ en poussant en avant les opérateurs du même nom dont nous disposons sur A_q : on pose pour $\sigma \in C_q(X)$

$$Sd(\sigma) = \sigma_*(Sd(id_{\Delta_q}))$$

et

$$R(\sigma) = \sigma_*(R(id_{\Delta_q}))$$

Ces deux opérateurs vérifient les deux relations $\partial Sd = Sd\partial$ et $id - Sd = R\partial + \partial R$. De plus, en considérant, pour chaque $\sigma \in C^q(C)$ et chaque recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, le recouvrement ouvert $\sigma^{-1}(\mathcal{U})$ de Δ_q, on obtient l'existence pour tout $\sigma \in C_q(X)$ d'un entier $s(\sigma)$ tel que $Sd^{s(\sigma)}(\sigma)$ est dans $C_q^{\mathcal{U}}$. On prend pour $s(\sigma)$ le plus petit des entiers qui conviennent.

On obtient donc une application $l : C_q(X) \to C_q^{\mathcal{U}}(X)$ telle que $i \circ l = id$ en posant $l(\sigma) = Sd^{s(\sigma)}(\sigma)$ en revanche, l ne commute pas à la différentielle. En effet, on a pour $\sigma \in C_q(X)$:

$$(\partial l - l\partial)(\sigma) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \left(Sd^{s(\sigma)} - Sd^{s(\sigma_i)} \right) (\sigma_i)$$

En remarquant que

$$Sd^{s(\sigma)} - Sd^{s(\sigma_i)} = \sum_{j=s(\sigma_i)}^{s(\sigma)-1} \left(Sd^{j+1} - Sd^j \right) = \sum_{j=s(\sigma_i)}^{s(\sigma)-1} (R\partial + \partial R) Sd^j$$

on voit qu'apparaît la quantité

$$k(\sigma) = l(\sigma) + R\left(\sum_{i=0}^{q}(-1)^i \sum_{j=0}^{s(\sigma)-1} Sd^j(\sigma_i)\right) \in C_q^{\mathcal{U}}(X)$$

On a bien

$$k \circ i = id$$

On cherche alors h tel que $id - i \circ k = h\partial + \partial h$ Or, avec la même technique de calcul que juste au-dessus, on trouve

$$(id - i \circ k)(\sigma) = \sum_{l=0}^{s(\sigma)-1}(R\partial + \partial R)Sd^l(\sigma) - R\left(\sum_{i=0}^{q}(-1)^i \sum_{j=s(\sigma_i)}^{s(\sigma)-1} Sd^j(\sigma_i)\right)$$

Ce qui nous amène à poser

$$h = \sum_{i=0}^{s(\sigma)-1} R \circ Sd^i$$

On vérifie alors qu'on a bien

$$id - k \circ i = h\partial + \partial h$$

On déduit de cette dernière égalité, comme i est injective :

$$\partial k = k\partial$$

Ce qui termine la démonstration de la proposition 3.

Références

[1] Franck W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.* Springer-Verlag, 1983.

[2] Serge Lang, *Algebra.* Springer-Verlag, 2002.

[3] Glen E. Bredon, *Topology and geometry.* Springer-Verlag, 1993.