Feuilles fermées des feuilletages holomorphes de codimension 1

Gustave Billon
Superviseur : Frank Loray

2 janvier 2020

Introduction

Ce court mémoire a pour but la présentation de la preuve d'un théorème de J-P Jouanolou sur les feuilles fermées des feuilletages holomorphes singuliers de codimension 1. Ce théorème nous dit qu'un tel feuilletage sur une variété compacte possède un nombre fini de feuilles fermées, à moins qu'il n'admette une intégrale première méromorphe, auquel cas toutes ses feuilles sont fermées. Nous nous sommes appuyés sur la présentation de la preuve faite par Étienne Ghys dans [2]. Comme ce dernier suppose connue la théorie des feuilletages holomorphes singuliers de codimension 1, la majeure partie du mémoire consiste en l'introduction des définitions et propriétés nécessaires pour comprendre l'article d'Étienne Ghys. La notion de feuille fermée d'un feuilletage (feuille contenue dans un sous-ensemble analytique) demande des résultats non-triviaux sur les ensembles analytiques d'une variété complexe, c'est-à-dire les ensembles qui sont localement les zéros de fonctions holomorphes. Sur ce sujet, nous nous contentons de citer les résultats nécessaires aux preuves de ce que nous avançons sur les feuilles fermées des feuilletages. Nous nous sommes appuyés pour cela sur [1]. La plupart de ces résultats découlent du théorème de préparation de Weirstrass, qui est démontré au début de [1].

1 Feuilletages holomorphes de codimension 1 lisses

1.1 Champs de vecteurs

Soient $(Y^1, \ldots, Y^{n-1})$ des champs de vecteurs holomorphes sur X, tels que pour tout $x \in X$, $\mathrm{Vect}(Y^1_x, \ldots, Y^{n-1}_x)$ est de dimension $n-1$ (c'est un hyperplan de T_xX).

Théorème 1. *(Frobenius) Si $[Y^i, Y^j] \in \mathrm{Vect}(Y^1, \ldots, Y^{n-1})$ $(1 \leq i, j \leq n-1)$, alors pour tout $x \in X$ il existe V un voisinage ouvert de X contenant x, Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $\phi : V \to \Omega$ un biholomorphisme avec $d\phi(Y^i) = \partial/\partial x_i$.*

Corollaire 2. *Si $[Y^i, Y^j] \in \mathrm{Vect}(Y^1, \ldots, Y^{n-1})$, pour tout $x \in X$ il existe V un voisinage ouvert de x, pour tout $y \in V$, il existe H une sous-variété de codimension 1 de V telle que $y \in H$ et pour tout $z \in H$, $T_zH = \mathrm{Vect}(Y^1_z, \ldots, Y^n_z)$.*

Démonstration. Tout d'abord, si $V = \Omega \subset \mathbb{C}^n$ et $Y^i = \partial/\partial x_i$, pour tout $y \in V$ on peut poser $H_y = \{z \in V | z_n = y_n\}$. L'ensemble H_y est bien une sous-variété de codimension 1 et $T_z H_y = \ker df_z = \mathrm{Vect}(Y^1, \ldots, Y^{n-1})$.

Dans le cas général, d'après le théorème de Frobenius, il existe un voisinage V de x et un biholomorphisme $\phi : V \simeq \Omega \subset \mathbb{C}^n$ avec $d\phi(Y^i) = \partial/\partial x_i$. Pour tout $y \in V$, d'après ce qui précède on a donc $\phi(y) \in H_{\phi(y)} \subset \Omega$. On a $\phi^{-1}(H_{\phi(y)})$ est bien une sous-variété de codimension 1. De plus $T_z\phi^{-1}(H_{\phi(y)}) = (d\phi_z)^{-1}T_{\phi(z)}H_{\phi(y)} = (d\phi_z)^{-1}(\mathrm{Vect}(\partial/\partial x_i)) = \mathrm{Vect}((d\phi_z)^{-1}(\partial/\partial x_i)) = \mathrm{Vect}(Y_z^i)$. □

1.2 1-formes holomorphes

Soit à présent ω une 1-forme holomorphe sur un ouvert U de X qui ne s'annule pas.

Théorème 3. *(Frobenius)*
Si $\omega \wedge d\omega = 0$, pour tout $x \in U$, il existe V un voisinage de x, Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $\phi : V \simeq \Omega$ un biholomorphisme avec $(\phi^{-1})^*\omega = dx_n$.

Corollaire 4. *Si $\omega \wedge d\omega = 0$, pour tout $x \in U$ il existe V un voisinage de x dans X et pour tout $y \in V$ une sous-variété H de V de codimension 1 telle que $TH = \ker \omega|_V$.*

Démonstration. Si $V = \Omega$, $\omega = dx_n$, $H_y = \{z_n = y_n\}$. Si $\phi : V \simeq \Omega$: $H_y = \phi^{-1}H_{\phi(y)}$. □

1.3 Définition d'une feuille et premières propriétés

Définition 5. *Soit $(U_j)_{j\in J}$ un recouvrement ouvert de X et soit $(\omega_j)_{j\in J}$ une famille de 1-formes holomorphes, partout non nulles, définies sur les U_j, telles que pour tous $j, k \in J$, il existe une fonction holomorphe g_{jk} sur $U_k \cap U_j$ ne s'annulant pas, telle que $\omega_j = g_{jk}\omega_k$ sur $U_j \cap U_k$. Supposons $\omega_j \wedge d\omega_j = 0$ pour tout $j \in J$.*

Alors pour tout $L \subset X$, $L \neq \emptyset$, on dit que L est une feuille associée à la famille (ω_j) si pour tout $x \in L$, pour toute sous-variété connexe H de X de codimension 1 contenant x telle que $T_yH = \ker d\omega_{j,y}$ pour tout $y \in H$ et pour tout j tel que $y \in U_j$, on a $H \subset L$, et L est minimal pour tout cette propriété.

On appelle feuilletage associé à (ω_j) l'ensemble des feuilles associées à (ω_j).

Une définition analogue pourait être donnée en remplaçant la famille de 1-formes (ω_j) par une famille de champs de vecteurs vérifiant les conditions du théorème 1.

On se donne pour la suite de cette sous-section une famille $(\omega_j)_{j\in J}$ comme dans la définition ci-dessus. Notons $\mathcal{F}$ le feuilletage associé à (ω_j).

Proposition 6. *Pour tout $x \in X$, il existe une unique feuille L de $\mathcal{F}$ telle que $x \in L$.*

Démonstration. Notons pour tout $L \subset X$ $P(L)$ la propriété "pour tout $x \in L$, pour tout ouvert V contenant x et toute sous-variété connexe H de V de codimension 1 contenant x telle que $T_yH = \ker d\omega_{j,y}$ pour tout $y \in V$ et

$y \in U_j$, on a $H \subset L$". Soit $x \in X$. Si L_1 et L_2 sont deux feuilles contenant x, il est facile de voir que $P(L_1 \cap L_2)$ est vérifiée, de sorte que, comme $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ et par minimalité de L_1 et L_2, on a $L_1 = L_1 \cap L_2 = L_2$. Cela montre l'unicité dans la proposition.

Le lemme de Zorn permet de montrer l'existence : Posons $\mathcal{E} = \{A \subset X | P(A), x \in A\}$. L'ensemble $\mathcal{E}$ est muni d'un ordre en posant $A \leq B$ si $B \subset A$. L'ensemble $\mathcal{E}$ est alors un ensemble inductif. En effet, si $\mathcal{C}$ est une chaîne de $\mathcal{E}$, il est facile de voir que $\bigcap_{A \in \mathcal{C}} A$ est encore un élément de $\mathcal{E}$, qui est un majorant de $\mathcal{C}$. Comme de plus $\mathcal{E}$ est non vide puisqu'il contient X, $\mathcal{E}$ contient un élément maximal, qui est une feuille de $\mathcal{F}$ contenant x. □

Proposition 7. *Toute feuille est connexe par arcs.*

Démonstration. Soit $(\omega_j)_{j \in J}$ une famille comme dans la définition 5 et soit L une feuille associée aux ω_j. Soit M une composante connexe par arcs de L. La propriété $P(M)$, introduite dans la preuve de la proposition 6, est vérifiée. En effet, si $x \in M$ et si H est une sous-variété connexe de codimension 1 de X contenant x qui est partout tangente au noyau des ω_j, alors H est connexe par arcs (puisque H est localement connexe par arcs), et H est incluse dans L puisque L est une feuille, donc H est contenue dans M. Par minimalité de L pour la propriété P, on a $L = M$ donc L est connexe par arcs. □

Il n'est pas possible de donner une caractérisation locale d'une feuille. Nous pouvons tout de même remarquer la proposition suivante, qui nous sera utile dans la suite.

Proposition 8. *Soit L une feuille de $\mathcal{F}$. Soit $\phi : U \to \Omega \subset \mathbb{C}^n$ une carte de X sur laquelle on a redressé la famille (ω_j) : $(\phi^{-1})^*\omega_i = \alpha dx_n$. Supposons que Ω est tel que les ensembles $\{x_n = c\}$ sont connexes pour tous les $c \in \mathbb{C}$. Alors $\phi(L)$ est une réunion d'hyperplans $\{x_n = c\}$, pour des nombres complexes c.*

Démonstration. Si $z \in U \cap L$ alors $\phi^{-1}(\{x_n = z_n\})$ est une sous-variété connexe de codimension 1 dont l'espace tangent en tout point coïncide avec $\ker \omega_j$. Donc $\phi^{-1}(\{x_n = z_n\}) \subset L$ et $\{x_n = z_n\} \subset \phi(L)$. □

2 Ensembles analytiques d'une variété complexe

2.1 Généralités sur les sous-ensembles analytiques

Dans cette sous-section, nous reproduisons quelques résultats sur les ensembles analytiques complexes cités dans [1]. Soit X une variété complexe.

Théorème 9. *([1], 1.4) Pour tout $x \in X$, l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ des germes de fonctions holomorphes en x est factoriel.*

On dit qu'un sous-ensemble E de X est analytique s'il existe un recouvrement ouvert $(U_j)_{j \in J}$ de X et pour tout $j \in J$ des fonctions holomorphes $f_1, \dots f_r$ définies sur U_j avec $E \cap U_j = \{f_1 = \dots = f_r = 0\}$.

Définition 10. *([1], 2.3) Soit A un sous-ensemble analytique de X. On dit qu'un point $x \in A$ est un point régulier de A s'il existe un voisinage U de x tel que $A \cap U$ est une sous-variété de X. Dans ce cas, on appelle dimension* *de A en x et on note $\dim_x A$ la dimension de la sous-variété $A \cap U$. On note* $\operatorname{reg} A$ *l'ensemble des points réguliers de A et on appelle points singuliers de A les points de* $\operatorname{sng} A := A \setminus \operatorname{reg} A$.

En particulier, l'ensemble $\operatorname{reg} A$ est une sous-variété de X.

Théorème 11. *([1], 2.3)*
Si A est un sous-ensemble analytique de X, alors $\operatorname{reg} A$ *est dense dans A.*

Pour tout $x \in A$, on peut donc poser $\dim_x A = \limsup_{y \in \operatorname{reg} A, y \to x} \dim_y A$. On appelle dimension de A le maximum des $\dim_x A$ pour $x \in A$.

On appelle hypersurface un sous-ensemble analytique A tel que pour tout $x \in A$, $\dim_x A = n - 1$ (où n est la dimension de X).

Théorème 12. *([1], 5.2)*
Soit A un sous-ensemble analytique de X. L'ensemble $\operatorname{sng} A$ *est également un sous-ensemble analytique de X et* $\dim_x \operatorname{sng} A < \dim_x A$ *pour tout* $x \in \operatorname{sng} A$.

Théorème 13. *([1], 5.1)*
Soit A un sous-ensemble analytique de X. La décomposition de $\operatorname{reg} A = \bigcup_{j \in J} S_j$ *en composantes connexes est localement finie. De plus, si (S_k) est une famille de composantes connexes de* $\operatorname{reg} A$*, et $S = \bigcup_{j \in J} S_j$, alors $\overline{S}$ est un sous-ensemble analytique de X de dimension* $\max_k \dim S_k$

On dit qu'un sous-ensemble analytique est irréductible s'il ne peut s'écrire sous la forme $A = A_1 \cup A_2$ avec A_1, A_2 des sous-ensembles analytiques et $A_1 \neq A, A_2 \neq A$. On dit qu'un sous-ensemble analytique $B \subset A$ est une composante irréductible de A si B est irréductible, et si on a $B \subset C \subset A$ avec C un sous-ensemble analytique irréductible, alors $B = C$.

Proposition 14. *Un ensemble analytique A est irréductible si et seulement si l'ensemble* $\operatorname{reg} A$ *est connexe.*

Théorème 15. *([1], 5.4)*
Soit $\operatorname{reg} A = \bigcup_{j \in J} S_j$ *la décomposition de* $\operatorname{reg} A$ *en composantes connexes. Alors $A = \bigcup_{j \in J} \overline{S_j}$ et cette union est la décomposition de A en composantes irréductibles.*

Proposition 16. *Si M est une sous-variété de X de dimension k, et si A est un sous-ensemble analytique de X avec $M \subset A$, alors* $\dim A \geq k$.

Démonstration. Procédons par récurrence sur la dimension de A. Si $\dim A = 0$, alors les points de A sont isolés, donc ceux de M aussi et $\dim M = 0$. Supposons $\dim A > 0$. Si $M \cap \operatorname{reg} A \neq \emptyset$, alors il existe un ouvert U de X tel que $M \cap U \subset \operatorname{reg} A \cap U$. Comme $M \cap U$ et $\operatorname{reg} A \cap U$ sont respectivement des ouverts de M et A, on a $k \leq \dim A$. Sinon, $M \subset \operatorname{sng} A$, puis comme $\dim \operatorname{sng} A < \dim A$, par hypothèse de récurrence, $k \leq \dim \operatorname{sng} A < \dim A$. $\square$

Théorème 17. *([1], 5.1)*
Soit A un sous-ensemble analytique de X. Pour tout $k \geq 0$, l'adhérence dans X de l'ensemble $A_{(k)} = \{z \in A | \dim_z A = k\}$ est soit vide soit un sous-ensemble analytique de X dont la dimension en chaque point est k.

Proposition 18. *([1], 5.6)*

Soient A et $\widetilde{A}$ deux sous-ensembles analytiques qui sont de dimension p en chacun de leurs points. Si $\widetilde{A} \subset A$, alors $\widetilde{A}$ est réunion de composantes irréductibles de A

2.2 Feuilles fermées des feuilletages holomorphes de codimension 1

Supposons la variété X connexe.

Proposition 19. *Soit L une feuille d'un feuilletage $\mathcal{F}$. Si L est contenue dans un ensemble analytique de X qui n'est pas X tout entier, alors L est une hypersurface irréductible de X.*

Démonstration. Soit A un ensemble analytique de X et supposons $L \subset A$. Montrons tout d'abord que L est un sous-ensemble analytique.

Soit S une composante connexe de $\operatorname{reg} A$, telle que $L \cap S \neq \emptyset$. S est une sous-variété connexe de X de codimension 1. Soit $x \in S \cap L$. Il existe une sous-variété connexe H de dimension $n-1$ passant par x dont l'espace tangent est partout le noyau de la forme définissant le feuilletage, et qui est donc contenue dans L par définition d'une feuille. Quitte à restreindre H, on a donc $H \subset S$. Comme S est de dimension au plus $n-1$ (sinon $S = X$), S est de dimension $n-1$, puis au voisinage de x on a $S = L$. Donc $S \cap L$ est ouvert dans S. Soit à présent (x_n) une suite de $S \cap L$ qui converge vers $x \in S$. Montrons $x \in L$. On peut redresser la forme définissant le feuilletage sur un voisinage ouvert V de x. Pour n suffisamment grand, $x_n \in V$ et comme ci-dessus, sur le voisinage V, L contient une sous-variété de codimension 1 H contenant un x_n. Si V est tel que $V \cap S = V \cap A$, H coïncide avec A sur V. Donc comme $H \subset L$, A (donc S) coïncide avec L sur V puis $x \in L$. Donc $S \cap L$ est fermé dans S puis comme S est connexe, $S \cap L = S$.

Soit à présent $x \in \overline{S}$. On dispose d'une suite (x_n) de S qui tend vers x. On peut redresser la forme définissant le feuilletage sur un voisinage V de x, et supposer $x_n \in V$ pour tout n, puis x_0 est contenu dans une sous-variété H de dimension $n-1$ partout tangente au noyau de la forme définissant le feuilletage. On a alors $H \subset L$, donc $S \subset H$, puis $x_n \in H$, donc $x \in H \subset L$. Ainsi $\overline{S} \subset L$.

Soit maintenant $x \in L$. Comme on l'a vu, il existe H une sous-variété connexe de dimension $n-1$ contenant x et dont l'espace tangent coïncide partout avec le noyau de la forme définissant le feuilletage. On peut supposer H relativement compacte dans X. D'après les théorèmes 13 et 15, seul un nombre fini de composantes irréductibles $\overline{S_1}, \dots, \overline{S_r}$ s'intersectent avec H (où les S_j sont des composantes connexes de $\operatorname{reg} A$), et quitte à réduire H on peut supposer $x \in \overline{S_j}$ $(1 \leq j \leq r)$. Nécessairement il existe $1 \leq j \leq r$ avec $S_j \cap H \neq \emptyset$, sinon $H \subset \operatorname{sng} A$, puis $\dim \operatorname{sng} A \geq n-1$ donc $\dim A = n$, ce qui est impossible car $A \neq X$. Donc comme $H \subset L$, L s'intersecte avec l'un des S_j. On en déduit que L contient un des $\overline{S_j}$. Donc L s'écrit comme réunion de composantes irréductibles de A, puis L est un sous-ensemble analytique d'après le théorème 13.

Montrons à présent que L est une hypersurface irréductible. Comme L est connexe par arcs (proposition 7), d'après la proposition 14, il suffit de montrer que L est de dimension $n-1$ en tout point et lisse, c'est-à-dire que tous ses points sont réguliers. Soit $x \in L$. Soit $\phi : U \to \Omega$ une carte de X, sur laquelle on a redressé la famille de 1-formes (ω_i) définissant le feuilletage, et soit $V \subset U$ un voisinage ouvert de x relativement compact dans U. Alors d'après la proposition 8, $\phi(L \cap V)$ s'écrit $\bigcup_{c \in C}\{z_n = c\}$ avec C un ensemble de nombres complexes (où l'on a pris V tel que sur V les $\{z_n = c\}$ sont connexes). L'ensemble C est fini. En effet, s'il est infini, comme V est relativement compact, C admet un point d'accumulation α dans l'ouvert de $\mathbb{C}$ $\{z_n | z \in \phi(U)\}$ et si f est une fonction holomorphe sur $\phi(U)$ qui s'annule sur $\phi(L \cap U)$, alors en regardant la restriction de f à la droite complexe $D = \{y + \mathbb{C} \cdot \partial/\partial z_n\}$ avec $y \in \phi(U)$ tel que $y_n = \alpha$, d'après le théorème des zéros isolés, f s'annule sur D, donc C contient un ouvert de $\mathbb{C}$, puis f s'annule sur un ouvert de U donc sur U tout entier par prolongement analytique (si U connexe). Ceci est exclu car L est de dimension au plus $n-1$. Donc C est fini. Ceci montre que $L \cap V$ et une sous-variété de X de codimension 1, donc x est un point régulier de L et L est de dimension $n-1$ en x, ce qui termine la démonstration.

□

2.3 Théorème de Remmert-Stein et feuilletages singuliers

Théorème 20. *(Remmert-Stein, [1], 4.4)*

Soit S un sous-ensemble analytique et soit A un sous-ensemble analytique de $X \backslash S$ avec pour tout $x \in A$, $\dim_x A = p$. Si $\dim S < p$, alors l'adhérence $\overline{A}$ de A dans X est un sous-ensemble analytique et pour tout $x \in \overline{A}$, $\dim_x \overline{A} = p$

Supposons à partir de maintenant que la variété complexe ambiante X est compacte.

Soit $(U_j)_{j \in J}$ et $(\omega_j)_{j \in J}$ une famille de 1-formes différentielles non nulles (mais pouvant éventuellement s'annuler) définies sur les U_j avec sur $U_j \cap U_k$, $\omega_j = g_{jk}\omega_k$, les g_{jk} ne s'annulant pas. Supposons qu'il n'existe pas de famille de fonctions (f_j) non inversible qui divise la famille (ω_j). Notons $\mathrm{sing}((\omega_j))$ l'ensemble des points où les ω_j s'annulent.

$\mathrm{sing}((\omega_j))$ est un sous-ensemble algébrique de X. En effet, quitte à réduire les U_j, on peut supposer que ce sont des ouverts de cartes, si bien que chaque ω_j s'écrit $\omega_j = f_{j,1}dx_1 + \cdot + f_{j,n}dx_n$ dans la carte U_j, avec les $f_{j,r}$ des fonctions holomorphes sur U_i. On a donc $\mathrm{sing}((\omega_j)) \cap U_j = \{f_{j,1} = \cdot = f_{j,n} = 0\}$.

Montrons que, quitte à diviser la famille (ω_j) par une famille de fonctions holomorphe $(h_j)_{j \in J}$ avec les h_j/h_k qui ne s'annulent pas là où ils sont définis, on peut supposer $\mathrm{sing}((\omega_j))$ de codimension au moins 2 (cette opération ne change pas le noyau des ω_j aux points où ils sont non nuls, ni le fait que $\omega_j \wedge d\omega_j = 0$). Notons $\mathcal{S} = \mathrm{sing}((\omega_j))$ Comme les ω_j sont non nuls, $\mathcal{S}$ est de dimension au plus $n-1$. S'il est de dimension $n-1$, l'ensemble $\mathcal{S}_{(n-1)} = \overline{\{x \in \mathcal{S} | \dim_x \mathcal{S} = n-1\}}$ est non vide, donc d'après le théorème 17, $\mathcal{S}_{(n-1)}$ est une hypersurface qui admet une famille de fonctions minimales (e_j) (que l'on peut supposer définies sur les U_j quitte à raffiner le recouvrement) d'après la proposition 23 ci-dessous. Comme les $f_{j,r}$ s'annulent sur $\mathcal{S}_{(n-1)}$, elles sont toutes divisibles par les (e_j). Comme en chaque point x de $\mathcal{S}_{(n-1)}$, le germe des e_j en x est non inversible, d'après le théorème 9, il existe un entier α tel que les $f_{j,r}$ sont divisibles par les e_j^α mais pas par les $e_j^{\alpha+1}$. Cela implique que les ω_j s'écrivent $\omega_j = h_j \cdot \widetilde{\omega}_j$ et les $\widetilde{\omega_j}$ ne s'annulent pas sur $\mathcal{S}_{(n-1)}$. Par conséquent, en notant $\widetilde{\mathcal{S}}$ l'ensemble des points singuliers de la famille $\widetilde{\omega}_j$, on a $\widetilde{\mathcal{S}} \subset \mathcal{S}$, puis pour tout $x \in \widetilde{\mathcal{S}}$, $\dim_x \widetilde{\mathcal{S}} \leq \dim_x \mathcal{S}$, donc $\widetilde{\mathcal{S}}_{(n-1)} \subset \mathcal{S}_{(n-1)}$, avec de plus $\widetilde{\mathcal{S}}_{(n-1)} \neq \mathcal{S}_{(n-1)}$. Comme X est compacte, d'après les théorèmes 13 et 15, $\mathcal{S}_{(n-1)}$ possède un nombre fini de composantes irréductibles, puis d'après la proposition 18, $\widetilde{\mathcal{S}}_{(n-1)}$ possède strictement moins de composantes irréductibles. En réitérant le processus précédent, on obtient la famille de fonctions (h_j) recherchée et on peut supposer que $\mathrm{sing}((\omega_j))$ est de codimension au moins 2.

On appelle feuilletage singulier associé à la famille (ω_j) le feuilletage lisse de $X \backslash \mathrm{sing}(\omega_j)$ $\mathcal{F}$ associé aux ω_j restreints à $X \backslash \mathrm{sing}(\omega_j)$: les feuilles de $\mathcal{F}$ sont simplement les feuilles associées à (ω_j) sur $X \backslash \mathrm{sing}(\omega_j)$. Les feuilles fermées de $\mathcal{F}$ étant des hypersurfaces de $X \backslash \mathrm{sing}(\omega_j)$, le théorème de Remmert-Stein permet d'affirmer que leurs adhérences dans X sont des hypersurfaces de X.

3 Intégrale première d'un feuilletage

Soit ξ une fonction méromorphe non constante sur la variété complexe X : ξ est une fonction non constante de X vers $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ telle qu'il existe un recouvrement ouvert $(U_j)_{j \in J}$ de X et des familles de fonctions holomorphes $(f_j)_{j \in J}$ et $(g_j)_{j \in J}$ définies sur les U_j avec les g_j sont non nulles, telles que pour tous $j, k \in J$, on a l'égalité $f_j \cdot g_k = f_k \cdot g_j$ sur l'ouvert $U_j \cap U_k$, et pour tout $x \in U_j$ avec $g_j(x) \neq 0$, on a $\xi(x) = f_j(x)/g_j(x)$. On peut définir la 1-forme méromorphe $d\xi$ par $d\xi = df_j/g_j - f_j dg_j/g_j^2$ sur chaque U_j.

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage (éventuellement singulier) X, associé à une famille $(\omega_j)_{j \in J}$ de 1-formes holomorphes, définies sur les U_j. On dit que ξ est une intégrale première (méromorphe) de $\mathcal{F}$ si pour tout $j \in J$ $d\xi \wedge \omega_j = 0$.

Proposition 21. *Si ξ est une intégrale première de $\mathcal{F}$, ξ est constante (éventuellement égale à ∞) sur les feuilles de $\mathcal{F}$. De plus si L est une feuille de $\mathcal{F}$ et $x \in L$, il existe un voisinage U de X tel que $L \cap U = \{y \in U | \xi(y) = \xi(x)\}$. En particulier toutes les feuilles de $\mathcal{F}$ sont fermées.*

Démonstration. Soit L est une feuille de $\mathcal{F}$ et $x \in L$, tel que $\xi(x) \neq \infty$. Par définition d'une feuille x est un point régulier des ω_j. Soit U un ouvert de carte contenant x sur lequel on a relevé les ω_j : en coordonnées locales $\omega_j = \lambda_j dz_n$. Supposons de plus que sur U les ensembles $\{z_n = c\}$ sont connexes pour tous les nombres complexes c. On a $dz_n \wedge d\xi = 0$ donc $d\xi = \mu dz_n$, puis $\ker d\xi$ contient $\mathrm{Vect}(\partial/\partial z_1, \ldots \partial/\partial z_{n-1})$. Donc ξ est constante sur la sous-variété de U $\{z_n = x_n\}$. Cela montre que si $y \in L$ et si $\gamma : [0,1] \to L$ est un chemin continu de x à y, le sous-ensemble des t dans $[0,1]$ tels que ξ est constante sur $[0,t]$ est ouvert et fermé dans $[0,1]$, donc $\xi(x) = \xi(y)$, puis ξ est constante sur L. Sur l'ouvert U, l'ensemble analytique $\{\xi = \xi(x)\}$ est donc réunion de feuilles, donc (proposition 8) réunion d'ensembles $\{z_n = c\}$ avec c des nombres complexes dans un ensemble C, et c'est une hypersurface puisque ξ n'est pas identiquement nulle. Comme les ensemble $\{z_n = c\}$ avec $c \in C$ sont des hypersurfaces irréductibles de U, d'après la proposition 18 ce sont des composantes irréductibles de $\{\xi = \xi(x)\}$. En choisissant U relativement compact, les propositions 13 et 15 donnent que C est un ensemble fini, donc quitte à restreindre U on a que $C = \{\xi(x)\}$.

Reste le cas où ξ est constante égale à ∞ sur L. Comme la fonction ξ est non constante, la fonction $1/\xi$ est également une fonction méromorphe sur X, intégrale première de $\mathcal{F}$, constante égale à 0 sur L. Le paragraphe précédent permet de conclure. $\square$

4 Groupe des diviseurs d'une variété complexe

Définition 22. *On appelle groupe des diviseurs d'une variété complexe X et on note* $\mathrm{Div}(X)$ *le groupe abélien libre engendré par les hypersurfaces irréductibles de X : si on note $\mathcal{H}$ l'ensemble des hypersurfaces irréductibles de X, on a* $\mathrm{Div}(X) = \bigoplus_{H \in \mathcal{H}} \mathbb{Z} \cdot H$

Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage singulier de X, on note $\mathrm{Div}(\mathcal{F})$ le groupe abélien libre engendré par les adhérences des feuilles fermées de $\mathcal{F}$. C'est un sous-groupe de $\mathrm{Div}(X)$.

On note $\mathrm{Pic}(X)$ le groupe de Picard de X, c'est-à-dire le groupe des classes d'isomorphismes de fibrés en droites sur X. Nous allons construire un morphisme $\mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Pic}(X)$.

Si E est un sous-ensemble analytique de X, U un ouvert de X et f une fonction holomorphe sur U telle que $E \cap U = \{x | f(x) = 0\}$, on dit que f est une fonction minimale pour E si pour toute fonction g holomorphe sur U, si g s'annule sur $E \cap U$, alors il existe une fonction $h \in \mathcal{O}_X(U)$ avec $g = f \cdot h$.

Remarquons que si f_1 et f_2 sont des fonctions minimales de E et $E \neq X$, alors il existe des fonctions h_1 et h_2 avec $f_1 = h_1 \cdot f_2$ et $f_2 = h_2 \cdot f_1$. Par conséquent $f_1 = h_1 \cdot h_2 \cdot f_1$, puis $h_1 \cdot h_2 = 1$ partout où f_1 est non nulle, donc sur un ouvert de X puisque $E \neq X$. Par prolongement analytique h_1 et h_2 sont donc inversibles : il y a unicité de la fonction minimale sur un ouvert, à multiplication près par une fonction holomorphe inversible.

Il est facile de voir qu'une telle fonction minimale n'a de chance d'exister que si E est une hypersurface.

Proposition 23. *([1], 2.9)*

Pour toute hypersurface H de X et tout ouvert U de X, il existe une fonction holomorphe sur U, minimale pour X.

Si H est une hypersurface irréductible, il existe donc un recouvrement ouvert $(U_j)_{j \in J}$ de X et des fonctions holomorphes f_j définies sur les U_j, qui sont minimales pour H. Si $j, k \in J$, f_j et f_k sont deux fonctions minimales pour H, donc $f_j = h_{jk} f_k$ avec h_{jk} une fonction holomorphe inversible sur $U_j \cap U_k$. De plus $h_{jj} = 1$ et $h_{jl} h_{lk} h_{kj} = 1$, donc la famille $(h_{jk})_{j,k \in J}$ définit un fibré en droites. Celui-ci est bien défini. En effet, si l'on considère une autre famille de fonctions minimales pour H $(\widetilde{f_j})$, que l'on peut supposer définies sur les U_j, quitte à raffiner le recouvrement U_j, on obtient $\widetilde{f_j} = e_j \cdot f_j$ avec e_j une fonction holomorphe inversible sur U_j. En posant $\widetilde{f_j} = \widetilde{h}_{jk} \widetilde{f_k}$, on obtient $\widetilde{h}_{jk} = (e_j / e_k) h_{jk}$, donc les familles h_{jk} et $\widetilde{h}_{jk}$ définissent le même fibré en droites.

On a donc construit une application de l'ensemble des hypersurfaces irréductibles vers $\mathrm{Pic}(X)$, d'où l'on déduit un morphisme de groupes abéliens $\mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Pic}(X)$.

5 Théorème de Jouanolou sur les feuilles fermées des feuilletages singuliers

Soit X une variété complexe compacte connexe, et $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension 1, éventuellement singulier, sur X. Nous allons à présent démontrer le théorème suivant :

Théorème 24. *(Jouanolou)*
Ou bien le feuilletage $\mathcal{F}$ admet une intégrale première méromorphe, auquel cas toutes ses feuilles sont fermées, ou bien il n'admet qu'un nombre fini de feuilles fermées.

Avant de commencer la démonstration, énonçons un lemme ad hoc, qui découle du fait que les groupes de cohomologie des faisceaux analytiques cohérents sur une variété complexe compacte sont de dimension finie. Ce résultat peut être trouvé dans [3], section 1.4.

Lemme 25. *Les groupes de cohomologie du faisceau $\mathcal{O}_X$ et, pour tout fibré en droites $\mathcal{L}$ sur X, du faisceau $\Omega^1_X \otimes \mathcal{L}$, sont de dimension finie.*

Montrons à présent le théorème 24. Il s'agit en fait de démontrer que si le feuilletage n'admet pas d'intégrale première, le groupe $\mathrm{Div}(\mathcal{F})$, sous-groupe de $\mathrm{Div}(X)$ engendré par les adhérences des feuilles fermées de $\mathcal{F}$, est finiment engendré, donc que l'espace vectoriel $\mathbb{C} \otimes \mathrm{Div}(\mathcal{F})$ est de dimension finie. L'application, construite à la section précédente, $\mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Pic}(X)$ induit une application $\mathrm{Div}(\mathcal{F}) \to \mathrm{Pic}(X)$ puis, comme $\mathrm{Pic}(X) \simeq H^1(X, \mathcal{O}^*_X)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, on a une application $\mathbb{C}$-linéaire $\mathbb{C} \otimes \mathrm{Div}(\mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{O}^*_X)$. En composant par l'application $d\ln : H^1(X, \mathcal{O}^*_X) \to H^1(X, \Omega^1_{X,f})$ (où $\Omega^1_{X,f}$ est le faisceau des 1-formes holomorphes fermées sur X et $\mathcal{O}^*_X$ est le faisceau des fonctions holomorphes qui ne s'annulent pas) qui à une famille (g_{jk}) associe la famille dg_{jk}/g_{jk}, on obtient une application $\Phi : \mathbb{C} \otimes \mathrm{Div}(\mathcal{F}) \to H^1(X, \Omega^1_{X,f})$. L'image de Φ est de dimension finie car la suite exacte courte $0 \to \mathbb{C} \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{d} \Omega^1_{X,f} \to 0$ donne une suite exacte $H^1(X, \mathcal{O}_X) \to H^1(X, \Omega^1_{X,f}) \to H^2(X, \mathbb{C})$, et $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ est de dimension finie par le lemme 25, de même que $H^2(X, \mathbb{C})$, par exemple par le théorème de Hodge. Il suffit donc pour montrer le théorème de montrer que le noyau de Φ est de dimension finie si le feuilletage n'admet pas d'intégrale première méromorphe. Notons Div^0 ce noyau.

La proposition 23 nous assure l'existence d'une application qui à une feuille fermée L de $\mathcal{F}$ associe une famille $(f_j)_{j\in J}$, définie sur un recouvrement ouvert $(U_j)_{j\in J}$, avec $f_j = g_{jk} f_k$ définie à multiplication près par une famille (e_j) partout non nulle (et à raffinement près du recouvrement). Soit D un élément de Div^0. On a $D = t_1 L_1 + \cdots + t_m L_m$ avec $L_1, \ldots, L_m$ des hypersurfaces deux à deux distinctes, adhérences de feuilles fermées de $\mathcal{F}$. Donnons-nous une famille $(f_{p,j})$ $(1 \leq p \leq m)$ de fonctions minimales pour chaque L_p, avec $(f_{p,j}) = g_{p,jk} f_{p,k}$. Le fait que $D \in \mathrm{Div}^0$ s'écrit

$$\sum_{p=1}^{m} t_p \frac{df_{p,j}}{f_{p,j}} - \sum_{p=1}^{m} t_p \frac{df_{p,k}}{f_{p,k}} = \sum_{p=1}^{m} t_p \frac{dg_{p,jk}}{g_{p,jk}} = v_j - v_k$$

où les v_j sont des 1-formes holomorphes fermées définies sur les U_j. En associant à D la 1-forme méromorphe fermée définie sur chaque U_j par $\Psi(D)|_{U_j} = v_j +$

$\sum_{p=1}^m t_p df_{p,j}/f_{p,j}$, qui est définie à l'addition près d'une 1-forme holomorphe fermée, on obtient une application Ψ de Div^0 vers l'ensemble des 1-formes méromorphes fermées sur X, modulo les 1- holomorphes fermées sur X.

Remarquons que si $x \in L_1$, alors en supposant qu'on a choisi des coordonnées locales et redressé le feuilletage sur l'ouvert U_j de façon que $L_1 \cap U_j = \{z_n = 0\}$, on peut choisir $f_{1,j} = z_n$, puis $df_{1,j}/f_{1,j} = dz_n/z_n$, donc comme les L_p ne s'intersectent pas (proposition 6) et que donc pour $p \geq 2$, $df_{p,j}/f_{p,j}$ est holomorphe aux points de L_1, si $t_1 \neq 0$ la n-ème coordonnée de tout représentant de $\Psi(D)$ vaut ∞ aux points de L_1, puis aucun représentant de $\Psi(D)$ n'est holomorphe, donc Ψ est injective.

Par ailleurs, pour tout $x \in L_1$, conservant le redressement et les coordonnées locales du paragraphe précédent, on a sur U_j : $\omega_j = \mu_j dz_n$. Donc sur U_j, $df_j/f_j \wedge \omega_j = \mu_j/z_n \cdot dz_n \wedge dz_n = 0$. Ceci montre que $\Psi(D) \wedge \omega_j$ est holomorphe. Notons $\omega_j = \gamma_{jk}\omega_k$ et $\mathcal{L}$ le fibré en droites de X défini par les γ_{jk}. On peut voir la famille (ω_j) comme une 1-forme holomorphe sur X à valeurs dans $\mathcal{L}$ (donc une section globale du faisceau $\Omega^1_X \otimes \mathcal{L}$). Les deux remarques précédentes permettent de définir $\overline{\Psi}(D) = \Psi(D) \wedge \omega$, avec $\overline{\Psi}(L) \in H^0(X, \Omega^1_X \otimes \mathcal{L})/(H^0(X, \Omega^1_{X,f}) \wedge \omega)$. Le but de $\overline{\Psi}$ est de dimension finie d'après le lemme 25. Il suffit donc de montrer que si son noyau est de dimension infinie, alors le feuilletage admet une intégrale première méromorphe.

En fait, le feuilletage admet une intégrale première dès que le noyau de $\overline{\Psi}$ est de dimension supérieure à 2. Supposons qu'il existe $D_1, D_2 \in \mathrm{Div}^0$ linéairement indépendants tels que $\overline{\Psi}(D_1) = \overline{\Psi}(D_2) = 0$. Il existe donc ψ_1 et ψ_2 des 1-formes méromorphes fermées, représentants respectifs de $\Psi(D_1)$ et $\Psi(D_2)$ avec $\psi_1 \wedge \omega_j = \psi_2 \wedge \omega_j = 0$. Comme Ψ est injective, ψ_1 et ψ_2 sont linéairement indépendants. En particulier ils sont non nuls.

En choisissant pour les U_j des ouverts de cartes, on peut poser sur les U_j, $\psi_1 = \alpha_{j,1}dx_1 + \cdots + \alpha_{j,n}dx_n$ et $\omega = \lambda_{j,1}dx_1 + \cdots + \lambda_{j,n}dx_n$, avec les $\alpha_{j,k}$ des fonctions méromorphes sur U_j et les $\lambda_{j,k}$ des fonctions holomorphes sur les U_j. L'égalité $\psi_1 \wedge \omega_j = 0$ se réécrit $\alpha_{j,k}\lambda_{j,l} - \alpha_{j,l}\lambda_{j,k} = 0$ pour tous $1 \leq k, l \leq n$. Comme les $\alpha_{j,k}$ et les $\lambda_{j,k}$ sont non tous nuls, il existe des fonctions méromorphes $\xi_{1,j}$ définies sur les U_j avec $\psi_1 = \xi_{1,j}\omega_j$. De même il existe des fonctions méromorphes $\xi_{2,j}$ avec $\psi_2 = \xi_{2,j}\omega_j$, donc $\psi_1 \wedge \psi_2 = 0$, puis le même calcul donne qu'il existe une fonction méromorphe ξ définie sur X avec $\psi_1 = \xi\psi_2$. Comme ξ_1 et ξ_2 sont linéairement indépendantes, ξ est non constante. Enfin, on a comme ψ_1 et ψ_2 sont fermées : $0 = d\psi_1 = d\xi \wedge \psi_2$ donc sur chaque U_j, $\xi_{2,j} \cdot d\xi \wedge \omega_j = 0$, puis en multipliant de part et d'autre par $1/\xi_{2,j}$ (non-nulle car $\psi_2 \neq 0$), on obtient que ξ est une intégrale première de $\mathcal{F}$.

Références

[1] E.M. Chirka, *Complex Analytic Sets.* Kluwer Academic Publishers, 1989.

[2] É. Ghys, *À propos d'un théorème de J.-P. Jouanolou concernant les feuilles fermées des feuilletages holomorphes.* Rend. Circ. Mat.Palermo, 2000

[3] H. Grauert, R. Remmert *Coherent Analytic Sheaves.* Springer-Verlag, 1984.