Le cours de Gaspard de Prony à l'École Polytechnique

Gustave Billon

7 janvier 2019

Table des matières

Introduction

Prony donne un cours d'analyse à l'École centrale des travaux publics, à partir de mars 1795, aux 2e et 3e divisions. La première partie de ce cours est intitulée "Introduction à la mécanique" et la première section, consacrée à la méthode des différences, fait l'objet de leçons imprimées, qui reprennent le cours donné à l'oral par l'auteur et se veulent manifestement un support destiné aux élèves. On trouve par exemple des phrases telles que celle-ci, au sujet d'un ouvrage de Lagrange : "Les élèves qui posséderaient la théorie exposée n°s 18, 19, 20 et 21 de mes leçons, pourront sans difficulté, entreprendre l'étude de cet ouvrage, et tireront un grand profit du temps qu'ils y auront consacré".

Nous avons eu accès à ces leçons imprimées dans un grand format conservé à la bibliothèque centrale de l'École polytechnique, qui contient également un cours de géométrie par Gaspard Monge, ainsi que, en dernière page, une grande table établie par Prony, appelée "Tableau analytique, offrant l'ensemble et la correspondance des diverses parties de la Mécanique" recensant et classant les domaines de la mécanique, depuis l'étude philosophique du concept de mouvement jusqu'aux différents types de machines.

Nous avons choisi de décrire ici la démarche générale suivie par Prony dans son exposé de la méthode des différences, en mettant particulièrement en valeur la place qu'il accorde au calcul différentiel au sein (ou à côté) de cette méthode. Nous détaillons certains points de son exposé qui nous ont paru cruciaux dans l'exposition qu'il fait de la méthode des différences, ou illustrant particulièrement bien l'impression générale que nous a donnée la lecture de ce cours.

1 La notion de fonction pour Prony

Le cours d'analyse de Prony est fondé sur le concept de fonction. En effet, dans l'introduction, l'auteur replace son cours dans le cadre plus global des mathématiques. Ces dernières traitent des quantités, qui peuvent être étudiées au travers du concept de nombre, point de vue de l'arithmétique, ou bien au travers des rapports généraux qui existent entre ces quantités, l'étude des ces rapports étant appelée analyse, ou encore algèbre (ces deux mots étant synonymes). L'analyse elle-même se divise en deux branches. D'une part l'analyse déterminée (ce que nous appellerions aujourd'hui l'algèbre), qui fait intervenir des quantités, connues ou inconnues, liées entre elles par des équations, le point important étant que ces quantités sont invariables (sont supposées n'avoir qu'une seule valeur). D'autre part, l'analyse indéterminée fait toujours intervenir des inconnues dans des équations, mais cette fois les inconnues renferment un nombre infini de valeurs. Prony ayant pour visée dans ce cours la méthode des différences, il s'intéresse à l'analyse indéterminée, et est donc amené à placer les fonctions au centre de son cours.

Il donne une définition de ce concept dès l'introduction : une fonction est "une expression analytique, de forme quelconque", faisant intervenir une ou plusieurs variables. Il est à noter qu'une fonction peut être donnée explicitement ou implicitement, comme solution d'une équation. Le caractère univoque ne semble donc pas requis pour une fonction. L'auteur précise également qu'il aura recours pour désigner les fonctions à des "signes de fonctions", par exemple $\Phi(x, y)$, $f(x)$, qui désignent donc une "manière d'être" des quantités renfermées entre les parenthèses.

Prony reste donc ambigu sur l'étendue exacte du concept de fonction. Cependant on comprend (par exemple lorsqu'il calcule les différences finies des différentes fonctions) que pour lui les fonctions sont essentiellement de deux types : les fonctions algébriques faisant intervenir dans l'expression qui les définit les quatre opérations usuelles ainsi que l'élévation à une puissance rationnelle, et les fonctions transcendantes qui font intervenir des logarithmes, des exponentielles et des fonctions trigonométriques.

Enfin, il est à noter que l'auteur consacre les deux premières leçons qui suivent l'introduction à expliquer comment on peut tirer des équations à deux, puis à trois variables le fait qu'une variable est fonction des autres.

2 La Méthode des différences comme fil conducteur

La dérivée d'une fonction f est en général introduite, de nos jours, en formant le rapport

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

puis en prenant $\Delta x = 0$. Le calcul des différences, tel que pratiqué par Prony, consiste à étudier ce rapport, ou simplement la différence

$$f(x+\Delta x)-f(x)$$

sans prendre $\Delta x = 0$. Cette approche a constitué une branche des mathématiques, très active au XIIIe siècle et au début du XIXe siècle. Prony s'inscrit donc dans un mouvement étudié par Jean-Pierre Lubet dans l'article "Le calcul aux différences finies, une nouvelle branche de l'analyse" (*Sciences mathématiques 1750-1850 Continuités et ruptures*, sous la direction de Christian Gilain et Alexandre Guilbaud). Cet article analyse aussi l'apport original du cours de Prony par rapport aux autres travaux consacrés à ce thème. On se contente ici de rendre compte la présentation que Prony fait de cette méthode, et du lien qu'il établit avec le calcul différentiel.

Ce dernier n'est pas l'objet du cours de Prony, qui est explicitement consacré à la méthode exacte et inverse des différences. Cependant la dernière leçon, plus longue que les autres, traite du calcul différentiel, ce qui ne permet pas de décider si celui-ci un point culminant ou marginal du cours de Prony. Cette disposition des matières amène également l'auteur à adopter un point de vue particulier sur le calcul différentiel, fondé sur la méthode des différences.

2.1 La Méthode directe des différences

Prony introduit les différences d'une fonction dès qu'il a dit ce qu'il avait à dire sur le concept de fonction : il définit les différences premières d'une fonction d'une variable, puis d'une fonction de plusieurs variables. Étant donnée une variable z exprimée comme une fonction f des variables indépendantes $x, y, t, \ldots$, il note $\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)$ la quantité

$$\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right) = \frac{f(x+\Delta x, y, t, \ldots) - f(x, y, t, \ldots)}{\Delta x}$$

et il note qu'il faut bien distinguer cette expression de la même sans parenthèses $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ dans laquelle la variation de z est calculée sans considérer les variables $y, t, \ldots$ Enfin, Prony introduit les différences de tous ordres d'une fonction. Considérant $z = \phi(x, y, t, \ldots)$, il considère une infinité de valeurs pour les variables, $x, x', x'', \ldots, x^{(n)}, \ldots,\ y, y', y', \ldots, y^{(n)}, \ldots$, etc. Il en déduit autant de valeurs pour z, $z, z', z'', \ldots, z^{(n)}, \ldots$ et peut ainsi former les "différences premières" $\Delta z = z' - z, \Delta z' = z'' - z', \ldots,$ puis les "différences secondes" $\Delta^2 z = \Delta z' - \Delta z, \Delta^2 z' = \Delta z'' - \Delta z', \cdots$ et ainsi de suite en posant

$$\Delta^n z = \Delta^{n-1} z' - \Delta^{n-1} z, \Delta^n z' = \Delta^{n-1} z'' - \Delta^{n-1} z', \cdots$$

De simples considérations calculatoires lui permettent alors d'établir les "théorèmes fondamentaux" qui établissent les "rapports généraux" des différences :

$$\begin{aligned}
\Delta^{(n)} z &= z^{(n)} - nz^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1.2} z^{(n-2)} - \cdots + (-1)^n z \\
z^{(n)} &= \Delta^{(n)} z + n\Delta^{(n-1)} z + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta^{(n-2)} z + \cdots + z \\
z &= z^{(n)} - n\Delta z^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta^2 z^{(n-2)} - \cdots + (-1)^n \Delta^n z
\end{aligned}$$

où l'on reconnaît l'équivalent de la formule de Taylor à la deuxième ligne.

Une fois définies les différences finies, Prony donne immédiatement leur expression pour les fonctions connues. Il consacre ainsi une leçon aux différences des fonctions "algébriques", une leçon aux différences des fonctions exponentielles et logarithmes et une leçon aux différences des fonctions trigonométriques. Les démonstrations des formules pour les différences des fonctions transcendantes sont l'objet d'un supplément aux leçons correspondantes, et se font avec un point de vue géométrique, notamment pour le logarithme, pour lequel Prony travaille sur la courbe de l'exponentielle.

2.2 La Méthode inverse des différences

La deuxième étape de l'exposition de la méthode des différences par Prony est la présentation qu'il fait de la méthode inverse des différences, qui est à l'intégration ce que la méthode des différences est à la dérivation. Prony utilise d'ailleurs le terme "intégration" pour désigner cette méthode. Une "équation différentielle" d'ordre n étant une équation faisant intervenir les différences d'ordre au plus n d'une certaine fonction, la méthode inverse des différences consiste à déduire d'une équation différentielle d'ordre n une équation différentielle d'ordre inférieure, voire la fonction primitive elle-même. Prony introduit la notation Σ pour désigner l'opération d'intégration :

$$\Delta^{n-m} z = \Sigma^m (\Delta^n z)$$

Il remarque la nécessité d'introduire une constante arbitraire à chaque itération de l'opération d'intégration, mais ne semble pas gêné par le caractère non univoque de la notation Σz.

Il consacre en revanche une leçon à établir la distinction entre l'"intégration" et la "sommation", déplorant que de nombreux ouvrages utilisent ces deux termes de façon interchangeable, ce qui entretient la confusion : "L'intégration des fonctions et la sommation des suites ont entre elles des rapports intimes, tels que lorsqu'on ne s'est pas fait une idée nette de ces deux opérations, on les confond souvent l'une avec l'autre ; cette erreur peut être entretenue par la lecture de plusieurs traités où les mots *somme* et *intégrale* sont employés comme synonymes". Étant donnée une fonction z, on peut considérer différentes valeurs de z correspondant à différentes valeurs de son argument :

$$z^{(0)}, z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(n)}, \dots$$

qui donnent lieu d'une part à l'intégrale $\Sigma z^{(k)}$, qui fait intervenir une constante arbitraire, d'autre part à la somme de ces valeurs considérées comme une suite :

$$Sz^{(k)} = z^{(0)} + \cdots + z^{(k)}$$

Prony donne une relation permettant de lier les deux :

$$\Sigma z^{(n)} + A = Sz^{(n)} - z^{(n)}$$

les deux notions diffèrent donc par un décalage d'indice, ainsi que par le fait que $\Sigma z^{(0)}$ est une constante arbitraire, compensée par A dans la formule. Cependant, dans la suite de la leçon, consacrée aux intégrales et aux sommes des fonctions puissances d'une variable, Prony s'empresse de poser $A = 0$. La mise en regard de l'intégration et de la sommation montre la proximité entre la méthode des différences et l'étude des suites, que Prony exploite tout au long de son cours.

Prony introduit ensuite naturellement les intégrales et sommes de tous ordres, et consacre de nombreuses leçons à l'intégration d'équations différentielles linéaires, à coefficients constants puis variables. Les dernières leçons (hormis la toute dernière) sont consacrées aux équations aux différences partielles.

2.3 Passage de la méthode des différences au calcul différentiel

Seule la dernière leçon est consacrée au calcul différentiel, mais c'est l'une des plus longue. Prony y explique d'abord comment déduire les résultats du calcul différentiel (essentiellement la formule de Taylor) de ceux qu'il a obtenus pour la méthode des différences, puis il expose une série d'applications du calcul différentiel. Il justifie la rapidité de son exposition du calcul différentiel en renvoyant au cours de Lagrange : "J'offre ici aux élèves le résumé des six séances pendant lesquelles je les ai entretenus des principes fondamentaux du calcul *différentiel* ; *Lagrange* a traité cette matière, par une méthode particulière et nouvelle, avec la supériorité qui caractérise toutes ses conceptions ; on imprime ses leçons, et cette circonstance m'engage à supprimer tous les détails relatifs à l'exposition des principes et à la pratique de la différenciation.".

Prony affirme ainsi que le calcul différentiel se caractérise par l'existence d'une "loi de *continuité* entre les quantités variables" et nous fait savoir qu'il a expliqué aux élèves ce qu'il entendait par "continuité", sans le retranscrire par écrit. Il se contente d'appliquer cette loi de continuité pour démontrer la formule de Taylor à partir de la formule correspondante qu'il a montrée dans le cadre de la méthode des différences. Considérant une fonction z d'une variable x, Prony remarque qu'on peut diviser l'intervalle Δx en k morceaux pour tout entier k : $\Delta x = k\delta x$. Il nomme $\delta^{(i)}z$ les différences d'ordres $\leq k$ de z associées et invoque la formule

$$\Delta z = k\delta z + \frac{k(k-1)}{1.2}\delta^2 z + \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\delta^3 z + \cdots$$

et en déduit, en introduisant $k\delta x$ à chaque terme :

$$\Delta z = (k\delta x)\frac{\delta z}{\delta x} + \frac{1\left(1-\frac{1}{k}\right)}{1.2}(k\delta x)^2\frac{\delta^2 z}{(\delta x)^2} + \frac{1\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)}{1.2.3}(k\delta x)^3\frac{\delta^3 z}{(\delta x)^3} + \cdots$$

ce qui s'écrit également

$$\Delta z = (\Delta x)\frac{\delta z}{\delta x} + \frac{1\left(1-\frac{1}{k}\right)}{1.2}(\Delta x)^2\frac{\delta^2 z}{(\delta x)^2} + \frac{1\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)}{1.2.3}(\Delta x)^3\frac{\delta^3 z}{(\delta x)^3} + \cdots$$

Prony remarque ensuite que le nombre k peut prendre toutes les valeurs possibles, donc de même la fraction $\frac{1}{k}$ et qu'il peut en particulier lui donner la valeur 0. Il note alors, pour cette valeur particulière de k, $\frac{dz}{dx}$ plutôt que $\frac{\delta z}{\delta x}$, ce qui lui donne la formule de Taylor

$$\Delta z = (\Delta x)\frac{dz}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{1.2}\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{(\Delta x)^3}{1.2.3}\frac{d^3 z}{dx^3} + \cdots$$

Prony n'apporte aucun détail supplémentaire sur ce qu'il entend par "la fraction $\frac{1}{k}$ peut avoir toutes les valeurs possibles" et "Parmi toutes les hypothèses que l'on peut faire sur $\frac{1}{k}$, la plus remarquable est celle de $\frac{1}{k} = 0$". Il ne s'inquiète nullement de l'existence d'une valeur de $\frac{\delta z}{\delta x}$ correspondante, ni de la convergence du membre de droite de la formule de Taylor, qui comporte une infinité de termes. Il n'est cependant pas exclu qu'il ait été plus explicite sur la conception qu'il avait de ces choses lors des six séances de cours qu'il a consacrées au calcul différentiel (mais rien n'indique dans le texte qu'il en ait été ainsi).

La suite de la leçon est une sorte de catalogue d'applications du calcul différentiel, sans lien logique les unes avec les autres. Prony, qui se veut succin, renvoie fréquemment à des traités d'autres auteurs, notamment Lagrange, Lacroix pour son *Traité du calcul différentiel et intégral*, Arbogast à propos de la théorie des osculations, Fourier. Dans un paragraphe intitulé "Méthode pour interpoler, par de simples additions et soustractions, un nombre quelconque de termes entre deux termes données d'une suite numérique", il se lance dans un exposé historique sur le problème qu'il traite, et qui prend sa source dans les travaux de 1670 de l'astronome lyonnais Mouton, aidé par son ami François Regnauld, et il cite les fructueuses contributions à ce problème des géomètres du cadastre Lans et Haros.

3 Un dialogue constant entre les domaines

Le cours de Prony est ponctué de nombreuses remarques sur des thèmes autres que la méthode des différences (et le calcul différentiel au dernier chapitre), qui parfois sont nécessaires à l'auteur pour l'exposé de son sujet, et parfois lui permettent de souligner les nombreuses applications des concepts qu'il enseigne aux élèves. En particulier, Prony fait beaucoup intervenir la géométrie dans son cours, les questions de tangentes et d'aires délimitées par des courbes étant intimement liées au sujet central de son exposé. Le cours est également ponctué de remarques et résultats sur les fractions rationnelles. On va s'attarder sur les liens intimes qu'il établit entre la méthode des différences et la question des suites récurrentes, ainsi que sur les applications du calcul différentiel qu'il considère. Prony fait également référence à des questions de physique, son cours lui permettant de parler de méthodes d'interpolation.

3.1 Application à la physique

Le cours qu'on étudie ici constitue la première section d'un cours qui s'intitule "Introduction à la mécanique". Il est cependant frappant que les exemples utilisés par Prony soient presque exclusivement tirés des mathématiques. L'auteur fait une seule escapade hors de ce domaine dans un supplément appelé "Essai expérimental et analytique sur les lois de la Dilatabilité des fluides élastiques et sur celles de la Force expansive de la vapeur de l'eau et de la vapeur de l'alkool, à différentes températures". Comme son nom l'indique, ce supplément est en fait un lieu d'exposition de travaux originaux de Prony sur les gaz. L'auteur en profite pour exposer sa vision des sciences physiques.

Pour lui, la physique se divise en deux activités, avec d'une part la mesure et d'autre part l'explication des phénomènes. Cette dernière consiste en la décomposition des phénomènes physiques complexes en phénomènes simples. Il en déduit que la physique "nous [permet] de soulever une des extrémités du voile qui couvre [la nature], tient l'autre attachée par un nœud que nous notre main ne saurait délier". Mais ce qui intéresse Prony dans son cours sur la méthode des différences est la première tâche des physiciens, la mesure, et plus précisément les problèmes d'interpolation qu'elle soulève. Il entend par là à la fois la correction (le lissage) des mesures, et la recherche d'une fonction liant les variables du phénomène observé et cohérente avec les mesures. Il insiste sur le fait que cette fonction doit nécessairement être unique : "Le problème d'interpolation a donc deux parties très-distinctes ; dans l'une, on se propose de satisfaire à des nombres donnés ; dans l'autre, on cherche parmi toutes les fonctions qui remplissent cette condition, quelle est celle qui convient à l'espèce particulière des phénomènes qu'on traite."

Dans la première partie de cet essai, Prony expose donc la méthode d'interpolation qu'il utilise dans son mémoire. Appliquant la méthode des différences, il montre, lorsqu'on veut connaître la variation d'une grandeur z fonction d'une grandeur x, comment déduire de mesures z_I, z_{II}, z_{III} correspondant à des valeurs de x, x_I, x_{II}, x_{III} non nécessairement équidistantes, des mesures z_I, z, z_{III} correspondant à des valeurs x_I, x, x_{III} équidistantes, puis il s'occupe de trouver une expression pour z à partir de ces mesures, en introduisant des expressions du type

$$z = \mu_I \rho_I^x + \mu_{II} \rho_{II}^x + \cdots + \mu_{(n)} \rho_{(n)}^x$$

où n est la moitié du nombre de mesures effectuées.

La suite de l'essai est consacrée à l'application de la méthode qu'il a établie en première partie. Il recherche d'abord les lois de dilatabilité des gaz oxygène, azote, nitreux, hydrogène, carbonique et ammoniacal en utilisant les données d'expériences "faites par Prieur, et rapportées par Guyton". Ensuite il s'intéresse à la force expansive de la vapeur d'eau et de l'alcool, à partir d'expériences de Bettencourt publiées en 1790.

3.2 L'Étude des suites récurrentes

On a déjà vu que Prony fait le rapprochement entre les différentes valeurs d'une fonction z correspondant à différentes abscisses x fixées et les suites, lorsqu'on a évoqué l'importance pour l'auteur de la distinction entre intégrale d'une fonction et somme d'une suite. Prony consacre plusieurs leçons, au cours de l'exposé de la méthode des différences, à l'étude des suites récurrentes. C'est notamment le cas lorsqu'il entreprend de résoudre les équations différentielles linéaires de tous ordres. Il fait alors jouer un rôle crucial aux suites vérifiant la relation de récurrence (x étant un entier quelconque)

$$Az_{(x)} + A'z_{(x+1)} + \cdots + A^{(n)}z_{(x+n)} = 0$$

En effet, il écrit

$$\begin{aligned}
z_{(x+1)} &= z_{(x)} + \Delta z_{(x)} \\
z_{(x+2)} &= z_{(x)} + 2\Delta z_{(x)} + \Delta^2 z_{(x)} \\
&\vdots \\
z_{(x+n)} &= z_{(x)} + n\Delta z_{(x)} + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 z_{(x)} + \cdots + \Delta^n z_{(x)}
\end{aligned}$$

Il montre que la recherche du terme général de la suite $z_{(x)}$ correspond à la résolution d'une équation différentielle

$$\lambda z_{(x)} + \lambda'\Delta z_{(x)} + \lambda''\Delta^2 z_{(x)} + \cdots + \Delta^n z_{(x)} = 0$$

Les coefficients λ pouvant être obtenus à partir des coefficients A et réciproquement. Il résout alors le problème en considérant la suite récurrente, comme nous avons l'habitude de le faire aujourd'hui : "Je remarque que si les indices $(x), (x+1), \ldots, (x+n)$ étaient transformés en exposans d'une quantité constante a, cette équation serait divisible par a^x, ce qui ferait disparaître l'indéterminée x ; je fais donc $z_{(x)} = a^x$, d'où $z_{(x+1)} = a^{x+1}$..." Il se ramène à la détermination des racines d'un polynôme pour trouver a, ce qui lui donne le terme général à quelques constantes près, qu'il détermine avec les conditions initiales.

3.3 Applications du calcul différentiel

Comme on l'a déjà dit, la longue leçon consacrée au calcul différentiel passe vite sur l'introduction des notions et consiste surtout en une série d'applications de ce calcul.

Il commence par s'intéresser à l'usage que l'on peut faire des différentielles dans la méthode des différences. Il donne ainsi une expression de $\Delta^n z$ à partir de la formule de Taylor ainsi que l'accroissement d'une fonction de plusieurs variables en fonction de ses différentielles partielles. Il s'intéresse ensuite au moyen d'obtenir les différentielles de différents ordres d'une courbe donnée et de son aire. Il trace pour cela les polynômes de différents degrés tangents à la courbe en chaque point.

Prony donne également une solution pour le problème d'interpolation suivant : étant données $z_I, z_{II}, \ldots, z_{(n)}$ des valeurs d'une fonction z correspondant à des valeurs de x séparées par Δx, intercaler entre z_I et z_{II} m valeurs $z', z'', \ldots, z^{(m)}$ correspondant à des abscisses séparées de δx. C'est ce problème qui fait suite aux travaux de l'astronome Mouton pour calculer les diamètres de la Terre et du Soleil. C'est cette partie du cours qui est mise en valeur et expliquée en termes contemporains dans l'article de Jean-Pierre Lubet cité précédemment.

Il applique également le calcul différentiel à la résolution des équations. Il présente notamment la méthode de Newton pour trouver numériquement les solutions d'une équation, et l'utilise pour l'élimination des "fonctions arbitraires". Il montre par exemple que l'équation $z = \phi(x^2 + y^2)$ implique $\frac{dz}{dx} = x\frac{dz}{dy}$ cette seconde forme ne faisant pas intervenir la fonction inconnue ϕ.

Il donne ensuite les critères sur la dérivée et la dérivée seconde d'une fonction pour déterminer si un point est un minimum ou un maximum, et étend ce résultat aux fonctions de plusieurs variables. Enfin, Prony consacre un long développement sur la théorie de l'osculation. Il introduit cette notion avec des courbes quelconques, définissant l'ordre d'osculation en un point comme le plus grand nombre tel que les dérivées d'ordre inférieur des deux courbes sont égales en ce point. Il considère ensuite le cas où la deuxième courbe est un cercle pour définir le cercle osculateur et le rayon osculateur d'une courbe.

Conclusion

Le cours de Gaspard de Prony, qui consiste en une présentation riche et détaillée de la méthode des différences finies, ne se cantonne pas à ce sujet et aborde plusieurs autres thèmes des mathématiques et également de la physique. Il fournit en particulier un exemple de conception de la notion de différentielle juste avant l'effort concentré sur l'exigence de rigueur des mathématiciens du XIXe siècle. Le fait que Prony ne prétende à aucune originalité dans sa leçon sur le calcul différentiel (se déchargeant de cette tâche sur Lagrange), laisse penser que cette dernière est représentative de l'idée que se font les mathématiciens de la différentielle à cette époque. Par ailleurs, il se peut que le contenu des leçons imprimées, manifestement très proche de la façon dont le professeur exposait les concepts en cours, et les remarques concernant le cours oral qui figurent dans le volume à notre disposition, rendent ce dernier intéressant du point de vue plus particulier de l'histoire de l'enseignement.

A Titres des leçons du cours de Prony

N°1 Notions générales sur l'analyse indéterminée
N°2 Des Équations à deux variables
N°3 Des Équation à trois variables
N°4 Des Différences premières
N°5 Des différences premières partielles des fonctions et des équations à plusieurs variables
N°6 De la notation des différences de tous ordres
N°7 Rapports généraux des différences, indépendans de toute relation particulière entre les variables
N°8 Formules pour calculer les différences des fonctions algébriques d'une seule variable
N°9 Différences des fonctions transcendantes d'une seule variable
Supplément au N°9 Démonstrations de ces formules
N°10 Suite des formules pour calculer les différences des fonctions transcendantes d'une variable
Supplément au N°10 Démonstration des formules qui donnent la valeur des lignes trigonométriques fonction des arcs
N°11 Formules des différences des fonctions de plusieurs variables, et exposition de quelques propriétés des suites, déduites de la théorie précédente
N°12 Considérations sur les principes de la méthode inverse des différences
N°13 Distinction entre les intégrales et les sommes des fonctions
N°14 Intégration et sommation des fonctions composées de facteurs en progression arithmétique, avec une application aux séries des nombres figurés
N°15 Application de la méthode des coefficients indéterminés à l'intégration des fonctions rationnelles
N°16 Sommation des produits un à un, deux à deux, trois à trois etc d'une suite de quantités croissant par intervalles égaux
N°17 Intégrales et sommes de différents ordres
N°18 Transformations réciproques des transcedantes imaginaires en transcendantes réelles, forme générale des facteurs doubles qui donnent les imaginaires, détermination des facteurs de $x^\mu \pm \rho^\mu$, théorème de Côtes, etc
N°19 Introduction à l'inégration des équations linéaires de tous ordres ; application de la méthode différentielle de Newton à la détermination des constantes, avec la condition de satisfaire à un certain nombre d'observations ou de valeurs données, méthode d'interpolation qui en résulte
N°20 Intégration complète des équations de la forme $Az_{(x)} + A'z_{(x+1)} + A''z_{(x+2)} + \cdots + A^{(n)}z_{(x+n)} = 0$, A, A', A'' etc étant des coefficients constants
N°21 Des suites récurrentes considérées comme résultant du développement des fractions rationnelles ; rapprochement de la théorie qui résulte de cette considération et de celle du calcul intégral ; propriétés générales des suites récurrentes
Supplément aux N°s 20 et 21 Essai expérimental et analytique sur les

lois de dilatabilité des fluides élastiques et sur celles de la Force expansive de la vapeur d'eau et de la vapeur de l'alkool, à différentes températures

N°22 De la décomposition des fonctions fractionnaires rationnelles en fractions partielles

N°23 Intégration complète de l'équation $A_{(x)}z_{(x)} + A'_{(x)}z_{(x+1)} + A''_{(x)}z_{(x+2)} + A'''_{(x)}z_{(x+3)} + \cdots + A^{(n)}_{(x)}z_{(x+n)} = X_{(x)}$, $A_{(x)}$, $A'_{(x)}$, $A''_{(x)}$, etc, $X_{(x)}$ étant des fonction de x ; d'où l'on déduit l'intégration complète des équations linéaires, résolues n°20, lorsque le second memebre, au lieu d'être zéro, est une fonction quelconque de x

N°24 De l'intégration des équations différentielles dans lesquelles on ne suppose aucune différence constante

N°25 Considérations sur les équations différentielles élevées, et sur la multiplicité des intégrales qu'on en déduit

N°26 Des fonctions arbitraires qui doivent compléter les intégrales

N°27 Des équations aux différences partielles

N°28 Intégration de l'équation en différences partielles

N°29 D'un algorithme particulier fondé sur l'analogie entre les indices de différence et les exposans de puissance

N°30 Du passage de la méthode des différences à celle du calcul différentiel. Divers théorèmes importants et en partie nouveaux, dont la démonstration et l'énonciation dépendent de la nature de ce calcul et de la notation qui lui est propre

Références

[1] Gaspard-Marie Riche de Prony, *Leçons d'analyse données à l'École centrale des travaux publics.* an III.

[2] Sous la direction de Christian Gilain & Alexandre Guilbaud, *Sciences mathématiques, 1750-1850 Continuités et ruptures.* CNRS Éditions, 2015.

[3] Amy Dahan-Dalmedico & Jeanne Peiffer, *Une histoire des mathématiques, Routes et dédales.* Éditions du Seuil, 1986.