Autour des structures projectives holomorphes

Gustave Billon

Table des matières

Introduction

Ce mémoire, écrit à l'occasion de mon stage de M2, porte sur les structures projectives holomorphes sur les surfaces de Riemann. L'objet initial de mon stage était la lecture de l'article de Dylan G.L. Allegretti et Tom Bridgeland [1], sur les structures projectives méromorphes. Le début de celui-ci, où il est question de structures projectives holomorphes, a servi de base aux discussions que j'ai eues avec mon encadrant de stage, Sorin Dumitrescu, que je remercie chaleureusement. Ces échanges ont porté sur des objets équivalents, plus généraux, ou adjacents aux structures projectives holomorphes, et ont permi d'élargir mon point de vue sur ces dernières. C'est essentiellement leur contenu qui constitue ce mémoire.

La section 1 vise à introduire les (G, X)-structures, qui fournissent un cadre géométrique général, dont les structures projectives sont un cas particulier, et dans lesquelles des notions comme la monodromie ont un sens. On commence par y présenter d'autres cadres possibles pour faire de la géométrie, notamment les espaces homogènes (G, X), qui fournissent les modèles pour les (G, X)-structures, et on mentionne les géométries de Cartan, qui sont une autre possibilité pour généraliser la notion d'espace homogène. On introduit également, dans le cadre des fibrés principaux, les notions de transport parallèle et de monodromie, cette dernière étant omniprésente dans l'étude des structues projectives holomorphes. La section se termine sur l'énoncé du théorème 11, qui caractérise une (G, X)-structure en termes du G-fibré principal qui lui est associé.

La section 2 s'intéresse de façon spécifique aux structures projectives holomorphes sur les surfaces de Riemann. La particularité de celles-ci est le lien étroit qui lie structures projectives et équations différentielles linéaires d'ordre 2 : certaines de ces équations, dites globalisables, donnent naissance à une structure projective holomorphe, et réciproquement toute structure projective holomorphe provient d'une équation globalisable. Ce recours aux équations différentielles d'ordre 2 permet d'associer aux structures projectives sur une surface de Riemann deux sortes d'objets : d'une part les différentielles quadratiques de la surface de Riemann en question, d'autre part les PGL_2-opers, qui sont donnés par des fibrés vectoriels sur la surface.

Ces deux objets, différentielles quadratiques et fibrés vectoriels sur une surface de Riemann, motivent les deux dernières sections du mémoire. Celles-ci traitent d'objets moins généraux que la section 1 et moins directement liés aux structures projectives que la section 2. Dans la section 3, on explore quelques propriétés des fibrés en droites sur une surface de Riemann quelconque, notamment leur degré, puis on étudie plus spécifiquement les fibrés vectoriels sur le modèle des structures projectives, qui est la sphère de Riemann $P^1(\mathbb{C})$. Enfin, la section 4 explore à son tour quelques propriétés des différentielles quadratiques sur une surface de Riemann. Comme toute 1-forme donne lieu, élevée au carré, à une différentielle quadratique, le fait d'admettre une 1-forme pour une surface de Riemann est d'une certaine manière plus fort que le fait d'admettre une différentielle quadratique. On commence donc par voir ce qu'on peut faire avec une 1-forme, différentielle puis holomorphe, avant de dire quelques mots sur les différentielles quadratiques holomorphes.

1 Les (G, X)-structures

La notion de (G, X)-structure peut être vue comme une manière de définir de façon abstraite ce qu'est une géométrie sur une variété différentielle, à savoir une structure qui fait ressembler localement la variété à un espace homogène. Dans cette section, nous commençons par introduire la notion d'espace homogène, nous nous attardons quelque peu sur le cas où le groupe d'isotropie est compact, auquel cas on peut définir une métrique riemannienne sur l'espace homogène en question, puis nous mentionnons la façon dont Cartan généralise la notion d'espace homogène, et la façon dont Ehresmann généralise la notion de géométrie de Cartan. Nous introduisons ensuite le transport parallèle dans le cadre des G-fibrés principaux munis d'une connexion d'Ehresmann, ce qui permet de définir ce qu'est une connexion d'Ehresmann plate, puis ce qu'est la monodromie d'une telle connexion. Nous finissons avec la définition de (G, X)-structure, et le lien entre (G, X)-structure et connexion d'Ehresmann (plate).

1.1 Différents cadres pour la géométrie

1.1.1 Espace homogène

Soit G un groupe de Lie et H un sous-groupe fermé. On voit aisément que l'action à droite de H sur G est libre et propre, donc $\pi : G \to G/H$ est une une submersion entre variétés différentielles, d'après [2], théorème 7.10. Chaque fibre de π est de plus difféomorphe à H, par le difféomorphisme $h \mapsto gh$, où g est un élément de la fibre considérée. On voit que si l'on dispose d'une section locale $x \mapsto s(x) \in \pi^{-1}(x)$ définie d'un ouvert de $X = G/H$ vers G, on obtient une trivialisation de π sur U en posant $\phi(h, x) = (s(x)h, x)$, qui est un difféomorphisme de $H \times U$ vers $\pi^{-1}(U)$. On voit de plus que les applications de transitions pour un recouvrement de telles trivialisations forment un cocycle de X à valeurs dans le groupe de Lie H : c'est un élément du groupe $H^1(X, \mathcal{C}^\infty(X, H))$. Or un recouvrement de X par des sections existe toujours, par exemple d'après le théorème de structure des submersions.

La submersion $G \to X$ est donc un fibré principal de fibre H. Remarquons que dans ce cas la forme de Maurer-Cartan ω de G, définie par $\omega_g(v) = (dL_g^{-1})_g(v) \in \mathfrak{g}$ identifie l'espace tangent aux fibres $\ker d\pi$ à l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de H, de façon équivariante entre l'action de H à droite sur les fibres et son action adjointe sur $\mathfrak{h}$: $\omega_{gh}(dR_h v) = ad(h^{-1})(\omega_h v)$.

Le fibré tangent de X est isomorphe au quotient $TG/\ker d\pi$. Une connexion est un sous-fibré E de TG, invariant par l'action de H, en restriction auquel π réalise un difféomorphisme entre E et TX : E_g est un supplémentaire de $\ker d\pi_g$ en tout point g. En particulier, une connexion fournit un moyen de relever les champs de X en champs sur G.

1.1.2 Cas où le groupe d'isotropie est compact

Dans le cas où le groupe H est compact, l'espace quotient X est muni d'une métrique riemannienne invariante par G. En effet, si α est un produit scalaire quelconque sur $\mathfrak{g}$, on obtient un produit scalaire $\tilde{\alpha}$ invariant par H en posant $\tilde{\alpha}(v, w) = \int_{h \in H} \alpha(ad(h)v, ad(h)w) d\mu$, où $d\mu$ est la mesure de Haar de H. Par conséquent, comme $\mathfrak{h}$ est invariante par l'action de H, son othogonal $\mathfrak{h}^\perp$ est également invariant par l'action de H, le translaté à gauche de $\mathfrak{h}^\perp$ est invariant par l'action de H à droite, et fournit donc une connexion E de G. L'invariance du produit scalaire $\tilde{\alpha}$ par l'action adjointe de H sur $\mathfrak{g}$ signifie que le translaté de $\tilde{\alpha}$ par l'action à gauche de G sur la connexion E est invariante par l'action à droite de H, et l'identification $E_g \simeq (TX)_{\pi(g)}$ définit une métrique riemannienne sur X.

1.1.3 Connexion de Cartan et d'Ehresmann

Soit $\sigma : M \to X$ un H-fibré principal, avec H un sous-groupe fermé du groupe de Lie G. Dans ce cas, on peut définir, par analogie avec le cas d'un espace homogène, une forme différentielle, appelée forme de Maurer-Cartan, sur les fibres de σ à valeurs dans $\mathfrak{h}$ en posant $\omega_x = d\phi_x^{-1}$ où $\phi : H \to xH$ identifie la fibre au-dessus de $\sigma(x)$ à H par $\phi(h) = x \cdot h$.

On appelle connexion de Cartan sur M une forme différentielle ω sur M à valeurs dans $\mathfrak{g}$ qui coïncide avec la forme de Maurer-Cartan de H en restriction aux fibres et équivariante par rapport à l'action à droite de H et à l'action adjointe de H sur $\mathfrak{g}$.

Théorème 1. *Si $d\omega + 1/2[\omega, \omega] = 0$, alors pour tout $x \in X$, il existe un voisinage U de x, un voisinage V de $\pi(e)$ et un isomorphisme de fibrés de $\sigma^{-1}(U) \subset M$ vers $\pi^{-1}(V) \subset G$.*

Soit $\sigma : M \to X$ un H-fibré principal, avec H un groupe de Lie. On appelle connexion d'Ehresmann sur M une forme différentielle α sur M à valeurs dans $\mathfrak{h}$ qui coïncide avec la forme de Maurer-Cartan de H en restriction aux fibres et équivariante par rapport à l'action à droite de H et à l'action adjointe de H sur $\mathfrak{h}$. En considérant $\ker \alpha$, on obtient un sous-fibré vectoriel de TM en tout point supplémentaire au noyau de la projection $\ker d\sigma$ et qui est invariant par l'action de H sur TM donnée par $(h, v) \mapsto dR_h(v)$. Réciproquement, étant donné un sous-fibré A de TM qui vérifie ces deux propriétés, on obtient une connexion d'Ehresmann en considérant la première projection dans la somme directe $T_xM = \ker d\sigma_x \oplus A_x$, et en composant avec la forme de Maurer-Cartan définie sur $\ker d\sigma$.

Supposons que H soit un sous-groupe fermé d'un groupe de Lie G. On peut construire à partir de M un G-fibré principal sur X, obtenu en "étendant" les fibres de M à G tout entier : considérons l'action de H sur la variété produit $M \times G$ définie par $(m, g) \cdot h = (mh, h^{-1}g)$. Cette action est libre et propre, et le quotient $\theta : M \times G \to (M \times G)/H = \widetilde{M}$ est une sumersion entre variétés différentielles. L'algèbre de Lie de H s'identifie au noyau $(\ker d\theta)_{(m,g)}$ par $v \mapsto (v, -ad(g^{-1})(v))$, où on a identifié $\ker d\sigma_m$ et $\ker d\pi_g$ à $\mathfrak{h}$. Si l'on dispose d'une connexion d'Ehresmann ϵ sur $\widetilde{M}$, on obtient une connexion de Cartan sur M en prenant $\omega(v) = \epsilon(\theta(v, 0))$. Réciproquement, une connexion de Cartan ω sur M donne une connexion d'Ehresmann ω sur $\widetilde{M}$ en posant $\epsilon(v, w) = ad(g^{-1})\omega(v) + \lambda(w)$ où λ est la connexion de Maurer-Cartan sur G.

1.2 Holonomie, fibrés plats et monodromie

Dans cette sous-section, nous considérons un groupe de Lie H et un H-fibré principal $\sigma : M \to X$ muni d'une connexion d'Ehresmann $\alpha \in H^0(M, \Omega^1_M \otimes \mathfrak{h})$. Nous allons nous intéresser à ce qui se passe si l'on transporte un point de M selon la connexion α, le long d'un chemin dans X.

Étudions d'abord le cas général, sans hypothèse particulière sur la connexion α. Soit γ un chemin lisse dans X. Dans cette sous-section, pour faciliter les notations (en particulier pour que les flots soient définis sur $\mathbb{R}$ tout entier), nous appelons chemin lisse dans X une application lisse de $\mathbb{R}$ dans X, qui est constante sur $]-\infty, 0]$ et sur $[1, +\infty[$. Tout lacet au sens classisque, c'est-à-dire une application lisse $[0, 1] \to X$, peut être reparamétré pour entrer dans cette définition. Le fibré $\gamma^*\sigma : \gamma^*M \to \mathbb{R}$ est un H-fibré principal sur $\mathbb{R}$, muni d'une connexion d'Ehresmann β obtenue en tirant en arrière a connexion α. Considérons le champ de vecteurs V constant égal à 1 sur $\mathbb{R}$. La connexion β permet de relever V en un champ $\widetilde{V}$ de γ^*M, qui donne lieu à un flot $\Phi : \mathbb{R} \times \gamma^*M \to \gamma^*M$. Étant donné un point a dans la fibre $(\gamma^*\sigma)^{-1}(1) \simeq \sigma^{-1}(\gamma(0)) = M_{\gamma(0)}$, on vérifie aisément que $\gamma^*\sigma(\Phi(t, a)) = t$ et pour $h \in H$, $\Phi(t, a \cdot h) = \Phi(t, a) \cdot h$, cette dernière égalité découlant de l'équivariance de β par rapport dR_h et à l'action adjointe de H sur son algèbre de Lie. En particulier, $\Phi(1, a)$ appartient à la fibre au-dessus de 1 de γ^*M, qui s'identifie à la fibre au-dessus de $\gamma(1)$ de M.

Définition 2. On dit que l'élément $\Phi(1, a) \in M_{\gamma(1)}$ est obtenu par transport parallèle de l'élément $a \in M_{\gamma(0)}$ le long du chemin γ. On note (dans ce mémoire) $\Phi(1, a) = \tau_\gamma(a)$.

Dans le cas particulier où γ est un lacet, c'est-à-dire $\gamma(0) = \gamma(1)$, $\Phi(1, a)$ s'écrit donc $\Phi(1, a) = a \cdot \chi_a(\gamma)$, où $\chi_a(\gamma) \in H$. Remarquons que si $a' = a \cdot h$ est un autre élément de $M_{\gamma(0)}$, on a $\Phi(1, a') = \Phi(1, a) \cdot h = a' \cdot \chi_{a'}(\gamma)$ où $\chi_{a'} = h^{-1} \cdot \chi_a \cdot h$.

Le transport parallèle est invariant par changement de paramétrage : si $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application lisse et croissante avec $\phi(0) = 0$ et $\phi(1) = 1$, on a $\tau_{\gamma\circ\phi}(a) = \tau_\gamma(a)$. En effet, si l'on considère le tiré-en arrière par ϕ du fibré $\gamma^*\sigma : \gamma^*M \to \mathbb{R}$, on obtient le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[dr, dashed, "f"] \arrow[drr, bend left, "\Phi(a,\cdot\circ\phi)"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}"'] & & \\
& \phi^*\gamma^*M \arrow[r] \arrow[d, two heads, "\phi^*\gamma^*\sigma"] & \gamma^*M \arrow[d, two heads, "\gamma^*\sigma"] \\
& \mathbb{R} \arrow[r, "\phi"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

où la fonction f est obtenue à partir de $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ et $\Phi(a, \cdot \circ \phi)$ par la propriété universelle du tiré-en-arrière. On vérifie que la fonction f ainsi construite est la courbe intégrale partant de $a \in M_{\gamma(0)}$ et correspondant, sur le modèle du paragraphe précédent, au champ de vecteur qui est le relevé du champ unitaire sur $\mathbb{R}$ par le tiré-en-arrière (par $\gamma \circ \phi$) de la connexion d'Ehresmann. La commutativité du diagramme, et le fait que c'est un tiré-en-arrière, montre ensuite $f(1) = \Phi(1, a) \in M_{\gamma(1)}$, ce qui montre bien $\tau_{\gamma\circ\phi}(a) = \tau_\gamma(a)$. Une fois connue cette invariance par changement de paramétrage, on peut se convaincre que si γ_1 et γ_2 sont deux chemins lisses de X tels que $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, alors la concaténation $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ vérifie $\tau_{\gamma_1\cdot\gamma_2}(a) = \tau_{\gamma_2}(\tau_{\gamma_1}(a))$, pour tout $a \in M_{\gamma_1(0)}$. En particulier, si γ_1 et γ_2 sont des lacets basés en un même point $x = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, on a $\chi_a(\gamma_1 \cdot \gamma_2) = \chi_a(\gamma_1) \cdot \chi_a(\gamma_2)$. De même, on peut se convaincre que $\chi_a(\gamma^{-1}) = \chi_a(\gamma)^{-1}$.

Définition 3. Le morphisme de groupes défini ci-dessus

$$\{\text{lacets lisses de } X \text{ basés en } x\} \to H$$

est appelé morphisme d'holonomie basé en x.

Comme nous l'avons déjà remarqué plus haut, le morphisme d'holonomie basé en x dépend d'un choix de point dans la fibre au-dessus de x, et n'est en fait défini qu'à conjugaison au but par un élément de H près.

Dans le cas particulier où le sous-fibré $\ker \alpha$ est intégrable, transport parallèle et holonomie sont grandement simplifiés.

Définition 4. La connexion α est dite plate si le noyau de $d\alpha$, qui est un sous-fibré de TM, est intégrable, c'est-à-dire si en tout point $p \in M$, il existe une sous-variété $V \subset M$ avec $p \in V$ et en tout point $q \in V$, $T_qV = \ker \alpha_q$, ou encore α définit un feuilletage.

Remarque 5. La définition ci-dessus s'applique pour les connexions sur les fibrés lisses en général, c'est-à-dire les sous-fibrés du tangent de l'espace total, supplémentaires au fibré tangent aux fibres. Le travail sur le transport parallèle effectué dans cette section s'applique aussi pour ces connexions plus générales. L'holonomie et la monodromie serait à valeurs dans l'ensemble des difféomorphismes de la fibre, qui n'est pas un groupe de Lie.

Remarquons que comme $\ker \alpha$ est supplémentaire de $\ker d\sigma$, si V est une sous-variété intégrale locale de $\ker \alpha$ et $q \in V$, la restriction $d\sigma|_{T_qV}$ est un isomorphisme, donc par le théorème d'inversion locale, quitte à la restreindre, V est une section locale du fibré $M \to X$. La condition d'intégrabilité signifie donc qu'il existe une trivialisation de $M \to X$, associée à un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ et à un cocycle $(g_{ij})_{i,j \in I}$, dont les sections locales sont des variétés intégrales de $\ker \alpha$. De plus, comme le groupe H agit sur M par difféormorphismes, pour tout $h \in H$, $V \cdot h$ est également une sous-variété, et comme $\ker \alpha$ est par définition invariant par l'action à droite de H, $V \cdot h$ est aussi une intégrale de $\ker \alpha$. Le fait que l'action de H soit transitive sur les fibres et l'unicité de la variété intégrale passant par un point donné montrent que si V_p est une variété intégrale passant par $p \in M$ et V_q un autre passant par $q = p \cdot h$, alors $V_q = V_p \cdot h$, au-dessus des points de X où les deux sections sont définies. Ainsi, dans le cas où la connexion est plate, les applications $g_{ij} : U_i \cap U_j \to H$ sont constantes.

Réciproquement, si le fibré $M \to X$ est défini par un cocycle $(g_{ij})_{i,j \in I}$ constant, donné par des sections locales s_i, le sous-fibré A de TM donné par $A_{s_i(x) \cdot h} = dR_h(ds_i(T_xX))$ est bien défini, est en tout point supplémentaire à $\ker d\sigma$ et admet comme intégrales les $s_i(U_i) \cdot h$ où i parcourt I et h parcourt H. On en déduit la proposition suivante :

Proposition 6. *La donnée d'un H-fibré principal muni d'une connexion plate équivaut à la donnée d'un cocycle constant dans $H^1(X, H)$*

Dans la suite de la sous-section, nous supposons que α est une connexion plate, et nous appelons $\mathcal{F}$ le feuilletage défini par α.

Soit U un ouvert connexe de X et $s : U \to M$ une section plate de M (c'est-à-dire $s(U)$ est contenu dans une feuille de $\mathcal{F}$). Si γ est un chemin lisse de U, la construction du transport parallèle qu'on a effectué plus haut donne que $\tau_\gamma(s \circ \gamma(0))) = s \circ \gamma(1)$. En particulier, si γ_1 et γ_2 sont deux chemins dans U de mêmes extrémités, c'est-à-dire $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ et $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$, alors $\tau_{\gamma_1} = \tau_{\gamma_2}$.

Réciproquement, supposons que U soit un ouvert connexe de X tel que si γ_1 et γ_2 sont deux chemins de mêmes extrémités, alors $\tau_{\gamma_1} = \tau_{\gamma_2}$. On peut alors définir une application s de U vers M, qui commute avec σ, en fixant $x_0 \in X$, $a \in M_{x_0}$ et en posant pour $x \in U$ $s(x) = \tau_\gamma(a)$, où γ est un chemin de x_0 à x, $s(x)$ ne dépendant pas du choix de γ. Le paragraphe précédent montre de plus que pour chaque ouvert $V \subset U$ sur lequel est définie une section plate, l'application s coïncide avec une section plate au-dessus de V. Donc s est une section plate définie sur U. Le lemme-clé pour cette sous-section est le suivant :

Lemme 7. *Si γ est un lacet de X, basé en $x \in X$, homotope au lacet constant, alors le transport parallèle τ_γ induit par γ dans le fibré plat M est l'identité de M_x.*

Démonstration. En reprenant les conventions du début de la sous-section, γ peut être vu comme une application lisse de $\mathbb{R}$ dans X constante en-dehors du segment $[0,1]$, et le lacet constant comme une application définie sur $\mathbb{R}$ constante égale à x. Une homotopie entre γ et le lacet constant est une application lisse $T : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to M$, constante en-dehors de $\mathbb{R} \times [0,1]$ et avec $T_0(t) = \gamma(t)$ et $T_1(t) = x$.

Supposons tout d'abord que le fibré au-dessus de $\mathbb{R}^2$, T^*M, admette une section plate s définie sur un voisinage V du carré $[0,1] \times [0,1]$. Alors la restriction $(T^*M)|_V$ est le fibré trivial $V \times H$, muni de sa connexion naturelle. Il est alors aisé de voir que τ_γ est bien l'identité de M_x.

Il suffit donc de montrer qu'une telle section s existe. On peut se donner une suite finie d'ouverts connexes $U_0, \ldots, U_n$ tels que pour tout k avec $1 \leq k \leq n$, $U_k \cap V_{k-1}$ est connexe et non vide, où $V_{k-1} = U_0 \cup \cdots \cup U_{k-1}$, et tels qu'il existe sur chaque U_k une section plate de T^*M (par exemple, on se donne un recouvrement fini de $[0,1]^2$ par des ouverts admettant une section plate, ce qui donne un nombre $\delta > 0$ avec pour tout $p \in [0,1]^2$, la boule $B(p,\delta)$ est contenue dans un des ouverts du recouvrement précédent. On pose alors $U_{k+l} = B((k\delta + l\delta, \delta)))$. On montre alors par récurrence qu'il existe une section plate s_k au-dessus de V_k. C'est vrai pour V_1. Si c'est vrai pour V_k, alors il existe une section plate s_k au-dessus de V_k et une section plate r_k au-dessus de U_{k+1}. Quitte à modifier r_k en la multipliant par un élément de H, r_k et s_k coïncident en un point de $V_k \cap U_k$, qui est connexe. Or d'après les remarques précédant le lemme 7, il existe au plus une section plate au-dessus d'un ouvert connexe de X et passant par un point donné, cette section étant donnée par le transport parallèle du point en question. Donc s_k et r_k coïncident sur $U_k \cap V_k$, et on pose $s_{k+1} = s_k$ sur V_k et $s_{k+1} = r_k$ sur U_k. Ceci termine la démonstration du lemme 7.

□

En particulier, le morphisme d'holonomie basé en $x \in X$ factorise en un morphisme de groupes de $\pi_1(X,x)$ vers H

Définition 8. Soit $x \in X$. On appelle morphisme de monodromie basé en $x \in X$ du fibré plat M le morphisme (défini à conjugaison au but près) $\pi_1(X,x) \to H$ induit par le morphisme d'holonomie basé en x.

Une autre conséquence du lemme 7 est que si U est un ouvert simplement connexe, alors le transport parllèle le long d'un chemin γ de U ne dépend que des extrémités de γ. Comme nous l'avons vu plus haut, cela implique qu'il existe une section plate (donc en particulier une trivialisation locale) définie sur U. On en déduit la proposition suivante :

Proposition 9. *Si $\phi : M \to X$ est un fibré plat et $\pi : \widetilde{X} \to X$ le revêtement universel de X, alors le tiré-en-arrière π^*M est le fibré trivial sur $\widetilde{X}$, muni de sa connexion naturelle.*

1.3 (G, X)-structures

Soit G un groupe de Lie, X une variété différentielle (complexe), tels que G agit à gauche sur X de façon lisse (holomorphe) et transitive. En particulier, il existe un sous-groupe fermé H de G et un isomorphisme $X \simeq G/H$. Supposons de plus que si les actions de deux éléments g_1 et g_2 de G coïncident sur un ouvert non vide de X, alors $g_1 = g_2$.

Définition 10. On appelle (G, X)-structure la donnée d'une variété différentielle (complexe) M, d'un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de M, d'applications $\phi_i : U_i \to X$ qui sont des difféomorphismes (biholomorphismes) sur leur image, et tels que pour tous $i, j \in I$, il existe un élément g_{ij} de G tel que pour $x \in U_i \cap U_j$, $\phi_i(x) = g_{ij} \cdot \phi_j(x)$

On voit que comme l'élément neutre est le seul élément de G dont l'action est triviale sur un ouvert de X, la famille $(g_{ij})_{i,j \in I}$ est un cocycle constant de M à valeurs dans G. Il définit donc un fibré plat E_X (c'est-à-dire muni d'une connexion plate) de fibre X sur M, pour lequel la famille (ϕ_i) constitue une section notée ϕ. Le fait que les ϕ_i soient des difféomorphismes sur leur image signifie exactement que la section ϕ est transverse à la connexion, c'est-à-dire que l'espace tangent à l'image de la section ϕ est en tout point supplémentaire à l'espace horizontal de la connexion. On voit facilement que la donnée d'une (G, X)-structure sur M est équivalente à la donnée d'un fibré plat de fibre X sur M, muni d'une section transverse.

Un cocycle constant (g_{ij}) sur M à valeurs dans G définit un G-fibré principal E_G sur M, muni d'une connexion plate. La donnée d'une section ϕ du fibré E_X de fibre $X = G/H$ défini par le même cocycle équivaut à la donnée d'une réduction du fibré E_G au sous-groupe H. En effet, la projection (quotient par l'action de H à droite sur E_G) $E_G \to E_X$ est un H-fibré principal, de cocycle h_{kl} défini sur un recouvrement ouvert $(V_k)_{k \in K}$ de E_X. La composition de ϕ avec la trivialisation du fibré $E_G \to E_X$ associée au cocycle (h_{kl}) est une trivialisation de $E_G \to M$ de cocycle h_{kl}, défini sur le tiré-en-arrière du recouvrement (V_{kl}) par ϕ. Réciproquement, la donnée d'une réduction de E_G à H consiste (quitte à raffiner le recouvrement (U_{ij})) en un cocycle h_{ij} sur M à valeurs dans H équivalent à (g_{ij}). Par conséquent il existe une famille $(s_i)_{i \in I}$ d'applications $U_i \to G$ avec $g_{ij}s_j = s_i h_{ij}$. La famille (s_i) définit une section de E_X, ce qui montre la réciproque. Par ailleurs, une réduction du fibré E_G au sous-groupe de Lie H définit un H-fibré principal E_H sur M, sous-fibré de E_G. On vérifie que la section ϕ associée à la réduction est transverse à la connexion de E_X si et seulement si E_H est transverse à la connexion de E_G (c'est-à-dire que l'espace tangent de E_H est supplémentaire à la connexion de E_G). Le fibré E_X est alors égal au quotient E_G/E_H.

Toutes ces considérations se résument dans le théorème suivant :

Théorème 11. *Soient G, H et X comme précédemment, M une variété différentielle ou complexe. Les données suivantes sont équivalentes :*

(i) Une (G, X)-structure

(ii) Un fibré E_X sur M de fibre X et de groupe structural G, muni d'une connexion plate et d'une section globale transverse à la connexion

(iii) Un G-fibré principal E_G muni d'une connexion plate, ainsi qu'un sous-fibré E_H de fibre H, tel que le fibré tangent TE_H est transverse à la connexion de E_G

Le point (iii), qui associe un G-fibré principal à une (G, X)-structure, permet d'appliquer la section 1.2 au cas des (G, X)-structures. On peut donc parler de transport parallèle et de monodromie sur une telle structure.

Pour plus de précision sur les géométrie de Cartan et d'Ehresmann, ainsi que sur les (G, X)-structures, on peut se reporter à [5]

2 Structures projectives holomorphes

Soit S une surface de Riemann connexe. Nous étudions dans cette section les structures projectives holomorphes sur S, c'est-à-dire les (G, X)-structures, où $X = P^1(\mathbb{C})$ et $G = PSL_2(\mathbb{C})$. Le fait remarquable que nous présentons est qu'il y a un lien très étroit entre les structures projectives holomorphes sur S et les équations différentielles d'ordre 2 sur S. Cette particularité permet d'une part de munir l'ensemble des structures projectives holomorphe sur S d'une structure d'espace affine, dont l'espace vectoriel sous-jacent est l'espace des différentielles quadratiques holomorphes sur S, et d'autre part d'introduire la catégorie des PGL_2-opers, qui est équivalente à la catégorie des strucures projectives holomorphes sur S. La sous-section 2.1 est (très) largement inspirée du chapitre VIII de [4].

2.1 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 sur une surface de Riemann

On appelle équation différentielle d'ordre 2 sur un ouvert U de S une équation de la forme

$$y''(z) + \lambda(z)y'(z) + \mu(z)y(z) = 0$$

où z est une coordonnée holomorphe sur U, λ et μ sont des fonctions holomorphes. On ne peut définir la dérivée seconde d'une fonction sur une surface de Riemann (voir l'appendice A), donc la formulation d'une équation différentielle d'ordre 2 comme ci-dessus dépend du choix de la coordonnée, mais la forme de l'équation (linéaire d'ordre 2) est conservée par un changement de coordonnée qui préserve les solutions.

L'espace des solutions d'une telle équation (E), quitte à restreindre l'ouvert U, est un espace vectoriel de dimension 2. En particulier, si u_1 et u_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de (E), le quotient u_1/u_2 est une fonction méromorphe sur U, donc une application $U \to P^1(\mathbb{C})$. On vérifie de plus que la dérivée de u_1/u_2 ne s'annule jamais, ce qui en fait un biholomprphisme local. Si v_1 et v_2 sont deux autres solutions linéairement indépendantes de (E), il existe $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $v_1 = au_1 + bu_2$ et $v_2 = cu_1 + du_2$ On a donc que le biholomorphisme local v_1/v_2 vérifie $v_1/v_2 = h \circ u_1/u_2$, où h est l'homographie $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. On vient de constater qu'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 sur un ouvert U de S définit une structure projective holomorphe sur la surface de Riemann U, dont les cartes sont les quotients de solutions indépendantes de (E).

Un fait fondamental dans l'étude de ces équations est le théorème suivant :

Théorème 12. *Soient (E_1) et (E_2) deux équations différentielles linéaires d'ordre 2 sur un ouvert simplement connexe U de S. Les assertions suvantes sont équivalentes :*

- *(i) L'ensemble des quotients de solutions indépendantes de (E_1) coïncide avec l'ensemble des quotients de solutions indépendantes de (E_2)*
- *(ii) Un quotient quelconque de solutions indépendantes de (E_1) est obtenu à partir d'un quotient quelconque de solutions indépendantes de (E_2) en composant par une homographie*
- *(iii) Il existe une fonction holomorphe k sans zéro ni pôle telle que toute solution de (E_2) s'écrit kv, où v est une solution de (E_1)*

Démonstration. L'équivalence $(i) \iff (ii)$ découle du fait, constaté plus haut, que les quotients de solutions indépentantes de (E_1) diffèrent les uns des autres par la composition avec des homographies. L'implication $(iii) \Rightarrow (i)$ est immédiate. Il reste donc à montrer $(ii) \Rightarrow (iii)$. Or dans le cas où (i) est vérifié, si u_1 et u_2 sont des solutions indépendantes de (E_1), il existe v_1 et v_2 solutions de (E_2) avec $u_1/u_2 = v_1/v_2$. Prenons $k = u_2/v_2$, qui est une fonction méromorphe telle que $u_1 = kv_1$ et $u_2 = kv_2$. Si u est une solution de (E_1), il existe $a, b \in \mathbb{C}$ avec $u = au_1 + bu_2 = k(av_1 + bv_2)$. De plus, si k admet un zéro (respectivement un pôle) en $x \in U$, alors toutes les solutions de (E_1) (respectivement de (E_2)) admettent un zéro en x, ce qui contredit le théorème de Cauchy-Lipschitz.

□

Deux équations (E_1) et (E_2) sur un ouvert U qui vérifient les conditions ci-dessus sont dites projectivement équivalentes. Elles définissent la même structure projective sur U. Si $(U_i)_{i \in I}$ est une famile d'ouverts de S et $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'équations définies sur les U_i qui sont projectivement équivalentes en restriction aux intersections $U_i \cap U_j$, alors elles définissent une structure projective holomorphe sur la réunion $U = \bigcup_{i \in I} U_i$.

Remarquons que l'on peut associer à une telle famille d'équations projectivement équivalentes un cocycle constant sur U à valeurs dans $GL_2(\mathbb{C})$. Voici comment. Quitte à restreindre les U_i (quitte en particulier à prendre les U_i simplement connexes), on peut supposer que les ensembles de solutions des (E_i) sont non vides, donc de dimension 2. Soit donc u_i une solution de (E_i) pour chaque i. Comme les (E_i) sont projectivement équivalentes, il existe pour chaque couple (i, j) une fonction sans zéro ni pôle k_{ij} définie sur l'intersection $U_i \cap U_j$ et telle que $u_i = k_{ij} u_j$. Considérons à présent pour chaque i une base de solutions (u_i^1, u_i^2). Pour chaque couple (i, j) les fonctions $k_{ij} u_j^1$ et $k_{ij} u_j^2$ sont solutions de (E_i) sur $U_i \cap U_j$. Par conséquent il existe $g_{ij} \in GL_2(\mathbb{C})$ tel que $\begin{pmatrix} u_i^1 \\ u_i^2 \end{pmatrix} = g_{ij} \begin{pmatrix} k_{ij}u_j^1 \\ k_{ij}u_j^2 \end{pmatrix}$. Il est aisé de constater que les g_{ij} vérifient une relation de cocycle et définissent donc un fibré principal plat de fibre $GL_2(\mathbb{C})$. Il faut toutefois noter que la classe du cocycle obtenu dans $H^1(S, GL_2(\mathbb{C}))$ dépend du choix des fonctions k_{ij}.

Remarquons de plus que d'après le principe de prolongement analytique, deux structures projectives sur S qui coïncident sur un ouvert non vide sont égales. Donc la structure projective définie sur U_1 par (E_1) s'étend en au plus une structure projective sur S. Il est donc naturel de poser la définition suivante :

Définition 13. Soit (E) une équation différentielle linéaire d'ordre 2 sur un ouvert U de S. On dit que (E) est globalisable s'il existe un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de S et des équations $(E_i)_{i\in I}$ définies sur les U_i, projectivement équivalentes sur les intersections $U_i \cap U_j$ et projectivement équivalentes à (E) sur les intersections $U_i \cap U$. Les équations globalisables (E_i) sont alors dites équivalentes à (E).

D'après ce qui précède, une équation globalisable (E) définit une structure projective holomorphe sur S. Si $(g_{ij})_{i,j\in I}$ est le cocycle associé à un ensemble d'équations $(E_i)_{i\in I}$ projectivement équivalentes à (E) (et entre elles) et définies sur un recouvrement ouvert de S, alors on obtient un cocycle pour la structure projective associée à E en prenant $(\overline{g_{ij}})$, où $\overline{g_{ij}}$ est la projection de g_{ij} dans $PSL(2, \mathbb{C})$. En particulier, une (G, X) structure associée à une équation globalisable (où $G = PSL(2, \mathbb{C})$ et $X = P^1(\mathbb{C})$) provient d'une (G', X)-structure, où $G' = GL_2(\mathbb{C})$. Toutefois, il existe plusieurs relèvement possibles de la (G, X)-structure dans une (G', X)-structure.

Remarquons pour clore cette sous-section que toute structure projective sur S provient d'une équation globalisable. En effet, étant donnée une structure projective $\mathcal{P}$ sur S, $\mathcal{P}$ consiste en un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ et des coordonnées w_i sur les U_i, obtenus diiférant sur les intersections par un élément de $PGL(2, \mathbb{C})$. Les solutions des équations $(E_i) : y''(w_i) = 0$ sont les fonctions du type $aw_i + b$ où a et b sont des constantes. Les quotients de solutions des (E_i) sont donc exactement les coordonnées de la structure projective $\mathcal{P}$, donc les (E_i) sont des équations globalisables équivalentes et $\mathcal{P}$ est la structure projective associée.

2.2 Structures projectives et différentielles quadratiques

Soit (U, z) une carte de S et $(E) : y''(z) + \lambda(z)y'(z) + \mu(z)y(z)$ une équation différentielle linéaire sur U. On dit que l'équation (E) est réduite dans la coordonnée z si $\lambda = 0$, c'est-à-dire (E) s'écrit $y''(z) + \mu(z)y(z) = 0$. D'après le théorème 12, pour toute équation (E') projectivement équivalente à (E), il existe une fonction holomorphe k sans zéro définie sur U telle que pour toute solution x de (E') il existe une solution y de (E) qui vérifie $y = k \cdot x$. Alors la fonction (kx) vérifie (dans la coordonnée z) : $(kx)'' + \lambda(kx)' + \mu(kx) = 0$, donc $kx'' + (2k' + k\lambda)x' + (k'' + k'\lambda + k\mu)x = 0$, et enfin comme k ne s'annule pas : $x'' + (2k'/k + \lambda)x' + (k''/k + \lambda k'/k + \mu)$. On voit que (E') est réduite si et seulement si $2k'/k = -\lambda$, auquel cas (E') s'écrit $x'' + (-\lambda'/2 - \lambda^2/4 + \mu)x = 0$. On en déduit qu'il existe exactement une équation d'ordre 2 sur U projectivement équivalente à (E) et réduite dans la coordonnée z.

Par ailleurs, un calcul montre que si y_1 et y_2 sont deux solutions indépendantes de (E), et si on note $\mathcal{S}(f)$ la dérivée schwarzienne d'une fonction holomorphe définie sur un ouvert de $\mathbb{C}$ (voir l'annexe A.2) alors les quotient de solutions de l'équation

$$(\widetilde{E}) : y''(z) + \mathcal{S}\left(\frac{y_1(z)}{y_2(z)}\right) y(z) = 0$$

coïncide avec les quotients de solution de (E). Ceci montre que l'équation $(\widetilde{E})$ est l'unique équation réduite projectivement équivalente à (E). Récapitulons :

Proposition 14. *Étant données une classe $\mathcal{E}$ d'équations projectivement équivalentes sur un ouvert U de S, ainsi qu'une coordonnée z sur U, il existe une unique équation représentante de $\mathcal{E}$ réduite dans la coordonnée z. De plus, si w est le quotient de deux solutions d'un représentant de $\mathcal{E}$, l'unique représentant de réduit de $\mathcal{E}$ pour z est l'équation $y''(z) + \mathcal{S}(w(z))y(z) = 0$*

Supposons donnée une structure projective $\mathcal{P}$ sur S, et considéreons une équation globalisable (E) définie sur un ouvert U. Comme il est mentionné dans l'annexe A.2, la dérivée schwarzienne des quotients de solutions des équations globalisables équivalentes à (E) dans une coordonnée projective de $\mathcal{P}$ peut être définie comme une différentielle quadratique : il existe une différentielle quadratique globale ϕ sur S telle que si V est un ouvert de S sur lequel sont définis z une coordonnée projective pour $\mathcal{P}$ et w un quotient de solutions d'une équation globalisable équivalente à (E), alors $\phi = \mathcal{S}(w(z))dz^{\otimes 2}$. La proposition 14 assure donc en particulier que si (V, z) est une carte de la structure projective $\mathcal{P}$ dans laquelle ϕ s'écrit $\phi = \varphi(z)dz^{\otimes 2}$, alors l'équation $y''(z) + \varphi(z)y(z)$ est globalisable et équivalente à (E). En fixant une structure projective de base, on peut donc associer à toute équation globalisable une différentielle quadratique globale, et à chaque différentielle quadratique globale une équation globalisable, unique à équivalence près. Ces remarques, ajoutées au fait constaté plus haut que toute structure projective sur S provient d'une équation globalisable, amène au théorème suivant :

Théorème 15. *Il existe une bijection naturelle entre l'ensemble des structures projectives holomorphes sur la surface de Riemann S et l'espace des différentielles quadratiques globales sur S*

Démonstration. Le seul point, crucial, que nous avons éludé jusqu'ici, est l'existence d'une structure projective holomorphe sur S. Nous nous contenterons de remarquer que le théorème d'uniformisation en fournit une.

□

2.3 GL_2-opers

Dans cette sous-section, nous nous intéressons aux (G', X)-structures, où $G' = GL(2, \mathbb{C})$ et $X = P^1(\mathbb{C})$. Ceci concerne les structures projectives, c'est-à-dire les (G, X)-structures avec $G = PGL(2, \mathbb{C})$, puisqu'on a vu que toute (G, X)-structure peut être relevée en une (G', X)-structure.

Une (G', X)-structure correspond à la donnée d'un cocycle constant (g_{ij}) défini sur S à valeurs dans $GL(2, \mathbb{C})$, et d'une section $s = ([1 : s_i])_{i \in I}$ du fibré associé de fibre $P^1(\mathbb{C})$ (avec s_i une fonction méromorphe sur U_i, $[1 : s_i] = g_{ij}[1 : s_j]$), tels que s est transverse, ce qui revient à ds_i partout non nulle (et $d(1/s_i)$ non nulle au voisinage des pôles de s). Le cocycle plat (g_{ij}) peut être vu comme celui d'un fibré vectoriel de rang 2 sur S, muni d'une connexion plate ∇. La section s correspond à la donnée en chaque point $x \in U_i$ d'un vecteur non nul $v_i(x)$ de E_x dont l'expression dans les coordonnées de la trivialisation correspondant au cocycle (g_{ij}) est $(1, s_i)$ (ou $(1/s_i, 1)$ au voisisnage des pôles de s_i), avec $v_i(x)$ et $v_j(x)$ colinéaires si $x \in U_i \cap U_j$. Donc s correspond à la donnée d'un sous-fibré en droites $L \subset E$. Enfin, le fait que ds_i et $d(1/s_i)$ sont non nulles implique que pour toute section locale l de L sur un ouvert U, la connexion $\nabla l : TU \to E$ ne prend jamais de valeur dans L. Autrement dit, le morphisme de faisceaux

$$\theta : L \to E \xrightarrow{\nabla} E \otimes \omega_S \to (E/L) \otimes \omega_s$$

est un isomorphisme, où la première et la dernière flèche sont respectivement l'inclusion et le quotient. On pose donc naturellement la définition suivante :

Définition 16. On appelle (GL_2)-oper sur la surface de Riemann S un fibré vectoriel holomorphe E de rang 2, muni d'une connexion plate ∇ ainsi que d'un sous-fibré en droites L, tels que l'application θ définie ci-dessus est un isomorphisme de faisceaux.

À toute (G', X)-structure $\mathcal{G}$, donnée par un cocycle plat (g_{ij}) et une section transverse $([1 : s_i])$, est naturellement associée une (G, X)-structure, donnée par le cocycle quotient $(\overline{g_{ij}})$ et la même section s. Une autre (G', X)-structure $\mathcal{G}'$ donne la même (G, X)-structure si et seulement s'il existe (quitte à raffiner le recouvrement ouvert sous-jacent) une famille (k_{ij}) de fonctions holomorphes constantes qui ne s'annulent pas telles que $\mathcal{G}'$ est donnée par le cocycle $(k_{ij}g_{ij})$ et la même section $([1 : s_i])$.

Du côté des GL_2-opers, cela se traduit par la relation d'équivalence suivante : deux opers (E, ∇, L) et (E', ∇', L') sur S sont équivalents si et seulement s'il existe un fibré en droites R sur S muni d'une connexion ∇_R tel que $E' = E \otimes R$, $L' = L \otimes R$ et $\nabla' = \nabla \otimes \mathrm{Id}_R + \mathrm{Id}_E \otimes \nabla_R$.

Définition 17. On appelle PGL_2-oper une classe d'équivalence de GL_2-opers pour la relation d'équivalence décrite ci-dessus.

Comme toute (G, X)-structure se relève en une (G', X)-structure, la donnée d'un PGL_2-oper équivaut à la donnée d'un GL_2-oper.

Remarque 18. Étant donné un espace vectoriel V et une droite vectorielle $D \subset E$, on verifie qu'on a un isomorphisme $\det(V) = V \wedge V \simeq (V/D) \otimes L$. Si (E, L, ∇) est un GL_2-oper, on a donc un isomorphisme de fibrés $\det(E) \simeq (E/L) \otimes L$. En particulier, l'isomorphisme θ ci-dessus implique $L \otimes L \simeq L \otimes (E/L) \otimes \omega_S \simeq \det(E) \simeq \omega_S$. Donc si l'oper (E, L, ∇) est un SL_2-oper, i.e. si le cocycle plat (g_{ij}) qui définit le fibré E est à valeurs dans $SL(2, \mathbb{C})$ (ou encore si l'oper (E, L, ∇) représente une $(SL(2, \mathbb{C}), X)$-structure), le fibré end droites L est une racine carrée du fibré cotangent ω_S. Or tout GL_2-oper (E, L, ∇) est équivalent à un SL_2-oper. Cela vient du fait qu'en notant $\rho : \pi_1(S) \to GL(2, \mathbb{C})$ le morphisme de monodromie du fibré E, il existe un morphisme $\widetilde{\rho} : \pi_1(S) \to SL(2, \mathbb{C})$ tels que ρ et $\widetilde{\rho}$ coïncident après projection dans $PGL(2, \mathbb{C})$: il suffit de choisir une racine carrée r_i pour chaque $\rho([\gamma_i])$, où $([\gamma_1], \ldots, [\gamma_{2g}])$ est une famille génératrice de $\pi_1(S)$, avec $g = \dim H^0(S, \omega_S)$, et de poser $\widetilde{\rho}([\gamma_i]) = r_i^{-1}\rho([\gamma_i])$. En particulier, il y a 2^{2g} choix pour $\widetilde{\rho}$, donc autant de SL_2-opers dans chaque classe d'équivalence de GL_2-opers. L'étude du degré des fibrés en droites sur une surface de Riemann que nous allons mener à la section suivante permet de montrer que l'ensemble des SL_2-opers dasn une classe d'équivalence donnée de GL_2-opers est en bijection avec l'ensemble des racines carrées du fibré cotangent ω_S (voir la remarque 28).

Remarque 19. L'unique structure projective sur la sphère de Riemann $P^1(\mathbb{C})$ est donnée par le GL_2-oper $(\mathcal{O}(1), \mathcal{O}^{\otimes 2}, \nabla)$, où $\mathcal{O}$ est le fibré trivial sur $P^1(\mathbb{C})$, $\mathcal{O}(1)$ est le fibré tautologique et ∇ est la connexion naturelle. L'oper associé à une (G', X)-structure $\mathcal{P}'$ sur la surface S est obtenu à partir de $(\mathcal{O}(1), \mathcal{O}^{\otimes 2}, \nabla)$ de la façon suivante : à $\mathcal{P}'$ est associée une application développante $f : \widetilde{S} \to P^1(\mathbb{C})$, où $\widetilde{S}$ est le revêtement universel de S. De plus la monodromie $\rho : \pi_1(S) \to GL(2, \mathbb{C})$ associée à $\mathcal{P}^1$ définit une action de $\pi_1(S)$ sur le tiré-en-arrière $f^*\mathcal{O}^{\otimes 2}$, équivariante à l'action de $\pi_1(S)$ sur $\widetilde{S}$ et préservant le sous-fibré en droites$f^*\mathcal{O}(1)$. Le quotient $(f^*\mathcal{O}(1)/\pi_1(S), f^*\mathcal{O}^{\otimes 2}/\pi_1(S), f^*\nabla/\pi_1(S))$ est un GL_2-oper sur S, correspondant à la (G', X)-structure $\mathcal{P}'$.

3 Fibrés vectoriels sur une surface de Riemann

On a vu apparaître, à la section précédente, un lien étroit entre structures projectives sur une surface de Riemann S et fibrés vectoriels sur S, par le biais de la notion de PGL_2-oper. Nous nous intéressons donc dans cette section à quelques propriétés des fibrés vectoriels sur S. La première sous-section est consacrée au degré d'un fibré en droites, le fait principal étant qu'un fibré en droites est de degré nul si et seulement s'il est topologiquement trivial. La seconde sous-section est consacrée à un théorème de structure, dû à Grothendieck, des fibrés vectoriels (de tout rang) sur la sphère de Riemann. Elle est motivée par la remarque 19, qui affirme que tout oper sur S est localement modelé sur l'injection $\mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O}^{\otimes 2}$ sur $P^1(\mathbb{C})$.

3.1 Degré d'un fibré en droites sur une surface de Riemann

Soit S une surface de Riemann compacte. La donnée d'un fibré en droites sur S à isomorphisme près correspond à la donnée d'une classe de cohomologie dans $H^1(S, \mathcal{O}^*)$. Une section méromorphe d'un fibré en droites L sur S, de cocycle (g_{ij}), défini pour un recouvrement ouvert (U_i), est donnée par une famille de fonctions méromorphes (s_i) sur les ouverts U_i telles que sur les intersections $U_i \cap U_j$ on ait $s_i = g_{ij}s_j$. En particulier les zéros et les pôles d'une telle section sont bien définis, et comme s est compacte le principe des zéros isolés assure que s admet un nombre fini de zéros et de pôles. On définit le diviseur d'une telle fonction comme la somme formelle $\Delta = \sum_{x \in S} n_x x$, où n_x est l'ordre d'annulation de s en x (strictement positif pour un zéro, strictement négatif pour un pôle). On pose $\deg(s) = \sum_{x \in S} n_i$. On dispose de la proposition suivante :

Proposition 20. *Tout fibré vectoriel sur S admet des sections méromorphes non nulles.*

Démonstration. Soit E un fibré vectoriel sur S de dimension n, soit $x \in S$, $m \in \mathbb{N}$ et soit $\mathcal{O}_S(m[x])$ le fibré en droites associé au diviseur $m[x]$. On a une suite exacte courte de faisceaux :

$$0 \to E \to E \otimes \mathcal{O}_S(m[x]) \to P_{m[x]} \to 0$$

où $P_{m[x]}$ est le faisceau des parties polaires de dimension n et d'ordre au plus m en x, qui est isomorphe à un faisceau gratte-ciel concentré en x et dont la fibre au-dessus de x est le groupe $\mathbb{C}^{nm}$. En particulier on a une suite exacte en cohomologie $H^0(S, E \otimes \mathcal{O}_S(m[x])) \to H^0(S, P_{m[x]}) \to H^1(S, E)$, avec $H^0(S, P_{m[x]}) \simeq \mathbb{C}^{nm}$. En choisissant m tel que $mn > \dim(H^1(S, E))$, on a $H^0(S, E \otimes \mathcal{O}_S(m[x])) \neq 0$, ce qui signifie que E admet a moins une section non nulle avec un pôle d'ordre au plus m en x, et holomorphe ailleurs.

□

Par ailleurs, on définit un entier pour chaque fibré en droites L de S, appelé première classe de Chern et noté $c_1(L)$, de la façon suivante. La composition des fonctions holomorphes de S avec l'exponentielle de $\mathbb{C}$ donne lieu à la suite exacte de faisceaux suivante :

$$0 \to \mathbb{Z}_S \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_S^* \to 0$$

qui donne en cohomologie une suite exacte longue, dont une partie est

$$H^1(S, \mathcal{O}_S) \to H^1(S, \mathcal{O}_S^*) \to H^2(S, \mathbb{Z}_S)$$

Comme $H^2(S, \mathbb{Z}_S) = \mathbb{Z}$, on associe ainsi à chaque fibré en droites un entier, que l'on appelle première classe de Chern. On dispose du théorème suivant :

Théorème 21. *Le degré de toute section méromorphe d'un fibré en droites L sur S est égal à $c_1(L)$.*

Nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 22. *Deux fibrés en droites de même degré sont isomorphes en tant que fibrés différentiables.*

Pour cela, montrons d'abord le lemme suivant :

Lemme 23. *Soit $g = (g_{ij})_{i,j \in I} \in H^1(S, \mathcal{O}_S^*)$. Le cocycle g est trivial d'un point de vue différentiel (c'est-à-dire difféomorphe au fibré réel de rang 2 trivial) si et seulement s'il existe un cocycle $(f_{ij})_{i,j \in I} \in H^1(S, \mathcal{O}_S)$ avec $g_{ij} = \exp(f_{ij})$*

Démonstration. Remarquons tout d'abord qu'un fibré en droites L défini (relativement à un recouvrement ouvert (U_i)) par un cocycle (g_{ij}) est difféomorphe au fibré trivial si et seulement s'il admet une section lisse s, c'est-à-dire une famille (s_i) de fonctions lisses sur les U_i vérifiant $s_i = g_{ij} s_j$. En effet, dans ce cas, on obtient un repère global du fibré en prenant les sections s et is. L'autre sens est aisé.

Supposons donc l'existence d'un cocycle (f_{ij}) de $H^1(S, \mathcal{O}_S)$, avec $g_{ij} = \exp(f_{ij})$. (f_{ij}) définit également un cocycle du groupe $H^1(S, \mathcal{A}_S^{0,0})$, où $A_S^{0,0}$ est le faisceau des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de S dans $\mathbb{C}$. Comme le faisceau $A_S^{0,0}$ est fin (admet des partitions de l'unité), le groupe $H^1(S, \mathcal{A}_S^{0,0})$ est nul, donc il existe une famille de fonctions lisses (t_i) définies sur les U_i avec $t_i = f_{ij} + t_j$. En posant $s_i = \exp(t_i)$, on obtient alors une section lisse du fibré défini par (g_{ij})

Réciproquement, si (g_{ij}) est difféomorphe au fibré trivial, il existe une famille de fonctions lisses (s_i) avec $s_i = g_{ij}s_j$. Quitte à réduire les ouverts U_i, on peut les supposer simplement connexes. Dans ce cas il existe une famille de fonctions lisses (t_i) telles que $s_i = \exp(t_i)$. En posant $f_{ij} = t_i - t_j$, on a bien $\exp(f_{ij}) = g_{ij}$. De plus les f_{ij} vérifient évidemment la relation de cocycle et localement les f_{ij} correspondent à des déterminations locales du logarithme des g_{ij}, donc sont holomorphes. Donc la famille (f_{ij}) définit bien un cocycle de $H^1(X, \mathcal{O})$. □

Démonstration. (du théorème 22)

Remarquons tout d'abord que si L_1 et L_2 sont deux fibrés en droites holomorphes sur S, alors on a un isomorphisme de fibrés différentiables $L_1^* \otimes L_2 \simeq \mathrm{Hom}(L_1, L_2)$. Par conséquent L_1 et L_2 sont isomorphes d'un point de vue différentiel si et seulement si $L_1^* \otimes L_2$ est trivial en tant que fibré différentiable.

D'après le théorème 21, le degré est un morphisme de groupes de $H^1(S, \mathcal{O}_S^*)$ dans $\mathbb{Z}$. Par conséquent si L_1 et L_2 sont deux fibrés en droites de même degré, alors $\deg(L_1^* \otimes L_2) = 0$, donc par définition de la première classe de Chern, le cocycle de $H^1(S, \mathcal{O}_S^*)$ qui définit $L_1^* \otimes L_2$ est l'image par l'exponentielle d'un cocycle de $H^1(S, \mathcal{O}_S)$, puis le fibré $L_1^* \otimes L_2$ est difféomorphe au fibré trivial d'après le lemme 23, donc admet un repère global. Comme $L_1^* \otimes L_2 = \mathrm{Hom}(L_1, L_2)$, ce repère global définit un isomorphisme de L_1 vers L_2 □

Nous proposons une autre approche pour la preuve du théorème 22. Nous allons nous appuyer sur le lemme suivant :

Lemme 24. *Les trois assertions suivantes vérifiées*

(i) Soient X et Y des espaces topologiques, soient f et g des fonctions continues de X dans Y et E un fibré sur Y. Si f et g sont homotopes, alors les fibrés tirés-en-arrière f^*E et g^*E sont isomorphes.

(ii) Tout fibré sur un espace contractile est trivial

(iii) Tout fibré en droites complexe sur un bouquet de cercles est trivial.

Démonstration. (des points (ii) et (iii))

Supposons connu le point (i). Montrons le point (ii). Soit E un fibré sur un espace contractile X. Il existe $x \in X$ tel que l'application c constante égale à x sur X est homotope à l'identité. Par conséquent d'après le point (i), le fibré $E = \mathrm{Id}_X^* E$ est isomorphe au fibré $c^*E = E_x \times X$.

Montrons à présent le point (iii). Soit $X = C_1 \cup \cdots \cup C_n$ un bouquet de cercles et E un fibré sur X. Soit V un voisinage contractile du point d'intersection commun p des cercles du bouquet X et pour chaque k entre 1 et n, notons $U_k = C_k \backslash \{p\}$, également contractile. D'après le point (ii), le fibré E est trivial en restriction à V et à chaque U_k. Il est donc défini par les changements de trivialisation sur les ouverts $V \cap U_k$, dont les deux composantes connexes W_k^1 et W_k^2 sont homéomorphes au segment $(0, 1)$. Comme E est un fibré vectoriel complexe, les trivialisations sur les ouverts V et U_k sont décrites par des sections continues partout non nulles définies sur ces ouverts. Les changements de trivialisations sont donc décrits par des fonctions continues g_k^i $(i = 1, 2)$ définies sur les W_k^i à valeurs dans $\mathbb{C}^*$. Comme les W_k^i sont homéomorphes à $(0, 1)$, il existe des fonctions continues f_k^i à valeurs dans $\mathbb{C}$ avec $g_k^i = \exp(f_k^i)$, et un raisonnement similaire à la preuve du lemme 23 montre alors que E est trivial. □

Soit L un fibré en droites sur S, et soit $p \in S$. Soit U un voisinage de p, biholomorphe au disque unité de $\mathbb{C}$ et soit $V = S \backslash \{p\}$. Alors il existe un bouquet de cercles $X \subset V$ qui est un rétract par déformation de V, par une application $r : V \to X$. Par le point (i) du théorème 24, $L|_V$ est (topologiquement) isomorphe à $r^* L|_V$. Or d'après le point (iii) du même théorème, $L|_X$ est trivial, donc de même pour $r^* L|_V$, puis pour L_V. Le point (ii) assure en outre que $L|_U$ est topologiquement trivial. Le fibré L est donc décrit, d'un point de vue topologique, par le changement de trivialisation, défini comme une fonction de $U \cap V$ vers $\mathbb{C}^*$. De plus $U \cap V$ est homéomorphe à $\mathbb{C}^*$, donc en fixant un tel homéomorphisme on peut considérer le changement de trivialisation (topologique) de L comme une application $g : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$. L'application g admet un degré, qui caractérise sa classe d'homotopie. Le théorème 22 (dans une version topologique et non $\mathcal{C}^\infty$) découle des lemmes 25 et 26 ci-dessous.

Lemme 25. *Le degré de l'application g définie ci-dessus est le degré du fibré en droites holomorphe L*

Lemme 26. *Soient (g_{ij}) et (h_{ij}) des cocycles définis sur un espace topologique X, subordonnés à un recouvrement ouvert (U_i) et à valeurs dans un groupe de Lie G. Les classes de (g_{ij}) et (h_{ij}) sont les mêmes dans $H^1(X, G)$ dès que (g_{ij}) et (h_{ij}) sont homotopes au sens suivant : il existe des cocycles (f_{ij}^t) pour chaque $t \in [0, 1]$ tels que $f_{ij}^0 = g_{ij}$, $f_{ij}^1 = h_{ij}$ et les f_{ij} sont continues de $U_i \cap U_j \times [0, 1]$ dans G.*

Nous disposons donc de deux critères équivalents pour décider si un fibré en droites sur S est topologiquement trivial : c'est le cas si toute section méromorphe a autant de zéros que de pôles, ce qui équivaut à dire que le cocycle du fibré dans $H^1(S, \mathcal{O}_S^*)$ est l'exponentielle d'un cocycle de $H^1(S, \mathcal{O}_S)$. Nous allons montrer que cela équivaut à un troisième critère :

Théorème 27. *Un fibré en droites sur S est holomorphiquement trivial si et seulement s'il admet une connexion holomorphe.*

Démonstration. Soit $(g_{ij})_{i,j \in I}$ un cocycle de $H^1(S, \mathcal{O}^*)$ associé à un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$. Une connexion holomorphe sur le fibré défini par (g_{ij}) est donné par une famille (ω_i) de 1-formes holomorphes définies sur les U_i, telles que sur les intersections $U_i \cap U_j$ on ait $\omega_i = dg_{ij}/g_{ij} + \omega_j$. Autrement dit le fibré associé à (g_{ij}) admet une connexion holomorphe si et seulement si le cocycle (dg_{ij}/g_{ij}) est nul dans $H^1(S, \omega_S)$. Considérons le morphisme de suites exactes suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_S \arrow[r, "\cdot 2i\pi"] \arrow[d] & \mathcal{O}_S \arrow[r, "\exp"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & \mathcal{O}_S^* \arrow[r] \arrow[d, "d\log"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{C}_S \arrow[r, "\cdot 2i\pi"] & \mathcal{O}_S \arrow[r, "d"] & \omega_S \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

qui donne lieu, en cohomologie, au diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} H^1(S,\mathcal{O}_S) \arrow[r, "\exp"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & H^1(S,\mathcal{O}_S^*) \arrow[d, "d\log"] \\ H^1(S,\mathcal{O}_S) \arrow[r, "d"] & H^1(S,\omega_S) \end{tikzcd}$$

D'après le lemme 23, un fibré en droites dans $H^1(S,\mathcal{O}_S)$ est de degré nul si et seulement s'il est dans l'image de exp. Le théorème 27 revient donc au fait que l'application $d : H^1(X,\mathcal{O}_S) \to H^1(S,\omega_S)$ est nulle. Or on dispose également de la suite exacte longue en cohomologie :

$$H^0(S,\omega_S) \to H^1(S,\mathbb{C}_S) \to H^1(S,\mathcal{O}_S) \xrightarrow{d} H^1(S,\omega_S)$$

Si l'on appelle g le genre de S, on a $\dim H^0(S,\omega_S) = g$. De plus le théorème de de Rham nous assure $H^1(S,\mathbb{C}_S) \simeq H^1_{dR}(S) \otimes \mathbb{C} \simeq H_1(S,\mathbb{C})^*$, donc $\dim H^1(S,\mathbb{C}_S) = 2g$. Enfin, comme S est une courbe complexe elle est Kählérienne et la théorie de Hodge implique $H^1_{dR}(S) \otimes \mathbb{C} = H^{0,1}(S) \oplus \overline{H^{0,1}(S)}$. Donc comme $H^1(S,\mathcal{O}_S) \simeq H^{0,1}(S)$, on a $\dim H^1(S,\mathcal{O}_S) = g$. Ceci implique que le morphisme $H^1(S,\mathbb{C}_S) \to H^1(S,\mathcal{O}_S)$ est surjectif, donc $d : H^1(S,\mathcal{O}_S) \to H^1(S,\omega_S)$ est nul.

□

Remarque 28. Soient L_1 et L_2 deux fibrés en droites sur S, qui vérifient $L_1^{\otimes 2} \simeq L_2^{\otimes 2}$. Alors le fibré $L = L_1 \otimes L_2^*$ est de carré le fibré trivial sur S. en particulier, $2\deg L = 0$, puis $\deg L = 0$. D'après le théorème 27, le fibré L admet une connexion holomorphe, c'est donc un fibré plat puisque S est de dimension complexe 1. Donc L est caractérisé par son morphisme de monodromie, qui est à valeurs dans $\{-1,1\}$ puique L est de carré trivial. Réciproquement, si R est un fibré en droites de groupe structural $\{-1,1\}$, on a $(R \otimes L_1)^{\otimes 2} = L_1^{\otimes 2}$. On a montré que l'ensemble des racines carrées d'un fibré en droites sur S, s'il est non vide, s'obtient à partir d'une racine carrée en la tensorisant par les fibrés plats de groupe structural $\{-1,1\}$. Ceci, associé à la remarque 18, montre que l'ensemble des racines carrées du fibré cotangent ω_S est en bijection avec l'ensemble des SL_2-opers dans une classe d'équivalence donnée de GL_2-opers.

3.2 Fibrés vectoriels sur $P^1(\mathbb{C})$

Dans cette section, nous montrons le théorème suivant dû à Grothendieck :

Théorème 29. *Soit E un fibré vectoriel sur la droite projective complexe $P^1(\mathbb{C})$. Il existe une unique suite d'entiers $n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_k$ telle que E soit isomorphe à la somme directe de fibrés en droite $\mathcal{O}(n_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(n_k)$.*

Pour cela, nous nous référons à la démonstration faite dans [3]. Dans le cas des fibrés en droites, le théorème se réduit au lemme suivant :

Lemme 30. *Soit L un fibré en droite sur $P^1(\mathbb{C})$. Alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que L soit isomorphe au fibré $\mathcal{O}(n)$.*

Démonstration. Soit s une section méromorphe de L et soit $\sum_{i=1}^m k_i x_i$ le diviseur de s. Pour tout $1 \leq i \leq m$, il existe une section s_i de $P^1(\mathbb{C})$ qui admet exactement un zéro en x_i. La section $s^{\otimes -1} \otimes s_1^{\otimes k_1} \otimes \cdots \otimes s_m^{\otimes k_m}$ est une section sans zéro ni pôle de $L^* \otimes \mathcal{O}(1)^{\otimes k_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}(1)^{\otimes k_m}$, donc L est isomorphe au fibré $\mathcal{O}(\deg(L)) = \mathcal{O}(k_1 + \cdots k_m)$. □

L'existence dans le théorème 29 consiste donc à montrer que si E est un fibré vectoriel de $P^1(\mathbb{C})$ de rang n, alors le cocycle de E (à valeurs dans $GL_n(\mathbb{C})$) peut être diagonalisé, c'est-à-dire que E est somme directe de fibrés en droites. Remarquons que la donnée d'une section méromophe d'un fibré vetoriel E définit un sous-fibré en droites L : si $(s_1, \ldots, s_n)$ est l'expression de la section dans un repère local de E au voisinage de $x \in P^1(\mathbb{C})$, on obtient une base locale de L au voisinage de x en considérant la section $(s_1/s_k, \ldots, 1, \ldots, s_n/s_k)$ où s_k est la coordonnée qui admet le zéro (ou le pôle) de plus petit degré en x. Comme tout fibré vectoriel admet une section méromorphe, E admet un sous-fibré en droites E_1. De même E/E_1 admet un sous-fibré en droites, ce qui donne l'existence d'un sous-fibré $E_2 \subset E$ de rang 2 dont E_1 est un sous-fibré en droites. En procédant par récurrence, on montre ainsi l'existence d'une suite de sous-fibrés $\{0\} = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n = E$ telle que les E_i/E_{i-1} soient des fibrés en droites.

Soit r le degré maximal des fibrés en droites E_i/E_{i-1}. Nous allons montrer que tout sous-fibré en droites de E est de degré inférieur ou égal à r. Soit $L \subset E$ un sous-fibré en droites, et notons i_0 le plus petit indice i tel que $L \subset E_i$. Si s est une section méromorphe de L, alors s définit une section méromorphe non nulle $[s]$ du fibré en droites E_{i_0}/E_{i_0-1}, et on a $\deg([s]) \geq \deg(s)$. En effet, si $(e_1, \ldots, e_{i_0})$ est un repère local de E_{i_0} au voisinage de $x \in P^1(\mathbb{C})$ tel que $(e_1 \ldots, e_{i_0-1})$ soit un repère local de E_{i_0-1}, et si dans ce repère, $s = (s_1, \ldots, s_k)$, alors le degré de s en x est le degré minimum des s_i en x. Comme (e_{i_0}) définit un repère de E_{i_0}/E_{i_0-1}, dans lequel $[s]$ s'écrit (s_{i_0}), on a que le degré de $[s]$ en x est supérieur au degré de s en x (puisque $[s]$ a plus de zéros et moins de pôles). Cela montre $\deg L \leq r$.

Pour la suite, nous factorisons deux briques de raisonnement dans les trois lemmes ci-dessous :

Lemme 31. *Soit* $0 \to E \to F \to L \to 0$ *une suite exacte de fibrés vectoriels sur* P^1*, tels que* $L = E/F$ *soit de rang* 1*. Alors cette suite est scindée dès que le groupe* $H^1(P^1, E \otimes L^*)$ *est nul.*

Démonstration. On dispose, en tensorisant la suite de départ par L^*, de la suite exacte $H^0(P^1, F \otimes L^*) \to H^0(P^1, \mathcal{O}_{P^1}) \to H^1(P^1, E \otimes L^*)$. Si $H^1(P^1, E \otimes L^*) = 0$, l'application $H^0(P^1, F \otimes L^*) \to H^0(P^1, \mathcal{O}_{P^1})$ est surjective. Or $\dim(H^0(P^1, \mathcal{O}_{P^1})) = 1$, donc il existe un élément non nul dans $H^0(P^1, F \otimes L^*)$, c'est-à-dire un morphisme de fibrés non nul de L vers F. La composition de ce morphisme avec l'application $F \to L$ de la suite exacte courte de départ est un morphisme non nul $L \to L$, qui est nécessairement constant (car il correspond à une fonction holomorphe de P^1). Quitte à le multiplier par une constante, c'est l'identité, ce qui montre que la suite est scindée. □

Lemme 32. *Soit* L *un fibré en droites de* P^1 *avec* $\deg(L) \geq -1$*. Alors* $H^1(P^1, L) = 0$*.*

Démonstration. On a $H^1(P^1, L) \simeq H^{0,1}(P^1, L) \simeq H^{1,0}(P^1, L^*)^* \simeq H^0(P^1, L^* \otimes \omega_{P^1})^*$. Or $\omega_{P^1} \simeq \mathcal{O}(-2)$, puis $\deg(L^* \otimes \omega_{P^1}) \leq -1$, donc $H^1(P^1, L) = 0$. □

Lemme 33. *Soit E un fibré de rang 2 et L un sous-fibré en droites de E de degré maximal sur P^1. Alors on a* $\deg(E/L) \leq \deg(L)$.

Démonstration. Quitte à tensoriser par $\mathcal{O}(-1) \otimes L^*$, on peut supposer $\deg(L) = -1$, auquel cas il s'agit de montrer que E/L est de degré strictement négatif, donc d'après le lemme 30, que E/L n'admet pas de section holomorphe. On a une suite exacte en cohomologie $H^0(P^1, E) \to H^0(P^1, E/L) \to H^1(P^1, L)$. Une section holomorphe de E définirait un fibré en droites de degré positif, ce qui est impossible par maximalité de $\deg L$. Par conséquent le morphisme $H^0(P^1, E/L) \to H^1(P^1, L)$ est injectif. Or $H^1(P^1, L) = 0$ d'après le lemme 32. On en conclut que E/L n'admet pas de section holomorphe, puis que $\deg(E/L) \leq \deg L$. □

Montrons à présent le théorème 29. Reprenons la suite de sous-fibré $0 = E_0 \subset \cdots \subset E_n = E$, en prenant à chaque fois pour $E_i/E_{i-1} = L_i$ un sous-fibré en droites de degré maximal de E/E_{i-1}. Alors le lemme 33 appliqué aux suites exactes $0 \to E_{i-1}/E_{i-2} \to E_i/E_{i-2} \to E_i/E_{i-1} \to 0$ montre que la suite $(\deg(E_i/E_{i-1}))$ est décroissante. Nous allons procéder par récurrence et montrer que pour r compris entre 0 et n, le fibré E_r est isomorphe à la somme directe de fibrés en droite $L_0 \oplus L_1 \oplus \cdots \oplus L_r$. C'est trivial pour E_0. Supposons donc que ce soit vrai jusqu'au rang $r-1$. On a une suite exacte $0 \to E_{r-1} \to E_r \to L_r \to 0$ dont il nous suffit de montrer qu'elle est scindée. Pour cela, il suffit de montrer, d'après le lemme 31, que le groupe $H^1(P^1, E_{r-1} \otimes L_r^*) = 0$. Or par hypothèse de récurrence, $E_{r-1} = \bigoplus_{i=0}^{r-1} L_i$. Donc $H^1(P^1, E_{r-1} \otimes L_r^*) = \bigoplus_{i=0}^{r-1} H^1(P^1, L_i \otimes L_r^*)$. Mais comme $\deg L_r \leq \deg L_i$, on a $\deg(L_i \otimes L_r) \geq 0$, puis $H^1(P^1, L_i \otimes L_r^*) = 0$ par le lemme 32. Ceci termine la démonstration de l'existence dans le théorème 29.

Montrons à présent l'unicité. Soit $E = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$ une décomposition du fibré vectoriel E en fibrés en droites holomorphes. Posons $E_k = \bigoplus_{\deg L_i \geq k} L_i$. En particulier, $\dim E_k - \dim E_{k-1}$ est le nombre de fibrés en droites L_i de degré k. L'unicité du théorème 29 découle du fait que E_k estd éfini indépendament de la décomposition de E en fibrés en droites choisi : E_k coïncide avec le plus petit sous-fibré vectoriel F de E contenant toutes les sections méromorphes de E de degré au moins k. En effet, chaque L_i de degré supérieur à k admet une section méromorphe de degré au moins k, donc $E\ subsetF$. De plus, si s est une section méromorphe de degré au moins k, en décomposant s selon la somme directe $E = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$, on a $s = (s_1, \ldots, s_n)$. On a alors, similairement à un raisonnement fait précédemment, si s_i est non nul $\deg(s_i) \geq \deg(s) = k$. En particulier, $s_i = 0$ pour tout i tel que $\deg L_i < k$. Donc s est contenue dans E puis $F \subset E$, ce qui termine la démonstration du théorème 29.

4 Différentielles quadratiques

Nous allons dans cette section étudier quelques propriétés des différentielles quadratiques sur une surface de Riemann, qui comme nous l'avons vu plus haut sont intimement liées aux structures projectives. Nous commençons par présenter quelques propriétés des 1-formes différentielles, d'abord dans un contexte différentiel, le théorème de Sacksteder, qui nous fait entrevoir des idées que nous retrouverons dans l'étude des différentielles quadratiques, puis dans un contexte holomorphe nous introduisons la variété d'Albanese d'une variété kählérienne compacte.

4.1 Théorème de Sacksteder et variété d'Albanese d'une variété kählérienne

Plaçons-nous pour commencer dans un contexte différentiel. Soit M une variété différentielle compacte connexe, et supposons-la munie d'une 1-forme différentielle ω fermée qui ne s'annule pas. Comme ω est fermée, la formule de Stokes nous assure que son intégrale est nulle sur tout chemin fermé homotope à un point. Par conséquent, si on se fixe un point base $x_0 \in M$, on peut définir sur tout ouvert simplement connexe $U \subset M$ contenant x_0 une application $\tilde{f} : x \mapsto \int_{x_0}^{x} \omega$, qui vérifie $d\tilde{f} = \omega$, donc $\tilde{f}$ est submersive. En particulier, M ne peut être simplement connexe. Si tel est le cas en effet, $\tilde{f}$ peut être définie en prenant $U = M$, auquel cas on obtient une application submersive, donc ouverte, de M dans $\mathbb{R}$. Alors comme M est compacte, $\tilde{f}$ est surjective ce qui est exclu puisque $\mathbb{R}$ n'est pas compact.

Par ailleurs, les différentes applications $\tilde{f}$ correspondant aux différents ouverts simplement connexes de M contenant x_0 s'accordent toutes, à une action près d'un sous-groupe $H \subset \mathbb{R}$, défini comme l'image du groupe d'homologie $H_1(M, \mathbb{Z})$ par l'application $[\gamma] \mapsto \int_\gamma \omega$. On dispose donc d'une application $f : M \to \mathbb{R}/H$. Dans le cas particulier où le sous-groupe H est discret dans $\mathbb{R}$, l'application f est une submersion de M vers S^1, donc c'est un fibré par le théorème d'Ehresmann. Le théorème suivant affirme que c'est en fait toujours le cas :

Théorème 34. *(Sacksteder)*
Soit M une variété différentielle compacte connexe. Si M admet une 1-forme fermée partout non-nulle, alors il existe un fibré $f : M \to S^1$.

Démonstration. En reprenant les notations de la discussion discussion précédente, il suffit de montrer que l'on peut choisir ω telle que le sous-groupe H est discret. Par exemple, comme le groupe $H_1(M, \mathbb{Z})$ est finiment engendré, il suffit d'avoir $\int_\gamma \omega \in \mathbb{Q}$ pour toute classe $[\gamma] \in H_1(M, \mathbb{Z})$.

Or d'après le théorème de de Rham, le premier groupe de cohomologie de de Rham $H^1_{dR}(M)$ est dual du premier groupe d'homologie $H_1(M, \mathbb{R})$, par $([\eta], [\gamma]) \mapsto \int_\gamma \eta$. Toute base $([\gamma_1], \ldots, [\gamma_n])$ de $H_1(M, \mathbb{Z})$, étant également une base de $H_1(M, \mathbb{R})$, il existe $\eta_1, \ldots, \eta_n$ des 1-formes fermées de M telles que $\eta_i(\gamma_j) = \delta_{ij}$.

Munissons M d'une métrique Riemannienne. Comme M est compacte, la fonction $x \mapsto ||\omega_x||$ admet un minimum $m > 0$ et les fonctions $x \mapsto ||(\eta_i)_x||$ $(1 \leq i \leq n)$ admettent chacune un maximum plus petit qu'un réel $M > 0$. Considérons la forme $\omega' = \omega + \alpha_1\eta_1 + \cdots + \alpha_n\eta_n$, où on a choisi les réels α_i tels que, d'une part $\alpha_i + \int_{\gamma_i} \omega \in \mathbb{Q}$, et d'autre part $(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|) \cdot M < m$, ce qui est toujours possible puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Alors la forme ω' ne s'annule nulle part et envoie $H_1(M, \mathbb{Z})$ dans $\mathbb{Q}$, ce dont nous avions besoin pour terminer la démonstration. □

À un fibré $f : M \to S^1$ comme dans le théorème ci-dessus, on associe un feuilletage $\mathcal{F}$, donné par $\ker df$, et dont les feuilles sont les fibres de f. Considérons un chemin $\gamma : [0,1] \to M$ partout transverse à $\mathcal{F}$, c'est-à-dire $\gamma'(t) \notin \ker df_{\gamma(t)}$. L'application $f \circ \gamma : [0,1] \to S^1$ est alors strictement croissante. On appelle mesure transverse de γ pour le feuilletage $\mathcal{F}$ la valeur de l'intégrale $\int_0^1 |(f \circ \gamma(t))'|dt$. Si δ est un autre chemin transverse à $\mathcal{F}$ de mêmes extrémités que γ et homotope à γ par une homotopie à extrémités fixées et qui préserve la transversalité à $\mathcal{F}$, on vérifie aisément que la mesure transverse de δ est la même que celle de γ. Le feuilletage $\mathcal{F}$ est donc un feuilletage mesuré au sens suivant :

Définition 35. On appelle feuilletage mesuré sur une variété différentielle M un feuilletage singulier $\mathcal{F}$ de codimension 1, équipé d'une mesure transverse, c'est-à-dire d'une application définie l'ensemble des chemins de M transverses à $\mathcal{F}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, invariante par homotopie à extrémités fixées qui garde les chemins transverses.

Voyons à présent ce que donne un raisonnement du type de celui du théorème de Sacksteder dans le cas de variétés complexes. Soit X une variété kählérienne connexe compacte. La théorie de Hodge assure la décomposition $H^1_{dR}(X) \otimes \mathbb{C} = H^{1,0}(X) \oplus H^{0,1}(X)$. En particulier, on n'a pas de dualité entre les formes différentielles holomorphes et les lacets de X, donc le raisonnement du théorème de Sacksteder ne peut s'appliquer. Il faut procéder à une autre construction pour obtenir quelque chose d'intéressant : on n'a plus de fibration et le cercle est remplacé par un tore complexe.

Soit $\omega_1, \ldots, \omega_g$ une base de $H^0(X, \Omega^1_X)$, l'espace des 1-formes holomorphes globales. Comme X est kählérienne, ces formes sont fermées. Comme dans le cas différentiel, on peut donc fixer un point $x_0 \in X$ et considérer une application

$$\begin{array}{rccc} \phi : & X & \to & \mathbb{C}^g/\Lambda \\ & x & \mapsto & (\int_{x_0}^x \omega_1, \ldots, \int_{x_0}^x \omega_g) \end{array}$$

où Λ est le sous-groupe de $\mathbb{C}^g$, image de $H_1(X, \mathbb{Z})$ par l'application $\alpha : [\gamma] \mapsto (\int_\gamma \omega_1, \ldots, \int_\gamma \omega_g)$.

Lemme 36. *Le sous-groupe Λ est un réseau de $\mathbb{C}^g$*

Démonstration. Il s'agit de montrer que, étant donnée une $\mathbb{Z}$-base $([\gamma_1], \ldots, [\gamma_{2g}])$ de $H_1(X, \mathbb{Z})$, la famille $(\alpha(\gamma_1), \ldots, \alpha(\gamma_{2g}))$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^g$. La décomposition $H^1_{dR}(X) \otimes \mathbb{C} = H^{1,0}(X) \oplus H^{0,1}(X)$ assure que la famille $(\omega_1, \ldots, \omega_g, \overline{\omega_1}, \ldots, \overline{\omega_g})$ est une base de $H^1_{dR}(X) \otimes \mathbb{C} = H_1(X, \mathbb{C})^*$. Par conséquent, en posant $\tilde{\alpha}([\gamma]) = (\alpha([\gamma]), \overline{\alpha([\gamma])})$, on a que la famille $(\tilde{\alpha}(\gamma_1), \ldots, \tilde{\alpha}(\gamma_{2g}))$ est une base de $\mathbb{C}^{2g}$, ce qui signifie bien que la famille $(\alpha(\gamma_1), \ldots, \alpha(\gamma_{2g}))$ est une $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{C}^g$.

□

Notons $\mathrm{Alb}(X)$ et appelons variété d'Albanese associée à X le tore complexe de dimension g, $\mathbb{C}^g/\Lambda$. La discussion précédente montre que l'on dispose d'une application holomorphe $\phi : X \to \mathrm{Alb}(X)$. Le tore $\mathrm{Alb}(X)$ admet g formes différentielles $dz_1, \ldots, dz_g$ qui forment une base de $H^0(\mathrm{Alb}(X), \Omega^1_{\mathrm{Alb}(X)})$. De plus les formes ω_i vérifient $\omega_i = \phi^*(dz_i)$, donc l'application $\phi^* : H^0(\mathrm{Alb}(X), \Omega^1_{\mathrm{Alb}(X)}) \to H^0(X, \Omega^1_X)$ est un isomorphisme. De même, l'application α définie plus haut induit un isomorphisme entre $H_1(X,\mathbb{Z})$ et $\Lambda \simeq H_1(\mathrm{Alb}(X),\mathbb{Z})$, qui correspond à l'application ϕ_*. Considérons une application $\psi : X \to T'$ où $T' = \mathbb{C}^g/\Lambda'$ est un tore complexe de dimension d quelconque. Alors $d\psi_1, \dots, d\psi_d$ sont des éléments de $H^0(X, \Omega^1_X)$, et il existe des éléments $\eta_1, \dots, \eta_d$ de $H^0(T', \Omega^1_{T'})$ tels que $d\psi_i = \phi^*(\eta_i)$. En voyant η_i comme une 1-forme holomorphe sur $\mathbb{C}$, on a que l'application $\mathbb{C}^g \to \mathbb{C}^g, z \mapsto (\int_0^z \eta_1, \dots, \int_0^z \eta_g)$ envoie Λ dans Λ', et définit donc une application holomorphe $\chi : \mathrm{Alb}(X) \to T'$. En effet, pour tout lacet γ dans X, $\int_\gamma d\psi_i = \int_{\phi_*\gamma} \eta_i$, et on a vu que ϕ_* est un isomorphisme de $H_1(X,\mathbb{Z})$ dans $H_1(\mathrm{Alb}(X),\mathbb{Z})$. On a alors $d\psi = d(\chi \circ \phi)$. Donc en ajustant χ par une constante pour que $\chi \circ \phi$ et ψ coïncident en un point, on a $\chi \circ \phi = \psi$. Le fait que ϕ^* soit un isomorphisme assure l'unicité de la fonction holomorphe χ. Cela montre en particulier que le couple $(\phi, \mathrm{Alb}(X))$ est unique à biholomorphisme unique près. On a montré le théorème suivant :

Théorème 37. *Soit X une variété kälérienne, compacte et connexe. Il existe un tore complexe de dimension g, noté $\mathrm{Alb}(X)$ et appelé variété d'Albanese de X, ainsi qu'une application holomorphe $\phi : X \to \mathrm{Alb}(X)$, uniques à biholomorphisme unique près, tels que $\phi^* : H^0(\mathrm{Alb}(X), \Omega^1_{\mathrm{Alb}(X)}) \to H^0(X, \Omega^1_X)$ et $\phi_* : H_1(X,\mathbb{Z}) \to H_1(\mathrm{Alb}(X),\mathbb{Z})$ sont des isomorphismes.*

De plus, l'application $\phi : X \to \mathrm{Alb}(X)$ vérifie la propriété universelle suivante : si T' est un tore complexe et $\psi : X \to T'$ est une application holomorphe, alors il existe une unique application holomorphe $\chi : \mathrm{Alb}(X) \to T'$ telle que $\psi = \chi \circ \phi$.

Dans le cas où $X = S$ est une surface de Riemann, la variété d'Albanese permet, avec l'étude de la section précédente sur le degré d'un fibré end roites, de se faire un idée précise de l'ensemble des fibrés en droites de S. Dans ce cas, on appelle plutôt Jacobienne de S, et on note $\mathrm{Jac}(S)$, la variété d'Albanese de S. On appelle application d'Abel-Jacobi l'application

$$\begin{array}{cccc} \mu & : & \mathrm{Div}^0(X) & \to & \mathrm{Jac}(X) \\ & & \sum_{x \in S} n_x[x] & \mapsto & \sum_{x\in S} n_x \phi(x) \end{array}$$

où ϕ est l'application de S dans sa jacobienne comme précédemment.

Théorème 38. *L'application d'Abel-Jacobi est un morphisme de groupes abéliens surjectif, donc le noyau est l'ensemble des diviseurs associés à une fonction holomorphe sur S.*

En particulier, l'application d'Abel-Jacobi établit une bijection entre la jacobienne de X et l'ensemble des fibrés en droites de degré nul sur S, munissant ce dernier d'une structure de tore complexe de dimension $g = \dim(H^0(S, \Omega^1_S))$.

4.2 Différentielles quadratiques

Dans cette sous-section, nous donnons des analogues, pour les différentielles quadratiques holomorphes sur les courbes complexes, de deux constats sur les 1-formes différentielles tirés du théorème 34 : d'une part une surface de Riemann qui admet une forme différentielle quadratique holomorphe ne peut être de n'importe quel genre (c'est une courbe elliptique), d'autre part on peut associer à une différentielle quadratique holomorphe un feuilletage (singulier) mesuré au sens de la définition 35.

Soit S une surface de Riemann connexe compacte. Commençons par une constatation générale :

Proposition 39. *Soit ϕ une différentielle quadratique sur la surface de Riemann S. Pour chaque point $x \in S$ en lequel ϕ est non nulle, il existe une coordonnée locale ξ telle que $\phi = d\xi^{\otimes 2}$.*

Démonstration. Soit $x \in S$ tel que $\phi_x \neq 0$. Si z est une coordonnée locale en x, ϕ s'écrit au voisinage de x, $\phi = \varphi(z)dz^{\otimes 2}$, où $\varphi(z)$ est une fonction holomorphe qui ne s'annule pas au voisinage de x. Si $\xi = \alpha(z)$ est une autre coordonnée holomorphe, l'égalité $\phi = d\xi^{\otimes 2}$ équivaut à $\varphi(z) = \alpha'(z)^2$. On peut donc toujours touver une telle coordonnée locale ξ, en intégrant une racine carrée de ϕ sur un voisinage simplement connexe de x.

□

On remarque au passage que si ξ' est une autre coordonnée qui répond au problème, il existe $a \in \mathbb{C}$ avec $\xi' = \pm\xi + a$. Par conséquent, si l'on note N l'ensemble des points où ξ s'annule, la différentielle quadratique ϕ définit une (G, X)-structure plate sur $S \backslash N$, où $X = \mathbb{C}$ et G est le produit semi-direct du groupe additif $\mathbb{C}$ avec le groupe multiplicatif $\{\pm 1\}$.

On peut donc trouver un recouvrement ouvert (U_k) de $S\backslash N$ et des coordonnées locales ξ_k définies sur les U_k et telles que sur chaque U_k on ait $\phi = d\xi_k^{\otimes 2}$. Notons $d\xi_k = \alpha_k + i\beta_k$, où α_k et β_k sont des 1-formes réelles. Sur les intersections $U_k \cap U_l$, on a alors $\alpha_k = \pm\alpha_l$ et $\beta_k = \pm\beta_l$. Donc les familles (α_k) et (β_k) définissent chacune un feuilletage, que l'on nomme respectivement feuilletage vertical et feuilletage horizontal associé à la différentielle quadratique ϕ. Les feuilles du feuilletage vertical sont données sur l'ouvert U_k par les ensembles $\Im(\xi_k) =$ constante, et celles du feuilletage horizontal par les $\Re(\xi_k) =$ constante.

On obtient une mesure transverse μ du feuilletage horizontal (respectivement vertical) selon la définition 35 en posant si γ est un chemin dans S transverse au feuilletage, $\mu(\gamma) = \int_\gamma |\alpha|$ (respectivement $\mu(\gamma) = \int_\gamma |\beta|$).

Supposons à présent $N = \emptyset$, c'est-à-dire que la différentielle quadratique ϕ est partout non nulle sur S. Alors on peut recouvrir S tout entière par des ouverts U_k sur lesquels sont définies des coordonnées ξ_k comme au paragraphe précédent. On définit sur chaque U_k deux champs de vecteurs $v_k^1 = d\xi_k^{-1}(1)$ et $v_k^2 = d\xi_k^{-1}(-1)$. Les champs v_k^1 et v_k^2 d'une part, v_l^1 et v_l^2 d'autre part, coïncident sur les intersections $U_k \cap U_l$, mais sont éventuellement permutés. Cela donne lieu à un $\mathcal{S}_2$-fibré principal E. On associe à ce fibré un morphisme de monodromie $\rho : \pi_1(S) \to \mathcal{S}_2$. Le sous-groupe normal de $\pi_1(S)$, $\ker\rho$, est associé à un revêtement de degré au plus $|\mathcal{S}_2| = 2$, que nous notons $\pi : \overline{S} \to S$. Le tiré-en-arrière du fibré E par π est trivial (car sa monodromie est triviale), donc il existe sur $\overline{S}$ un champ v tel que pour tout $x \in \overline{S}$, $d\pi_x(v_x) = v_{k,x}^1$ ou $d\pi_x(v_x) = v_{k,x}^2$ (avec $\pi(x) \in U_k$). En particulier, v est une section de $T\overline{S}$ qui ne s'annule pas. Donc $T\overline{S}$ est de degré nul, or par la formule de Riemann-Roch $\deg(T\overline{S}) = 2 - 2g$, où g est le genre de $\overline{S}$, qui est aussi celui de S. On en déduit que S est de genre 1. On a donc montré :

Proposition 40. *Si S admet une différentielle quadratique globale partout non nulle, alors S est une courbe elliptique.*

Remarquons, pour finir, que l'existence de la différentielle quadratique ϕ qui ne s'annule nulle part sur S permet de montrer que S est une courbe elliptique, c'est-à-dire une surface de Riemann compacte revêtue par $\mathbb{C}$, sans invoquer le théorème d'uniformisation des surfaces de Riemann. En effet, il suffit de le montrer pour $\overline{S}$, puique celle-ci revêt S. On sait que $g = \dim H^0(\overline{S}, \omega_{\overline{S}}) = 1$. De plus le tiré-en-arrière $\pi^*\phi$ est une différentielle quadratique partout non nulle sur $\overline{S}$, qui fournit donc un repère global du fibré en droites $\omega^{otimes2}_{overlineS}$. Ce dernier est donc trivial et on en déduit $\dim H^0(\overline{S}, \omega_{\overline{S}}^{\otimes 2}) = 1$. Si $\alpha \in H^0(\overline{S}, \omega_{\overline{S}})$ est une section non nulle, $\alpha^{otimes2}$ est une section globale non nulle de $\omega^{otimes2}_{overlineS}$, donc un multiple non nul de $\pi^*\phi$. On en déduit que α ne s'annulle nulle part. La jacobienne de S est une courbe elliptique $\mathrm{Jac}(\overline{S}) = \mathbb{C}/\Lambda$ puisque $g = 1$ et l'application associée $\phi : \overline{S} \to \mathrm{Jac}(\overline{S})$ est non constante, donc surjective (puisque $\overline{S}$ est compacte). Elle est de plus injective. En effet, si deux points $x, y \in S$ ont la même image par ϕ, alors l'image du diviseur $[x] - [y]$ par l'application d'Abel-Jacobi est nulle, donc d'après le théorème 38, il existe une fonction méromorphe f sur $\overline{S}$ qui admet exactement un zéro d'ordre 1 en x et un pôle d'ordre 1 en y. La fonction f induit alors un biholomorphisme de $\overline{S}$ vers $P^1(\mathbb{C})$, ce qui est exclu puisque $g = 1$. Finalement, ϕ admet un biholomorphisme de $\overline{S}$ vers $\mathbb{C}/\Lambda$, puis $\overline{S}$, donc S est revêtu par $\mathbb{C}$.

A Dérivée seconde sur une surface de Riemann

A.1 Dérivée seconde

Soit z la coordonnée dans la carte U_i ($z = \lambda_i$). Notons $\phi = \varphi(z) dz \otimes dz$ dans U_i. Supposons $\infty \notin \lambda_i(U_i)$ (i.e. U_i est en fait un ouvert de $\mathbb{C}$), et considérons l'équation différentielle $(E_i) : y'' = \varphi y$, définie sur $\lambda_i(U_i)$, et soit y une solution de (E_i). La fonction y, définie sur $\lambda_i(U_i) \subset M$, définit une fonction $y(z)$ sur U_i. On voudrait savoir si l'équation E_i a un sens dans X, et pas seulement dans $\mathbb{C}$. Concrètement, on veut savoir si, étant donnée une autre carte (U_j, λ_j), la fonction x définie sur $\lambda_j(U_{ij})$ par $x(\zeta) = y(z)$ (où $\zeta = \lambda_j$) vérifie l'équation $(E_j) : x'' = \tilde{\varphi} x$, où $\phi = \tilde{\varphi}(\zeta) d\zeta^{\otimes 2}$ dans U_j. On a $z = \alpha(\zeta)$ avec $\alpha \in G = PGL(2, \mathbb{C})$, puis $dz = \alpha'(\zeta) d\zeta$. On a donc sur U_{ij}, $\phi = \varphi(\alpha(\zeta)) \alpha'(\zeta)^2 d\zeta^{\otimes 2} = \tilde{\varphi}(\zeta) d\zeta^{\otimes 2}$, d'où l'on déduit $(\varphi \circ \alpha)\alpha'^2 = \tilde{\varphi}$. De plus la relation $x(\zeta) = y(z)$ donne $x = y \circ \alpha$, puis (E_j) s'écrit pour x : $(y \circ \alpha)'' = (\varphi \circ \alpha)(\alpha')^2 (y \circ \alpha)$, c'est-à-dire $(E_j) : (y'' \circ \alpha)(\alpha')^2 + (y' \circ \alpha)\alpha'' = (\varphi \circ \alpha)(\alpha')^2 (y \circ \alpha)$. On déduit de (E_i) que (E_j) est vérifiée si et seulement si $(y' \circ \alpha)\alpha'' = 0$.

Remarquons que c'est le cas si $\alpha'' = 0$, c'est-à-dire si α fixe ∞, ou encore $\alpha \in H = Aut(\mathbb{C})$, qui est un sous-groupe de G. Cette remarque se réduit en fait à la suivante : la dérivée seconde d'une fonction sur une surface de Riemann n'est définie que relativement à une structure affine sur cette surface de Riemann (c'est-à-dire un atlas pour lequel les changements de carte sont des éléments de H). Ce n'est pas le cas si on considère une structure projective.

A.2 Dérivée schwarzienne

Pour obtenir une forme de dérivation donnant une différentielle quadratique, qui ne dépend que de la structure projective de la variété, il faut considérer la dérivée schwarzienne d'une fonction.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $y : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction lisse, avec y' partout non nulle. On appelle dérivée schwarzienne de y la fonction définie sur Ω :

$$\mathcal{S}(y) = \left(\frac{y''}{y'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2$$

On vérifie que si x est une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{C}$,

$$\mathcal{S}(y \circ x) = (\mathcal{S}(y) \circ x)(x')^2 + \mathcal{S}(x)$$

là où la composition est bien définie. De plus un calcul donne que $\mathcal{S}(y) = 0$ si et seulement si $y \in G$.

On déduit de ces faits calculatoires que si f est une fonction définie sur (un ouvert de) X, on définit une forme quadratique $S(f)$ associée à f, que l'on appelle également dérivée schwarzienne de f, en posant

$$S(f) = \mathcal{S}(y)(z)dz^{\otimes 2}$$

où z est une coordonnée locale de la structure projective sur X, et $f = y(z)$. En effet, si $\zeta = \alpha(z)$ est une autre coordonnée pour X, avec $\alpha \in G$, on a en posant $f = x(\zeta)$, comme $x \circ \alpha = y$, $\mathcal{S}(y)(z)dz^{\otimes 2} = \mathcal{S}(x \circ \alpha)(z)dz^{\otimes 2} = ((\mathcal{S}(x) \circ \alpha)(\alpha')^2 + \mathcal{S}(\alpha))(z)dz^{\otimes 2} = \mathcal{S}(x)(\alpha(z))\alpha'(z)^2 dz^{\otimes 2} = \mathcal{S}(x)(\zeta)d\zeta^{\otimes 2}$, car $\alpha \in G$ donc $\mathcal{S}(\alpha) = 0$.

Références

[1] Dylan G.L. Allegretti and Tom Bridgeland, *The monodromy of meromorphic projective structures.* 2020. À paraître Transaction AMS

[2] John M. Lee, *Introduction to smooth manifolds.* 2000.

[3] Alexandre Grothendieck, *Sur la classification des fibré holomorphes sur la sphère de Riemann.* American Journal of Mathematics, Vol 79 No 1 (Jan. 1957), pp 121-138

[4] Henri-Paul de Saint-Gervais, *Uniformisation des surfaces de Riemann, retour sur un théorème centenaire.* ENS Éditions, 2010.

[5] Indranil Biswas, Sorin Dumitrescu, *Generalized Holomorphic Cartan Geometries.* 2018. hal-01871795, À paraître European Journal of Mathematics

[6] Subhojoy Gupta, *Holomorphic quadratic differentials in Teichmüller theory.* 2019.