Prépa agreg, ENS Lyon novembre 2003
2003/2004

Quelques précisions sur les sous-groupes finis de $O_3(\mathbb{R})$

1. J'ai oublié de dire quels groupes on obtient dans chaque cas, c'est-à-dire non seulement à isomorphisme près mais aussi, comme sous-groupes de $SO_3(\mathbb{R})$, à conjugaison près sous l'action de $O_3(\mathbb{R})$.

a) Cas des deux familles, groupes isomorphes à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et aux groupes diédraux D_n.

Dans la première famille, le groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est le groupe des rotations d'angle $2\pi k/n$, $0 \leq k \leq n-1$ et d'axe commun fixé. Vérifiez-le ! (Quasi-déjà fait en TD.)

Dans la deuxième famille, le groupe isomorphe à D_n est le sous-groupe de $SO_3(\mathbb{R})$ stabilisant un polygône régulier à n côtés tracé sur un certain plan vectoriel et centré en l'origine. Vérifiez-le aussi (semi-fait en TD). Remarque : sa «trace» sur ce plan n'est pas incluse dans $SO_2(\mathbb{R})$ mais dans $O_2(\mathbb{R})$, c'est le sous-groupe de $O_2(\mathbb{R})$ stabilisant le polgône.

b) Cas de A_4, S_4 et A_5. Il faut déjà construire un tétraèdre régulier, un cube ou un octaèdre régulier et un dodécaèdre ou un icosaèdre régulier, exhiber leur groupe d'isométries directes et vérifier qu'il est respectivement isomorphe à A_4, S_4 et A_5. Ceci montre que ces groupes sont effectivement réalisés comme sous-groupes de $SO_3(\mathbb{R})$, mais on n'a pas fini.

Il faut encore vérifier que toute injection de ces groupes dans $SO_3(\mathbb{R})$ est conjuguée aux injections ainsi observées. Autrement dit que tout sous-groupe de $SO_3(\mathbb{R})$ isomorphe par exemple à A_4 est le groupe des isométries d'un tétraèdre. C'est assez facile à vérifier.

Il est bon d'avoir compris et de savoir faire au moins les cas simples : les familles, A_4 et S_4. Tout cela est fait dans le poly d'Arnaudiès sur les polyèdres réguliers, notamment, pp. 41–49 et 59–62 pour les cas simples.

2. Voici la fin de ce que je voulais dire sur les sous-groupes finis de $O_3(\mathbb{R})$ non inclus dans $SO_3(\mathbb{R})$. Soit G un tel sous-groupe et $G^+ = G \cap SO_n(\mathbb{R})$. On a facilement remarqué que :

Fait. $G \simeq G^+ \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, où $\rtimes$ est un produit semi-direct au sens large, c'est-à-dire direct ou semi-direct.

Attention ! Pour $n \geq 3$, le centre de $O_n(\mathbb{R})$ tout entier est $\{\pm \mathrm{Id}\}$, donc $O_n(\mathbb{R}) \simeq SO_n(\mathbb{R}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ si et seulement si n est impair, sinon $O_n(\mathbb{R}) \simeq SO_n(\mathbb{R}) \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ avec $\rtimes$ non direct.

Le centre de G, lui, n'est pas nécessairement réduit à $\{\pm \mathrm{Id}\}$. Il se peut justement que : $-\mathrm{Id} \notin G$ et pourtant : $G \simeq G^+ \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Dans ce cas, G admet une réflexion centrale ; c'est elle qui engendre le facteur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. C'est le cas pour $G^+ \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ ou $G^+ \simeq D_n$ et $G = \langle G^+, \sigma \rangle$ avec σ la réflexion par rapport au plan contenant le polygône stabilisé par G^+ ; σ est alors centrale (vérifiez-le). Notez qu'alors $G \not\ni -\mathrm{Id}$ si et seulement si n est impair.

Enfin, il est facile de donner, à isomorphisme près (pas à conjugaison près, attention, voir **1.**), la liste de tous les produits (semi-)directs $G^+ \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ réalisés comme sous-groupes de $O_3(\mathbb{R})$. On trouve en effet dans Tisseron, *Géométries affine, projective et euclidienne*, pp. 376–377, l'argument suivant :

• Soit $-\mathrm{Id} \in G$, alors $G \simeq G^+ \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, cas réalisé pour chaque ss-groupe fini G^+ de $SO_3(\mathbb{R})$,

• Soit $-\mathrm{Id} \notin G$. Dans ce cas, $G \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, avec $\rtimes$ produit semi-direct au sens large, comme vu ensemble. Donnons la liste des tels G possibles. Posons $\Gamma = G \times \{\pm \mathrm{Id}\}$ et $\Gamma^+ = \Gamma \cap \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$:

$$G^+ \left\{ \begin{array}{c} \subset G \\ \subset \Gamma^+ \end{array} \right\} \subset \Gamma.$$

Soit π la projection $\mathrm{O}_3(\mathbb{R}) \to \mathrm{O}_3(\mathbb{R})/\{\pm \mathrm{Id}\}$, $\pi_{|G}$ et $\pi_{|\Gamma^+}$ sont injectives, donc $\pi_{|\Gamma^+}^{-1} \circ \pi_{|G}$ fournit un isomorphisme de G dans Γ^+. Donc G est isomorphe à un sous-groupe fini de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, qui contient un sous-groupe d'indice deux (G^+). Il suffit alors d'établir la liste :

Fait. Le couple (G, G^+) est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, $(D_n, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, (D_{2n}, D_n) ou (S_4, A_4) (l'inclusion de chaque deuxième groupe dans le premier est unique [à première vue]).

Remarque. Cette fois, les classifications à isomorphisme et à conjugaison près ne se recouvrent pas. Par exemple, le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est réalisé comme $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times \{\pm\sigma\}$ comme vu plus haut, ou comme $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times \{\pm \mathrm{Id}\}$. Je note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ le premier facteur, pourtant sous-groupe de $\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$, justement parce qu'il n'y a pas d'ambiguïté sur son injection dans $\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$. Ces deux injections dans $\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ ne coïncident *pas* si n est impair (aux erreurs près de votre serviteur, vérifiez l'absence de bêtise).

3. Enfin, notez la subtile différence entre le comportement des D_n injectés dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, pour n pair et pour n impair : les deux orbites de cardinal n exhibées en TD sont-elles stables par $-\mathrm{Id}$? Cette différence provient-elle de la représentation de D_n observée, où est-elle présente, algébriquement, dans le groupe D_n ?

Charles Boubel