ENS Lyon février 2006
Préparation à l'agrégation

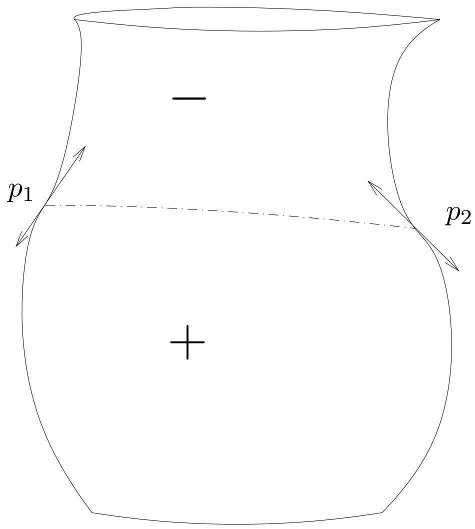
Apparition d'une courbe cuspidale comme intersection d'une surface avec un de ses plans tangents : l'exemple du bec verseur.

Dans la cruche $\mathcal{C}$ suivante, j'ai indiqué la région à courbure négative et la région à courbure positive. Les points de courbure nulle, séparant les deux zones, constituent la courbe en trait mixte.

On peut localiser les points où cette courbe traverse le contour apparent γ de $\mathcal{C}$ (j'ai penché un peu la cruche pour faire comprendre sa forme, mais j'imagine le contour apparent obtenu par projection orthogonale de $\mathcal{C}$ sur son plan de symétrie P). En effet, soit p un point de γ, E l'espace tangent en p à $\mathcal{C}$, n la normale unitaire en p, $W_p \in \mathrm{End}(E)$ l'endomorphisme de Weingarten en p, u_p un vecteur non nul de E, tangent à γ et v_p complétant u_p en une base orthogonale de E. La symétrie S par rapport à P laisse $\mathcal{C}$ globalement invariante et fixe p, donc $\mathrm{d}S(p)$ commute avec W_p (car calculer W_p sur $\mathcal{C}$ ou sur $S(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, c'est pareil) et en outre :

$$\mathrm{Mat}_{(u_p,v_p)}(\mathrm{d}S(p)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

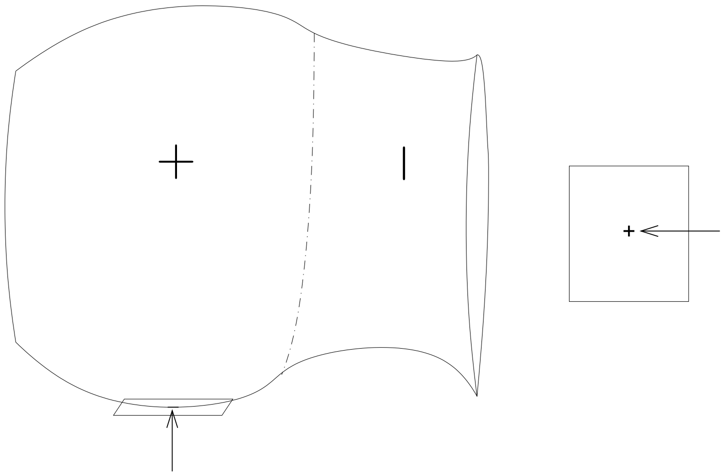
Il suit immédiatement que W_p est diagonal dans la base orthogonale (u_p, v_p), donc $\mathrm{vect}(u_p)$ est *direction principale*. Or γ est l'intersection de $\mathcal{C}$ avec $P = \mathrm{vect}(n, u_p)$ [abus de notation...], donc sa courbure en p (comme courbe dans P) est la valeur propre de W_p associée au vecteur u_p. Aux points d'inflexion p_1, p_2 de γ, cette courbure, donc cette valeur propre, est nulle, donc W_{p_1} et W_{p_2} ne sont pas inversibles. La courbe en trait mixte franchit donc nécessairement γ en p_1 et p_2.

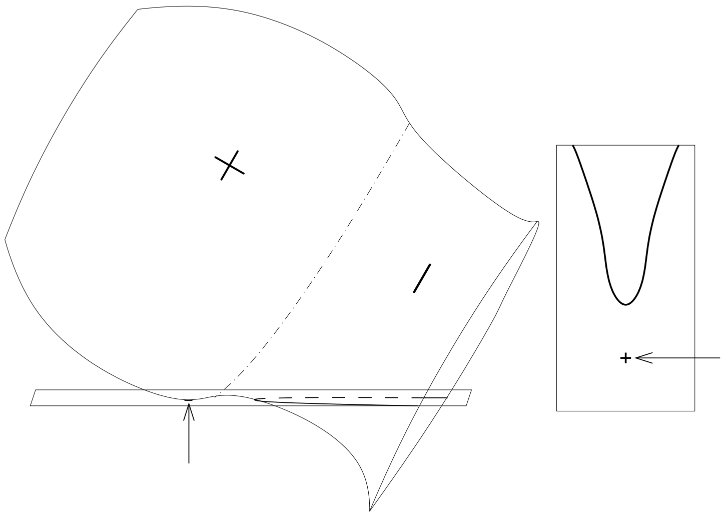


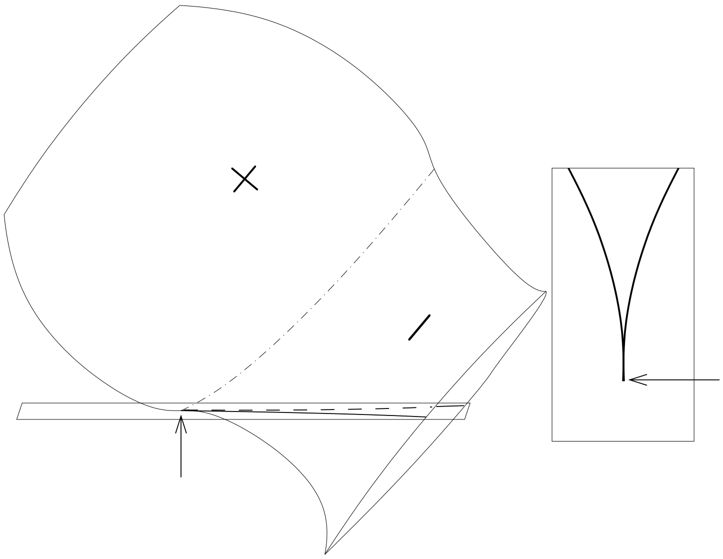
Remarque : ce raisonnement, appliqué aux surfaces de révolution, montre que les directions principales de W sont données, en tout point de ces surfaces, par la direction du méridien et celle du parallèle en ce point.

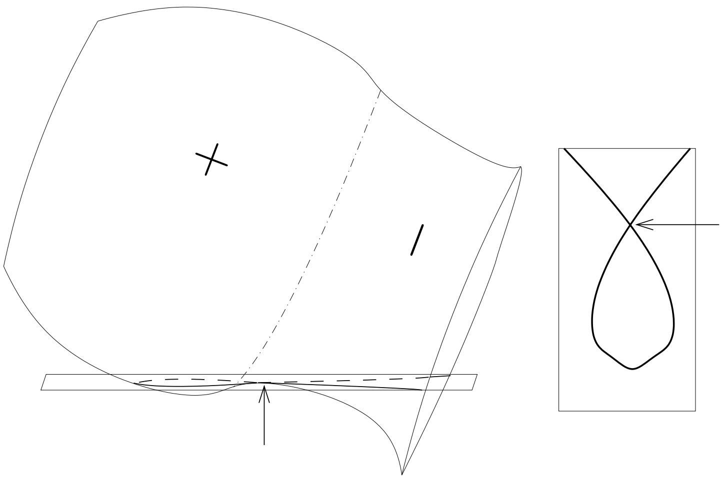
Par ailleurs, on peut admettre, parce qu'on le «voit», que la courbe $\mathcal{C} \cap \mathrm{vect}(n, v_{p_i})$ est de courbure non nulle en p_1 et p_2, donc que ces points sont paraboliques. La situation ailleurs sur la courbe mixte est plus compliquée. On peut cependant penser que, sur une cruche «générique», tous ses points sont paraboliques.

Faisons évoluer le plan tangent le long du contour apparent de la cruche. Le point de tangence est indiqué par la flèche. L'apparition de la courbe cuspidale est justifiée par une proposition démontrée dans Ramis-Deschamps-Odoux tome 5 page 62. Le présent bec verseur en constitue donc un exemple illustratif.









Charles Boubel