$\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, sous-groupe compact maximal de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$

On montre ici le résultat suivant :

Théorème Soit K un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ alors : $\exists g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : g^{-1}Kg \subset \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

On en déduit en particulier le

Corollaire $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, *i.e.* un sous groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, maximal pour cette propriété.

Notons Sym l'espace des formes bilinéaires symétriques sur $\mathbb{R}^n$, $S \subset \mathrm{Sym}$ le cône des formes bilinéaires symétriques définies positives et commençons par deux

Remarque 1. Le théorème peut se reformuler ainsi : il existe une forme bilinéaire symétrique définie positive q de $\mathbb{R}^n$ telle que : $K \subset \mathrm{O}(q)$. En effet :
$*$ $g^{-1}Kg \subset \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow K \subset g\ \mathrm{O}_n(\mathbb{R})g^{-1}$
$*$ $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ agit sur Sym par $g.q = q(g^{-1}\cdot, g^{-1}\cdot)$. [Cas hermitien : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ agit sur H le $\underline{\mathbb{R}}$-e.v. des formes hermitiennes, c'est une représentation linéaire *réelle* de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.] Avec $q = g.q_0$, où q_0 est le produit scalaire canonique, on obtient (vérifiez-le) $g\,\mathrm{O}_n(\mathbb{R})g^{-1} = \mathrm{O}(q)$.

Remarque 2. Si le groupe K est en fait *fini*, le théorème s'obtient très rapidement. En effet, si q est une forme bilinéaire symétrique définie positive quelconque, K stabilise la *somme* $\overline{q}$ des éléments de $K.q = \{g.q \,/\, g \in K\}$, *i.e.* $K \subset \mathrm{O}(\overline{q})$. Cette somme est :

$$\overline{q} = \sum_{g \in K} g.q \qquad [\textit{Note :} \text{ on pourrait aussi utiliser le baycentre } \tfrac{1}{\sharp K}\sum_{g\in K} g.q \text{ de } K.q.] \qquad (1)$$

et donc immédiatement, si $h \in K$:

$$h.\overline{q} = \sum_{g\in K} h.(g.q) = \sum_{g\in K} (hg).q = \sum_{g\in K} g.q = \overline{q}$$

car quand g parcourt K, hg aussi. Reste à s'assurer que $\overline{q} \in S$. C'est le cas car
$*$ S est stable sous l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, donc : $\forall g \in K, g.q \in S$,
$*$ S est stable par somme : si q et q' sont définies positives, $q + q'$ l'est aussi [avec le barycentre, dire que S est *convexe* : pour tout $t \in [0,1]$ $tq + (1-t)q'$ l'est aussi.] $\square$

On prouve le théorème annoncé en généralisant, par une intégrale, la notion de la somme des éléments de $K.q$ au cas K compact. Deux remarques permettent ce travail :

Remarque (bébête) 3. L'enveloppe convexe d'un borné est bornée (pourquoi, en $\frac{1}{2}$ligne ?).

Remarque 4. En dimension finie, un convexe non vide $\mathcal{C}$ est d'intérieur non vide dans l'espace affine A qu'il engendre. En effet, la dimension est finie, prenons donc $(c_i)_{i=0}^p$ une famille finie et, tant qu'à faire, affinement libre d'éléments de $\mathcal{C}$ engendrant affinement A. Par définition, les vecteurs $(\overrightarrow{c_0c_i})_{i=1}^p$ sont une base de l'espace vectoriel $\overrightarrow{A}$; f de $\mathbb{R}^p$ dans A donnée par $f((\varepsilon_i)_{i=1}^p) = c_0 + \sum_{i=1}^p \varepsilon_i \overrightarrow{c_0c_i}$ est alors un isomorphisme affine, donc un homéomorphisme. Le résultat suit car $]0, \frac{1}{p}[^p$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f(]0,\frac{1}{p}[^p) \subset \mathcal{C}$. En effet, si $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{i=1}^p \in]0, \frac{1}{p}[^p$, $f(\varepsilon)$ est le barycentre de $(c_i)_{i=0}^p$ avec les coefficients *positifs* $(1 - \sum_{i=1}^p \varepsilon_i, (\varepsilon_i)_{i=1}^p)$.

Démonstration du théorème. Prenons à nouveau q une forme bilinéaire symétrique définie positive quelconque et construisons cette fois l'«intégrale» $\overline{q}$ de $\mathcal{C} = \mathrm{Conv}(K.q)$.

[**Note : philosophie de la chose.** Pour mimer exactement (1), il faut intégrer sur K, donc le munir d'une mesure. On veut faire autrement. Une orbite $K.q$ est, elle, une partie de Sym, qui est muni de sa mesure de Lebesgue ; on peut donc intégrer sur $K.q$ si cette orbite est de mesure non nulle dans Sym (ou dans un de ses sous-espaces affines). Ce n'est malheureusement pas nécessairement le cas. L'intégration sur $\mathcal{C} = \mathrm{Conv}(K.q)$ atteint le but recherché.]

Soit A le sous-espace affine de Sym engendré par $K.q$ (ou par $\mathcal{C}$, ça revient au même) et μ la mesure de Lebesgue sur A. Comme l'application $(g, q') \mapsto g.q'$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{Sym}$ dans Sym est continue et K est compact, $K.q$ est compact. Par conséquent, $K.q$ est borné, donc $\mathcal{C}$ est bornée (rq. 3), donc de mesure $\mu(\mathcal{C})$ finie.
La fonction identité (ou plutôt l'inclusion de A dans Sym, pour être exact) est bornée sur $\mathcal{C}$ borné, on peut donc définir $\overline{q}$ par l'analogue suivant de la formule (1) :

$$\overline{q} = \int_{\mathcal{C}} q \,\mathrm{d}\mu(q) \in \mathrm{Sym} \qquad \text{[respectivement } \frac{1}{\mu(\mathcal{C})} \int_{\mathcal{C}} q \,\mathrm{d}\mu(q) \text{ pour le barycentre].}$$

Note : c'est l'intégrale d'une fonction à valeurs dans un espace vectoriel (en l'occurence Sym), qui s'effectue composante par composante, ce qui ne dépend pas du choix de la base. Comme $\mu(\mathcal{C}) \neq 0$ par la rq. 4 et comme $x \neq 0 \Rightarrow \forall q \in \mathcal{C},\ q(x,x) > 0$, $\overline{q}$ est définie positive.

Alors, pour tout h de K, en notant f_h l'application ($\mathbb{R}$-linéaire[1] de GL(Sym)) $q' \mapsto h.q'$:

$$h.\overline{q} = f_h(\overline{q}) = \int_{\mathcal{C}} f_h(q) \,\mathrm{d}\mu(q) = \frac{1}{|\det(f_h)|} \int_{f_h(\mathcal{C})} q' \,\mathrm{d}\mu(q') \tag{2}$$

[car pour f linéaire, $|\det f| \int_D \varphi(f(v))\,\mathrm{d}v = \int_{f(D)} \varphi(v)\,\mathrm{d}v$]. Ensuite, deux variantes :

$*$ De toute façon, $\det(f_h) = \pm 1$ car K est compact. En effet, $h \mapsto f_h$ est un morphisme de groupes *continu* (savoir le vérifier) de K dans GL(Sym). Par conséquent, $h \mapsto \det(f_h)$ est un morphisme continu de K dans $\mathbb{R}^*$, d'image compacte car K est compact. Cette image est donc incluse dans $\{-1, 1\}$ (Pourquoi ?). Ceci élimine $|\det(f_h)|$ dans (2).

$*$ Encore par changement de variable, $\mu(f_h(\mathcal{C})) = \int_{f_h(\mathcal{C})} \mathrm{d}\mu(q) = |\det(f_h)| \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\mu(q) = |\det(f_h)|\mu(\mathcal{C})$. Or $f_h(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ par les trois dernières lignes, donc $|\det(f_h)| = 1$.

Enfin, $f_h(K.q) = K.q$ (par construction : $f_h(K.q) = h.(\{g.q/g \in K\}) = \{h.(g.q)/g \in K\} = \{(hg).q/g \in K\} = \{g.q/g \in K\} = K.q$ car quand g parcourt K, hg aussi, comme dit plus haut). Donc $f_h(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ car f_h est linéaire. Le tour est joué. $\square$

Démonstration du corollaire. Supposons $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \subset K$ sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$; prenons g donné par le théorème tel que $gKg^{-1} \subset \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, alors :

$$g\ \mathrm{O}_n(\mathbb{R})g^{-1} \subset gKg^{-1} \subset \mathrm{O}_n(\mathbb{R}).$$

Or $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est engendré par les réflexions hyperplanes orthogonales et si σ_P en est une (par rapport à l'hyperplan P), $g\sigma g^{-1}$ est une réflexion par rapport à $g(P)$. Comme $g\ \mathrm{O}_n(\mathbb{R})g^{-1} \subset \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $g\sigma g^{-1}$ est orthogonale ; c'est la réflexion orthogonale par rapport à $g(P)$. Donc $g\ \mathrm{O}_n(\mathbb{R})g^{-1}$ contient donc toutes ces réflexions, donc est égal à $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Variante : soit $\sigma_P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ avec $P = D^\perp$, D droite vectorielle. Alors $g\sigma g^{-1} = \sigma_{g(P)}$ donc $g(D^\perp) = g(D)^\perp$. Ainsi, g préserve l'orthogonalité, *i.e.* g est orthogonal, à un scalaire multiplicatif près (g est une similitude). Le résultat suit. $\square$

Remarque. Un intérêt du théorème est que toute représentation linéaire d'un groupe compact est donc *totalement réductible*. Voir par ex. Leichtnam-Schauer, t.2 exo C11 p.74.
Question subsidiaire : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ peut être vu comme inclus dans $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$, donc tout sous-groupe compact K de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est conjugué à un sous groupe de $\mathrm{O}_{2n}(\mathbb{R})$, donc toute représentation linéaire de K est totalement réductible. Qu'apporte de plus, pour cette conclusion, de savoir que K est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})(\subset \mathrm{O}_{2n}(\mathbb{R}))$?

C. Boubel

(Idée de C. Danthony et B. Sévennec pour éviter le recours à l'intégration sur K avec la mesure de Haar.)

[1]et, dans le cas complexe avec $\mathrm{GL}(H)$, seulement $\mathbb{R}$-linéaire et *pas* $\mathbb{C}$-linéaire.