ENS Lyon   février 2006
Préparation à l'agrégation

Groupe des applications affines du plan $\mathbb{K}^2$
préservant une conique donnée

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique différente de deux, $\mathcal{C}$ une conique non vide de $\mathbb{K}^2$ et $G \subset \mathrm{Aff}(\mathbb{K}^2)$ l'ensemble des applications affines g du plan $\mathbb{K}^2$ telles que $g(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

Un cas particulier pour commencer. Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathcal{C}$ un cercle. Alors $\mathcal{C}$ admet un unique centre de symétrie, son centre C, qui est préservé par G : si σ_C est la symétrie de centre C et $g \in G$, $g(\mathcal{C})$ est stable par $g\sigma g^{-1} = \sigma_{g(C)}$. Comme $g(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ et C est l'unique centre de symétrie, $\sigma_{g(C)} = \sigma_C$ et donc $g(C) = C$. En vectorialisant le plan affine $\mathbb{R}^2$ en C, G s'identifie alors à un sous-ensemble de $\mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$. Enfin, G préserve la norme euclidienne. En effet, $G \subset \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ et G préserve $\mathcal{C}$, donc G préserve chaque cercle $\lambda\mathcal{C}$ centré en C, avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Ainsi, $G \subset \mathrm{O}(2, \mathbb{R})$. L'inclusion inverse est immédiate donc, en vectorialisant $\mathbb{R}^2$ en C, $G = \mathrm{O}(2, \mathbb{R})$.

La suite montre comment ce cas s'inscrit naturellement dans une étude générale, ainsi que l'intérêt de la liaison affine-projectif pour résoudre et éclairer certains problèmes affines.

Pour alléger, restreignons-nous au cas où $\mathcal{C}$ est une conique propre. Dans ce cas, l'image de tout élément de G contient $\mathcal{C}$, donc n'est pas incluse dans une droite affine, donc est $\mathbb{K}^2$ entier, donc $G \subset \mathrm{GA}(\mathbb{K}^2)$. Ceci autorise le passage au point de vue projectif, plus bas. Je traiterai le cas des coniques dégénérés en annexe plus tard.

1 Prenons un peu de recul

Remarque préliminaire 1. Si $\mathcal{C} \subset \mathbb{K}^2 \subset \mathbb{K}\mathrm{P}^2$ est propre alors $\mathcal{C}$ est le projectivisé du cône $Q^{-1}(0)$ avec Q une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{K}^3$. Toute application projective préservant $\mathcal{C}$ préserve alors Q, à proportionnalité près. On peut le vérifier par la remarque suivante. Soit $g \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{K})$ et $\overline{g}$ son image dans $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{K})$. Alors $\overline{g}(\mathcal{C})$ est la conique d'équation $Q \circ g^{-1}(m) = 0$. Si g préserve $\mathcal{C}$, ces deux coniques coïncident, donc ont au moins cinq points communs dont trois d'entre eux ne sont jamais alignés. Il est alors connu et rapide à vérifier, à l'aide d'un bon repère projectif, qu'elles sont définies par la même forme quadratique, à proportionnalité près, voir [B90] 16.1.4. Par conséquent, à proportionnalité près, $g \in \mathrm{O}(Q)$. Cet argument échoue cependant si $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ car $\sharp\mathcal{C} = 4 < 5$; [B90] traite ce cas à part, on peut aussi le traiter en remarquant que les quatre points communs des deux coniques sont communs *à l'ordre deux* (même tangente).

Cette remarque évite le recours au théorème suivant, assez facile et plus général : deux équations définissant la même quadrique projective de $\mathbb{K}\mathrm{P}^n$, avec $\mathbb{K} \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, sont proportionnelles dès que cette quadrique possède au moins un point simple, voir [S86] th. 46 p. 113.

Remarque préliminaire 2. Le plan affine $\mathbb{K}^2$ peut être vu comme le plan projectif $\mathbb{K}\mathrm{P}^2$ de coordonnées homogènes $[X : Y : Z]$ privé de la droite à l'infini d_∞, projectivisé du plan $\{Z = 0\}$. Si $g \in \mathrm{GA}(\mathbb{K}^2)$, g s'identifie à un $\overline{g} \in \mathrm{PGL}(3, \mathbb{K})$ agissant sur $\mathbb{K}\mathrm{P}^2$; $\mathrm{GA}(\mathbb{K}^2)$ est alors exactement l'ensemble des $\overline{g}$ préservant d_∞. En choisissant le représentant de $\tilde{g}$ de $\overline{g}$ dans $\mathrm{GL}(3, \mathbb{K})$ de coefficient en bas à droite égal à 1, on identifie :

$g : (x, y) \mapsto A(x, y) + B$, avec $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^2$ vu comme vecteur-colonne, à : $\tilde{g} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{K}).$

Reformulation du problème. D'après ce qui précède, $g \in \mathrm{GA}(\mathbb{K}^2)$ stabilise $\mathcal{C}$ si et seulement s'il provient d'un élément $\tilde{g}$ du groupe conforme $\mathrm{CO}(Q) := \mathbb{K}^*.\mathrm{O}(Q)$ ($\tilde{g}$ doit préserver Q à proportionnalité près) stabilisant d_∞. Mais si $\tilde{g} \in \mathbb{K}^*.\mathrm{O}(Q)$, $\tilde{g}$ stabilise d_∞, i.e. le plan $\{Z = 0\}$, si et seulement s'il stabilise la droite $\{Z = 0\}^{\perp_Q}$. Ainsi :

> G est le projectivisé du stabilisateur d'une droite dans $\mathrm{CO}(Q)$ agissant sur $\mathbb{K}^3$, ou encore G est le stabilisateur d'un point dans $\mathrm{PO}(Q)$ agissant sur $\mathbb{KP}^2$.

Note culturelle. Une fois donnée une conique propre $Q^{-1}(0)$ dans $\mathbb{KP}^2$, à toute droite projective (=plan P de $\mathbb{K}^3$) est associée son pôle (=la droite $P^{\perp_Q}$), et à tout point (=droite D de $\mathbb{K}^3$), sa droite polaire (=le plan $D^{\perp_Q}$), voir [S86] chap. 4.

[Rappel (à connaître).] Si une droite projective d, projectivisé d'un plan vectoriel P de $\mathbb{K}^3$, rencontre $\mathcal{C}$ en un point m, projectivisé d'une droite vectorielle D de $\mathbb{K}^3$, alors sont équivalents : d est tangente à $\mathcal{C}$ en m, $D \perp_Q P$, $D = P^{\perp_Q}$, $P^{\perp_Q} \subset P$, $Q_{|P}$ est dégénérée. (Preuve : $Q_{|P}$ a une racine double, sa matrice est diagonalisable avec la valeur propre 0).

Ici, $\mathcal{C}$ est tangente à d_∞ si et seulement si «$Q_{|d_\infty}$» est dégénérée, si et seulement si d_∞ contient son pôle, qui est le point de tangence avec $\mathcal{C}$. Donc, si $\mathcal{C}$ n'est pas tangente à d_∞, le pôle de d_∞ est dans $\mathbb{K}^2$: on vérifie que c'est un centre de symétrie, unique, de $\mathcal{C}$.

C'est pourquoi une conique projective ne détermine aucun point privilégié mais que :

• Dès qu'on choisit une carte affine telle que la droite à l'infini n'est pas tangente à la conique, un point dans la carte se met à jouer un rôle particulier : le pôle de la droite à l'infini par rapport à $\mathcal{C}$, centre de la conique dans la carte.

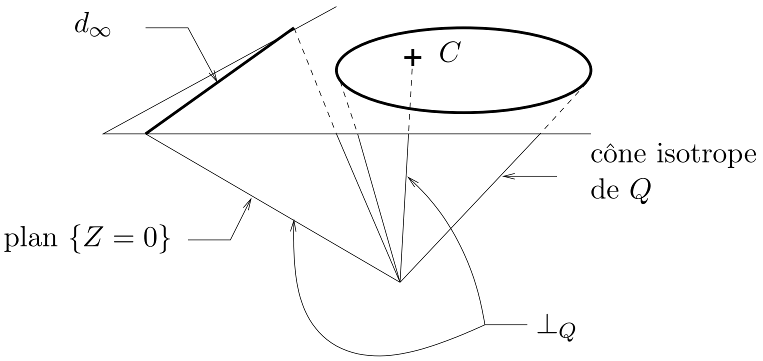

Figure dans une carte affine contenant d_∞. Cas où $\mathcal{C} \cap d_\infty = \emptyset$.

• Dès qu'on choisit une carte affine telle que la droite à l'infini est tangente à la conique, une direction se met à jouer un rôle particulier : celle des droites affines passant par ce point de tangence ; c'est la direction asymptotique de la conique.

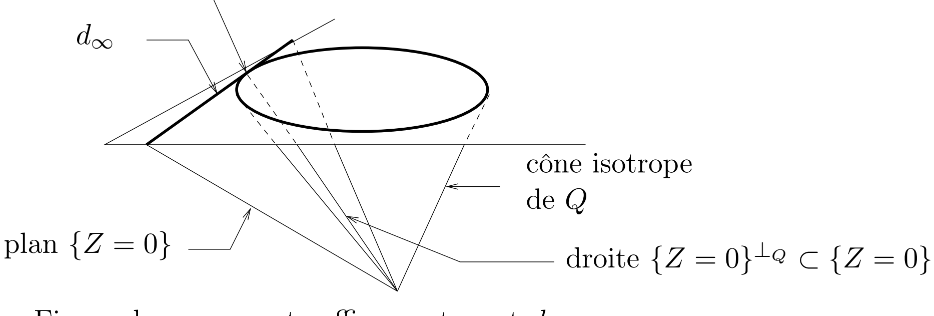

Figure dans une carte affine contenant d_∞.

On vérifie réciproquement (par exemple, une ligne de calcul) que si $\mathcal{C}$ conique propre admet un centre de symétrie, Q est non-dégénérée sur d_∞ : les coniques tangentes à d_∞ n'ont pas de centre.

2 Cas où $\mathcal{C}$ est une conique à centre

Une conique est dite à centre si elle admet un et un seul centre de symétrie. Comme vu ci-dessus, c'est le cas où $\mathcal{C}$ n'est pas tangente à d_∞. Rappel : dans le plan affine, si $\mathcal{C}$ est d'équation $q(m)+a(m)+b=0$ avec q forme quadratique et a forme linéaire, $\mathcal{C}$ est à centre si et seulement si q est non dégénérée.

En translatant, on vectorialise le plan affine $\mathbb{K}^2$ en C, qui devient donc de coordonnées homogènes $[0:0:1]$ dans $\mathbb{K}\mathrm{P}^2$. Alors (homogénéisez), Q prend la forme :

$$Q = \begin{pmatrix} q & a \\ {}^t a & b \end{pmatrix} \quad \text{avec } a \text{ vu comme vecteur-colonne.}$$

On note que, $(x,y)\mapsto(x,y,0)$ tirant naturellement $Q_{|\{Z=0\}}$ sur le plan $\{Z=1\}$ avec ses coordonnés (x,y), $Q_{|\{Z=0\}}=q$. Le groupe G préserve $\mathrm{vect}(0,0,1)$, et même le vecteur $(0,0,1)$ lui-même car celui-ci n'est pas isotrope. Donc, vu dans $\mathrm{GL}(3,\mathbb{K})$:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} g' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ / \ g' \in \mathrm{O}(q) \right\}. \tag{1}$$

Autrement dit, en vectorialisant $\mathbb{K}^2$ en C, $G=\mathrm{O}(q)$.

3 Cas où $\mathcal{C}$ est une conique tangente à d_∞

Soit $C\in d_\infty$ le pôle de d_∞ par rapport à $\mathcal{C}$, qui est aussi le point de tangence de $\mathcal{C}$ et d_∞. Si on s'arrange pour que $C=[1:0:0]$, alors $[1:0:0]\perp_Q \{Z=0\}$ et Q prend la forme :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & \gamma \\ \alpha & \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

par ailleurs G préservera le drapeau $\mathrm{vect}(1,0,0)\subset\{Z=0\}$ donc sera triangulaire supérieur.

Vérifions qu'on y arrive par un changement de coordonnées affines, et faisons même un peu mieux pour simplifier l'étude.

(i) On choisit la coordonnée y telle que les droites $\{y=\mathrm{cte}\}$ sont parallèles à la direction asymptotique. Alors elles passent par C, i.e. $C=[1:0:0]$. Notamment $Q([1:0:0])=0$.

(ii) En translatant, on place l'origine $O=[0:0:1]$ en un point de $\mathcal{C}$. Donc $Q([0:0:1])=0$.

(iii) On choisit la coordonnée x telle que $\{x=0\}$ est la tangente à $\mathcal{C}$ en O. C'est possible car $\{y=0\}$, elle, recoupe $\mathcal{C}$ en C donc n'est pas tangente. Alors dans $\mathbb{K}^3$, $\mathrm{vect}(0,0,1)\perp_Q \{X=0\}$ (voir le rappel du §1) ; en particulier, $[0:0:1]\perp_Q[0:1:0]$.

Après ce changement, la matrice de Q prend la forme :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut en outre forcer $\alpha=1$ par une homothétie de centre O : $Z\mapsto\frac{1}{\alpha}Z$ ou une affinité : $X\mapsto\frac{1}{\alpha}X$.

On écrit alors que $g\in G$ si et seulement si ${}^t gQg$ est proportionnelle à Q, avec g triangulaire supérieure avec 1 en bas à droite. Le calcul donne :

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a^2 & ab\beta & -\frac{1}{2}b^2\beta \\ 0 & a & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ / \ a\in\mathbb{K}^*, b\in\mathbb{K}. \right\}. \tag{2}$$

Remarque 1. G est donc le groupe engendré par :

$$\text{les } h_a = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et les } t_b = \begin{pmatrix} 1 & b\beta & -\frac{1}{2}b^2\beta \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Regardez leur action sur $\mathcal{C}$: les h_a sont des «homothéties» et les t_b des «translations».

Plus précisément, $G = H \ltimes T$ avec $H = \{h_a, a \in \mathbb{K}^*\}$ et $T = \{t_b, b \in \mathbb{K}\}$, et $t_a t_b h_{a^{-1}} = t_{ab}$, donc algébriquement, $G \simeq \mathrm{GA}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^* \ltimes \mathbb{K}$. **Ici je vous ai dit une bêtise, j'avais oublié les transformations $\boldsymbol{h_a}$.**

La structure algébrique de G était prévisible. En effet, une conique propre non vide de $\mathbb{K}\mathrm{P}^2$ a une structure de droite projective et le groupe des applications projectives de $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{K})$ préservant la conique agit sur cette conique comme $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{K})$ agit sur $\mathbb{K}\mathrm{P}^1$. Or, dans le cas d'une conique $\mathcal{C}$ tangente à d_∞, le groupe G des applications affines préservant $\mathcal{C}$ est exactement le groupe des applications projectives préservant $\mathcal{C}$ et fixant le point $C = \mathcal{C} \cap d_\infty$, donc est isomorphe au stabilisateur d'un point dans $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{K})$, c'est-à-dire à $\mathrm{GA}(\mathbb{K})$. Ceci explique également l'allure de l'action des h_a et t_b sur $\mathcal{C}$ vue plus haut.

Remarque 2. Ce deuxième cas est le seul où G agit «vraiment» affinement, c'est-à-dire sans fixer un point. Son action sur $\mathbb{K}^2$ n'est pas conjuguée à celle d'un sous-groupe de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{K})$.

Par ailleurs, dans le cas précédent, G vu comme l'ensemble de matrices donné par (1) est en fait, mieux qu'un sous-groupe du groupe conforme $\mathrm{CO}(Q)$, un sous-groupe de $\mathrm{O}(Q)$. Ici, G vu comme en (2) n'est pas contenu dans $\mathrm{O}(Q)$.

4 Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Conique à centre. Par théorème d'inertie de Sylvester, l'action de G sur $\mathbb{K}^2$ vectorialisé en C est conjuguée à celle de $\mathrm{O}(2, \mathbb{R})$ ou celle de $\mathrm{O}(1, 1)$, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et à celle de $\mathrm{O}(2, \mathbb{C})$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on est dans le premier cas si et seulement si q est définie positive ou négative, i.e. $\mathcal{C}$ ne rencontre pas d_∞, i.e. $\mathcal{C}$ est une ellipse. On est dans le deuxième si et seulement si q est de signature $(1, 1)$, i.e. $Q_{|\{Z=0\}}$ admet deux racines distinctes, i.e. $\mathcal{C}$, qui coupe d_∞ en deux points, est une hyperbole.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, toutes les coniques propres à centre sont affinement conjuguées. Elles coupent toujours d_∞ en deux points.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathrm{O}(2, \mathbb{R}) \simeq (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et $\mathrm{O}(1, 1) \simeq \mathbb{R}^* \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ sont des groupes à un paramètre réel.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathrm{O}(2, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{C}^* \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est un groupe à un paramètre complexe.

Conique tangente à $\boldsymbol{d_\infty}$, c'est-à-dire parabole. On a vu que, algébriquement, $G \simeq \mathrm{GA}(1, \mathbb{K})$. C'est un groupe à deux paramètres réels (ou complexes). La situation est donc très différente, moins «rigide». Plus précisément, en notant G^+ le sous-groupe des éléments de G préservant l'orientation de $\mathbb{K}^2$, alors G^+ est *simplement transitif* sur $\mathcal{C}$ si $\mathcal{C}$ est à centre et «presque» *deux fois transitif* sur $\mathcal{C}$ si $\mathcal{C}$ est tangente à d_∞, en l'occurence simplement transitif sur les paires de points $\{p_1, p_2\} \subset \mathcal{C}$, ou bien sur les couples (p_1, p_2) tels que $p_1 \neq p_2$ et tels que, par exemple, la concavité de $\mathcal{C}$ est à gauche quand on parcourt $\mathcal{C}$ de p_1 vers p_2.

Références

[B90] M. Berger, *Géométrie* tome 2, Nathan, 1990.

[S86] P. Samuel, *Géométrie projective*, PUF, 1986.

Charles Boubel