Devoir – Énoncé revu

Exercice 1 Soit $A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ et $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ de classe C^1. On suppose que :

- toute solution de $x' = Ax$ vérifie $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$,
- $\lim\limits_{t\to+\infty} B(x,t) = 0$ uniformément en x, et $\|B(x,t)\|$ est borné si $t \geqslant 0$.

Montrer que toute solution de $x' = (A + B(x,t))x$:

a. est définie sur un intervalle allant jusqu'à $+\infty$,

b. vérifie $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

Exercice 2 Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, telle que df_x est toujours inversible et que :

$$\exists C \in \mathbb{R}_+^* : \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \|x\| \geqslant C \Rightarrow \|df_x^{-1}\| \leqslant C\|x\| \ln(\|x\|).$$

Montrer que f est un difféomorphisme et qu'il existe $C' \in \mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\|f^{-1}(y)\| \leqslant C' \exp(\exp(C'\|y\|)).$$

Indications. **a.** Soit y et x_0 dans $\mathbb{R}^n$. Majorer toute solution de l'équation différentielle

$$x'(t) = (df_{x(t)})^{-1}.y \tag{E_y}$$

avec la condition initiale $x(0) = x_0$. En déduire la surjectivité de f.

b. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. À l'aide de φ_y^t, flot de (E_y), construire un inverse à droite g_x de f (en particulier défini sur $\mathbb{R}^n$), tel que $g_x(f(x)) = x$. Par exemple en interprétant $(x,y) \mapsto (\varphi_y^t(x), y)$ comme le flot d'une certaine équation différentielle, montrer que pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, $x \mapsto g_x(z)$ est continue.

c. Dans quel ensemble $x \mapsto g_x(z)$ prend-elle nécessairement ses valeurs ? En déduire que cette application est constante. Déduire l'injectivité de f. Conclure. Pour la dernière question, on pourra traiter les cas $\|y\| \leqslant 1$ et $\|y\| > 1$ puis conclure.

Exercice 3 – Équation de van der Pol

On considère le système (S) : $x' = y + x - x^3$, $\ y' = -x$. Le but de l'exercice est de montrer que (S) admet une solution périodique. On notera par la suite $F(x) = x^3 - x$.

1) Déterminer les points critiques du système et en préciser la nature.

2) Montrer que par tout point (x_0, y_0) passe une trajectoire unique du système. En étudiant $x^2 + y^2$, montrez que les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$.

3) On définit Q_1, Q_2, Q_3 et Q_4 les quatre quadrants $\{x > 0, y > 0\}$, $\{x > 0, y < 0\}$, $\{x < 0, y < 0\}$ et $\{x < 0, y > 0\}$. Montrer que si une trajectoire du système est dans Q_1 à l'instant t_0, alors elle traverse successivement les quadrants : Q_1,Q_2,Q_3,Q_4,Q_1,....

4) Si la trajectoire passant par $A = (0, \overline{OA})$ recoupe Oy pour la première fois en $C = (0, \overline{OC})$, montrer que cette trajectoire est périodique si et seulement si $OA = OC$.

5) Soit $\alpha \geqslant 1$. On note $B = (\alpha, F(\alpha))$, et Γ_α la trajectoire passant par B. On appelle A et C les points où cette trajectoire rencontre Oy et qui sont avant et après B. On appelle D et E les points où cette trajectoire rencontre $\{x = 1\}$ et qui sont avant et après B. On pose $\varphi_1(\alpha) = \int_{AD} F dy + \int_{EC} F dy$. En remarquant que $F dy = \frac{-xF}{y-F} dx$, montrer que φ_1 est décroissante sur $[1, +\infty[$.

6) On pose $\varphi_2(\alpha) = \int_{DE} F dy$. Semblablement à la question précédente, mointrer que φ_2 est décroissante sur $[1, +\infty[$.

7) On pose $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Prouver $\varphi(1) > 0$ et $\lim_{t\to+\infty} \varphi(\alpha) = -\infty$.

8) Montrer que $\varphi(\alpha) = \frac{1}{2}(OC^2 - OA^2)$ et en déduire que (S) admet une trajectoire périodique.