Géométrie (Maîtrise) décembre 2004
2004/2005

T.D. - devoir 2

Dès la dimension un, les connexions peuvent être intéressantes...

a) Question préliminaire : donnez un exemple, le plus simple possible, de variété riemannienne sur laquelle une (ou les, comme vous voulez) géodésique(s) $t \mapsto \gamma(t)$ n'est (ne sont) pas définie(s) pour tout $t \in \mathbb{R}$.

b) Soit D la connexion définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $(D_X X)_{|x} = -\frac{2}{x}X$, où X est le vecteur $1 \in \mathbb{R}$. En quoi ceci définit-il effectivement une connexion sur $\mathbb{R}^{+*}$?

c) Montrez que cette connexion passe au quotient en une connexion $\check{D}$ de $\mathbb{R}^{+*}/H$ où $H = \{2^n / n \in \mathbb{Z}\}$. Plus précisément :

- Que veut dire la phrase précédente? (on peut introduire π la projection canonique)
- A présent que vous l'avez explicitée, montrez qu'elle dit vrai.
- Pendant qu'on y est, qu'est la variété $\mathbb{R}^{+*}/H$?

d) Décrivez les géodésiques de $(\mathbb{R}^{+*}, D)$. (Après avoir explicité l'équation différentielle $\frac{D}{\mathrm{d}t}\dot{\gamma} = 0$, on pourra poser $\alpha = 1/\gamma$.)

Les géodésiques de $(\mathbb{R}^{+*}/H, \check{D})$ sont les images par π de celles de $(\mathbb{R}^{+*}, D)$: justifiez-le. Un phénomène vous étonne-t-il? Des remarques et questions viennent alors à l'esprit. Faites ces remarques, posez ces questions et répondez-y. *Note:* En particulier, il vient à l'esprit les questions suivantes :

- La connexion $\check{D}$ peut-elle être la connexion de Levi-Civita d'une métrique de $\mathbb{R}^{+*}/H$?
- La connexion D peut-elle être la connexion de Levi-Civita d'une métrique de $\mathbb{R}^{+*}$?
- Le cas échéant, pouvez-vous donner une variété riemannienne bien connue, isométrique à la (aux) variété(s) que vous venez de construire? (Démonstration non exigée.)

En dimension deux, les connexions peuvent être encore plus étonnantes...

e) Pour le voir, introduisons par exemple la notion de métrique *pseudo-riemannienne*. Il s'agit d'une section non dégénérée mais non définie du fibré $S^2(\mathrm{T}^*\mathcal{M})$ des formes bilinéaires symétriques sur une variété $\mathcal{M}$. Autrement dit, la donnée d'un champ g de formes bilinéaires symétriques non définies[1]. Précisons : Montrez qu'une telle section (au moins C^1, bien sûr), est alors de signature constante si $\mathcal{M}$ est connexe. Montrez qu'on définit alors une unique connexion sans torsion compatible avec g, au sens donné par le cours. Cette connexion est encore appelée connexion de Levi-Civita.

f) Considérons $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ muni de la forme bilinéaire symétrique g définie par $g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = 0$ (partout) et $g_{|(x,y)}(e_1, e_2) = \frac{1}{x^2+y^2}$, avec (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. La forme g est un champ C^∞ de formes bilinéaires symétriques non-dégénérées et non définies, c'est donc une métrique pseudo-riemannienne sur $\mathcal{M}$. Quelle est sa signature?

Soit H le groupe $\{2^n \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, n \in \mathbb{Z}\}$ des homothéties de $\mathbb{R}^2$ de rapport une puissance de deux. Par restriction, H agit sur $(\mathcal{M}, g)$.

1. Attention : on ne peut *pas* munir toute variété différentielle d'une métrique pseudo-riemannienne.

• En exhibant deux cartes idoines de $\mathcal{M}/H$ obtenues à partir de $\pi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}/H$, vérifiez que $\mathcal{M}/H$ est bien une variété topologique munie d'une structure différentielle. A quelle variété bien connue $\mathcal{M}/H$ est-elle difféomorphe (il n'est pas demandé de preuve) ?

• Vérifiez que H agit par *isométries* sur $(\mathcal{M}, g)$. Ceci permet de définir la variété pseudo-riemannienne quotient $(\mathcal{M}/H, \breve{g})$: pourquoi ?

g) Calculez, sur $(\mathcal{M}, g)$, les $D_{e_i}e_j$, $\{i, j\} \subset \{1, 2\}$. En utilisant ce qui précède, donnez sans calcul la géodésique issue de $p = (1, 0) \in \mathcal{M}$, de vecteur tangent en ce point e_1. Comment se comporte la géodésique issue de $\pi(p) \in \mathcal{M}/H$, de vecteur tangent en ce point $T_p\pi(e_1)$? Quel phénomène se produit, qui n'est pas possible (pourquoi ?) sur une variété riemannienne ?

h) Jeu optionnel pour vos soirées hivernales. Commençons par une

Remarque. Si $t \mapsto \gamma(t)$ est une géodésique, alors $g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))$ est constant. Cette propriété du cours est vraie que g soit définie ou non. Parmi les géodésiques d'une variété pseudo-riemanniennes, certaines sont alors dites «isotropes» : celles telles que, pour un t, donc pour tout t, $g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)) = 0$ (*i.e.* $\dot\gamma(t)$ est g-isotrope).

Comment se comportent les géodésiques isotropes de $(\mathcal{M}/H, \breve{g})$? (Un dessin bien choisi résoud ce problème.)