Géométrie lorentzienne / géométrie riemannienne : quelques points communs et différences

Charles Boubel

février 2007

Le titre de ce cours est trompeur : les géométries riemanienne d'une part, et lorentzienne ou plus généralement pseudo-riemannienne d'autre part, diffèrent bien plus qu'elles ne se ressemblent. Leurs ressemblances consistent essentiellement en un socle commun de définitions et de premiers concepts : forme bilinéaire symétrique, isométries, géodésiques, courbure. Dès la première exploration, les géométries riemannienne et pseudo-riemannienne s'avèrent profondément différentes : les mêmes outils racontent des histoires différentes.

Le présent texte reprend brièvement les points communs des deux géométries, et indique quelques directions principales où des différences significatives apparaissent et avec elles, souvent, des chantiers de recherche. Il aborde la géométrie lorentzienne dans le cadre plus général de la géométrie pseudo-riemannienne, et mentionne le cas échéant les propriétés spécifiques du cas lorentzien.

La première partie est consacrée, avant même l'introduction des variétés (pseudo-)riemanniennes proprement dites, à la simple comparaison entre $\mathbb{R}^n$ muni d'un produit scalaire et $\mathbb{R}^n$ muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée mais indéfinie : entre la géométrie euclidienne et la géométrie «pseudo-euclidienne», donc. À titre de motivation historique, j'y mentionne pourquoi la constance de la vitesse de la lumière a amené la physique à introduire au début du 20ème siècle, avec la Relativité restreinte, un tel «produit scalaire lorentzien» comme nouveau cadre de la cinématique du point. Ce fondement historique a fortement motivé l'étude de la géométrie lorentzienne, même si tout une part des problématiques d'aujourd'hui sont devenues distantes ou indépendantes de cette motivation.

La deuxième partie s'intéresse aux variétés (pseudo-)riemanniennes et montre comment les différences pointées dans la première en provoquent de nouvelles, dans ce cadre. Les différences incontournables sont abordées : non-existence en général d'une métrique pseudo-riemannienne sur une variété compacte donnée, questions de complétude, divers défauts de compacité... une multitude est probablement passée sous silence.

Le but essentiel demeure de faire rencontrer la géométrie pseudo-riemannienne, sans prétendre être exhaustif dans aucune démarche. Une connaissance préalable de la géométrie riemannienne n'est pas requise, seule l'est celle de la géométrie différentielle de base et d'un peu de topologie. Quelques ajouts en plus petits caractères, introduits par un petit bâton |, s'adressent cependant au lecteur connaissant déjà un peu plus de géométrie.

1 Espaces vectoriels pseudo-euclidiens

1.1 Définition, points communs avec les espaces vectoriels euclidiens.

1.1 Définition Un espace vectoriel pseudo-euclidien est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie n muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée $g = \langle \cdot\,, \cdot \rangle$ qui est indéfinie, c'est-à-dire qui est conjuguée à une forme du type :

$$\mathrm{d}x_1^2 + \ldots + \mathrm{d}x_p^2 - (\,\mathrm{d}y_1^2 + \ldots + \mathrm{d}y_q^2),\ \text{ où :}$$

– la famille $(\,\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_p, \mathrm{d}y_1, \ldots, \mathrm{d}y_q)$ est une base de E^* (g est non dégénérée), en particulier $p + q = n$,

– les entiers p et q sont strictement positifs (g n'est ni définie négative, ni définie positive).

1.2 Rappel (Théorème d'inertie de Sylvester – Signature) Un couple (p, q) permettant une telle écriture existe pour toute forme bilinéaire symétrique et est unique. Il caractérise donc, à conjugaison près sous l'action $u : g \mapsto u^*g = g(u^{-1}\cdot\,, u^{-1}\cdot\,)$ de $\mathrm{GL}(E)$, une telle forme bilinéaire. On l'appelle *signature* de g.

1.3 Vocabulaire, Notation On appellera ici «pseudo-orthonormée» une base de E dans la base duale de laquelle g prend la forme normale donnée dans la définition 1.1. Par ailleurs, la notation $\mathbb{R}^{p,q}$ désignera $\mathbb{R}^{p+q}$ muni d'un produit pseudo-euclidien de signature (p, q). Un produit pseudo-euclidien sera dit *lorentzien* quand sa signature est $(p, q) = (n - 1, 1)$ (ou $(1, n-1)$). C'est donc le cas le «moins éloigné» du cas euclidien. On verra qu'il a bien plus de parenté avec les autres produits pseudo-euclidiens qu'avec un produit scalaire. Cependant il possède quelques propriétés spécifiques, dont certaines le rendent effectivement un peu moins étranger au cas euclidien que ses cousins d'autres signatures. L'espace $\mathbb{R}^{n-1,1}$ est ususellement dénommé espace de Minkowski.

Un espace pseudo-euclidien partage des propriétés de base avec un espace euclidien.

– Le groupe $\mathrm{O}(g)$ des transformations linéaires préservant g lui est associé : $\mathrm{O}(g) = \{u \in \mathrm{GL}(E)\,/\,u^*g = g\}$ est le groupe orthogonal de g, c'est un groupe de Lie, sa classe d'isomorphisme est notée $\mathrm{O}(p, q)$. Similairement sont définis les endomorphismes g-(anti)autoadjoints de E. Le calcul montre que l'algèbre de Lie de $\mathrm{O}(g)$, espace tangent à $\mathrm{O}(g)$ en Id_E, est l'espace des endomorphisme g-antiautoadjoints ; par conséquent $\dim \mathrm{O}(p, q) = \dim \mathrm{O}(n) = \frac{n(n-1)}{2}$.

– La non-dégénérescence de g signifie : $\forall v \in E \smallsetminus \{0\},\ g(v,\,\cdot\,) \neq 0$. Par égalité des dimensions, g induit donc un isomorphisme canonique de E sur son dual E^*, noté $\flat$, de réciproque notée $\sharp$:

$$\begin{array}{cccc} & E & \rightarrow & E^* \\ \flat : & v & \mapsto & v^\flat = g(v,\,\cdot\,), \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & E^* & \rightarrow & E \\ \sharp : & \alpha & \mapsto & \alpha^\sharp. \end{array}$$

Des isomorphismes entre espaces de tenseurs $E^{\otimes k} \otimes (E^*)^{\otimes l}$ de dimension $k + l$ donnée suivent.

– L'orthogonalité : $v \perp u$ si $g(v, u) = 0$, entre vecteurs ou sous-espaces, est semblablement définie. Si F est un sous-espace, $F^\perp = (F^\perp)^\sharp$, où le premier orthogonal $F^\perp \subset E$ est pris au sens de g et le second $F^\perp \subset E^*$ l'est au sens de la dualité. Désormais, $\perp$ désignera la g-orthogonalité. Il suit que $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$.

– Si on oriente E, il vient alors une unique forme volume ω privilégiée : celle qui, évaluée sur une base pseudo-orthonormée directe, donne 1. Comme $\mathrm{O}(p, q) \cap {\mathrm{GL_n}}^+(\mathbb{R}) \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, il en sera de même sur toute autre telle base. Un opérateur de Hodge en découle.

– Comme dans le cas euclidien, on peut considérer la structure conforme associée à g sur E, *i.e.* la classe $\mathbb{R}_+^*.g$ des métriques (positivement) proportionnelles à g.

1.2 Principales différences avec les espaces euclidiens

Contentons-nous déjà d'en donner une liste. On la commentera dans la partie 1.4.

(1) Il n'y a plus ni norme $\|v\| = \sqrt{g(v,v)}$ ni distance associée.

(1 bis) La notion d'angle disparaît aussi, ou plutôt est affaiblie.

(2) Un sous-espace vectoriel F d'un espace pseudo-euclidien E n'est pas nécessairement pseudo-euclidien : $g_{|F}$ peut dégénérer. Dans le même ordre d'idées, un sous-espace F et son orthogonal ne sont pas nécessairement en somme directe.

(3) Le groupe $\mathrm{O}(p,q)$ n'est pas compact. Aucun niveau de g ne l'est non plus.

(4) Sur un espace vectoriel E, l'ensemble des produits pseudo-euclidiens de signature (p,q) donnée est connexe, mais il n'est pas convexe, comme l'ensemble des produits scalaires.

(5) Alors que $\mathrm{SO}(n)$ est connexe, $\mathrm{SO}(p,q)$ a deux composantes connexes.

(6) Une dernière propriété n'est pas la mise en défaut d'une contrepartie euclidienne, mais au contraire l'apparition d'un objet nouveau, le cône isotrope $\{v \in E \,/\, g(v,v) = 0\}$ de g. Dans le cas euclidien, il est réduit à $\{0\}$. Rappelons au passage la terminologie suivante.

1.4 Vocabulaire Un vecteur v de (E,g) tel que $g(v,v) = 0$ est dit isotrope. Un sous-espace F de (E,g) tel que $F = \{0\}$ ou $g_{|F}$ est dégénérée, respectivement tel que $g_{|F} = 0$, est dit isotrope, respectivement totalement isotrope. Équivalemment, ($F = \{0\}$ ou $F \cap F^\perp \supsetneq \{0\}$) et $F \subset F^\perp$, respectivement.

Avant de poursuivre, un détour historique explique l'apparition, avec la relativité restreinte, d'un produit lorentzien à la base de la mécanique du point, lorsque de grandes vitesses relatives sont en jeu. Il motive l'étude de $\mathbb{R}^{n-1,1}$, avant même l'introduction de toute géométrie différentielle.

Conjuguée à l'interprétation de la gravitation comme une courbure, par la relativité générale, cette apparition de $\mathbb{R}^{3,1}$ en physique a stimulé l'étude des variétés lorentziennes.

Ce détour familiarisera aussi le lecteur, avant le commentaire des propriétés du 1.2, avec $\mathbb{R}^{1,1}$. Par ailleurs, il expliquera l'origine d'un petit vocabulaire devenu usuel en géométrie lorentzienne : vecteurs-temps, -lumière ou -espace, cône de lumière etc.

1.3 L'apparition d'un produit lorentzien en physique : la relativité restreinte

Ce paragraphe résume une présentation vulgarisée de la relativité donnée par Einstein [E1917] ou [E1921].

Commençons par un retour en arrière de quelques siècles. Une forte parenté unit en effet la transition conceptuelle née de la mécanique galiléenne au $16^{\text{ème}}$ siècle et celle née de la relativité restreinte en 1905.

L'apparition de la mécanique dite galiléenne a notamment correspondu à la disqualification d'un concept intuitif universellement reçu et utilisé, celui d'immobilité, plus exactement d'immobilité absolue[1]. La cause en est simple : quelle définition physique donner de cette

[1]Cette présentation, abrupte pour abréger l'exposé, d'un tel abandon galiléen du concept d'immobilité (*cf.* 1.6) est cependant caricaturale. Galilée a apporté la nouveauté décisive suivante : il décrit la chute des corps, de manière quantitative et vérifiée par l'expérience, par une loi valable quel que soit le mouvement d'ensemble du lieu où l'on mesure la chute, pourvu que celui-ci soit un mouvement de translation rectiligne uniforme. Cet apport est fondateur, à plusieurs titres. L'abandon du concept même de coordonnées absolument immobiles

notion ? L'entreprise semble impossible. Tant que sa définition demeure impossible, il faut alors oublier ce concept. Une notion physiquement définissable, en revanche, est celle de repère galiléen. C'est un repère dans lequel un solide isolé, c'est-à-dire sur lequel ne s'exerce aucune force (on suppose défini ce concept, il y a des choses sous le tapis), n'est pas accéléré. Si un tel repère est donné, l'ensemble des repères galiléens est alors l'ensemble des repères

---

n'adviendra que bien après cette construction de lois qui leur sont indifférentes. Précisons l'apport de Galilée.

– L'apport novateur de Galilée a une dimension mathématique, une relevant de la démarche et de la théorie physique, une enfin relevant de l'expérimentation physique.
(i) Une dimension est mathématique : Galilée introduit, pour la première fois semble-t-il, un concept clair de vitesse instantanée. Il intègre cette vitesse pour trouver la loi du mouvement. Pour ce faire, en l'absence de calcul infinitésimal, il ruse, mais par un raisonnement mathématiquement correct. Par ailleurs, il utilise la linéarité de l'espace des vitesses («vecteurs vitesse», dirions-nous), pour décomposer la composante horizontale et la composante verticale de la vitesse, et disjoindre leur étude. Sans cet arsenal conceptuel, il n'aurait pu construire sa physique.
(ii) La démarche physique est novatrice : il s'agit de la démarche expérimentale, très aboutie chez lui. Galilée essaie de distinguer parmi les causes du mouvement (poids, résistance de l'air), spécule une loi, celle d'une vitesse croissant linéairement avec le temps, en tire une conséquence mathématique — la distance parcourue est proportionnelle au carré du temps —, élabore une expérience susceptible de vérifier ou réfuter cette loi, prend soin de vérifier au préalable que des phénomènes annexes inévitables — ici les frottements — sont négligeables dans son cadre de travail, exécute l'expérimentation et valide sa loi. Par ailleurs, encore sur le plan théorique, le fait que le «référentiel» soit immobile ou en mouvement uniforme devient indifférent pour décrire le mouvement d'un objet soumis à son seul poids. Il s'agit indubitablement d'une nouveauté majeure, et dont il est parfaitement conscient. Galilée l'introduit qualitativement dans [G1632], dont le but est d'accréditer la rotation de la Terre autour du soleil. Il définit le mouvement «uniforme» — circulaire dans cet ouvrage — dans la «1$^{\text{ère}}$ journée». Celui-ci est «imperceptible et comme s'il n'était pas», au sens que le mouvement des corps y obéit aux même lois que dans un milieu au repos, début de la 2$^{\text{ème}}$ journée. Un peu plus loin il est «comme rien», suivent les célèbres exemples du boulet lâché du haut du mât d'un navire et du mouvement de papillons à l'intérieur de ce navire. Galilée définit ensuite plus précisément les mouvements uniforme et uniformément accélérés dans [G1638], début de la 3$^{\text{ème}}$ journée, puis il décrit quantitativement la loi du mouvement accéléré par la gravité. L'indifférence au mouvement uniforme du référentiel apparaît mathématiquement. En cela il peut être à bon droit considéré comme le père du principe de relativité en mécanique : le mouvement est relatif, il n'existe que par rapport à quelque chose ; plus précisément la loi de chute des corps est valable relativement à n'importe quel référentiel non accéléré.
(iii) Galilée innove enfin expérimentalement, avec une belle ruse expérimentale, ses plans inclinés ralentissant le mouvement de chute sans perturber sa loi, et permettant des observations quantitatives précises.

– Il faut cependant nuancer l'introduction du principe de relativité. En effet, même si Galilée est conscient de sa nouveauté et de son caractère fondamental, il n'en conclut nulle part la vacuité du concept d'immobilité absolue. Au contraire, il n'a explicitement pas franchi ce saut. Sa définition du mouvement uniforme dans [G1638] omet de préciser par rapport à quoi la vitesse est uniforme. L'état de repos absolu reste donc, semble-t-il, une référence sous-entendue. Ensuite, sa célèbre défense [G1632] de l'héliocentrisme de Copernic, qui lui a valu sa condamnation de 1633, affirme précisément l'«immobilité» et la centralité du soleil, en lieu et place de celles de la Terre, admises à la suite d'Aristote. J'ignore quand le concept d'immobilité en mécanique a été explicitement abandonné comme vide. Newton [N1687] parle encore de référentiel au repos «absolu», voir plus bas. Ce concept perd tout sens mathématique avec la Relativité Générale, 1917.

– Enfin, le principe même d'indifférence du choix du référentiel en mouvement uniforme est encore imparfait chez Galilée, de trois manières. Déjà, il n'introduit jamais de mouvement uniforme qu'*horizontal*, il manque une extension explicite à tous les autres. Ensuite, il subsiste chez lui une contradiction latente, lorsqu'il affirme que le mouvement naturel non accéléré d'un solide serait circulaire — épousant la surface de la terre —, ou par ailleurs rectiligne, comme il se déduit de son formalisme mathématique. La notion de référentiel «galiléen» n'est donc pas totalement mûre chez Galilée. Enfin, plus secondairement, la mécanique de Galilée ne traite que de la chute des corps. C'est Newton [N1687] qui traitera toute force mécanique et produira une mécanique générale valable dans tout référentiel «galiléen». Il précisera et affermira totalement le principe de relativité de Galilée. Notons cependant que si, d'un point de vue mathématique, la mécanique de Newton est la même dans un référentiel au repos absolu ou en mouvement uniforme, Newton introduit la notion d'«espace qu'[il] appelle immobile» ([N1687] livre I, *Définitions*, Scholie, IV), essentiellement comme le support mathématique $\mathbb{R}^4$ où il pose ses calculs. Il semble qu'il l'identifie au référentiel lié aux étoiles lointaines. Voir [N1687], premières pages du livre I, *Définitions* puis *Lois du mouvement*.

en translation rectiligne uniforme par rapport à lui.

Cette classe de repères est définie d'après un critère physique mesurable. Elle est effectivement physiquement privilégiée, pourvu qu'elle existe, ce qui est le cas, en première approximation. Une notion affaiblie d'immobilité subsiste : celle d'immobilité dans un certain repère de la classe.

Le monde galiléen E se formalise donc ainsi, dans un certain repère galiléen : $E = (\mathbb{R}^3, g_{\text{eucl}}) \times \mathbb{R}$. Le premier facteur indique les coordonnées spatiales, le deuxième la coordonnée temporelle. Notons (x, y, z, t) ces coordonnées dans $E = \mathbb{R}^4$.

1.5 Vocabulaire Un *événement* est, par définition, un point dans cet espace-temps E. Il est donc défini par sa position spatiale, sa composante (x, y, z) sur le premier facteur, et sa position temporelle, sa composante t sur le deuxième. L'histoire d'un point matériel au cours du temps est l'image $\gamma(I)$ d'une courbe $\gamma \in C^1(I, E)$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, telle que : $\forall s \in I$, $t(\gamma'(s)) > 0$. La condition traduit l'écoulement «positif» du temps. On appellera désormais *trajectoire* d'une particule ponctuelle une telle courbe dans $E \simeq \mathbb{R}^4$. Une trajectoire admet un paramétrage privilégié, celui par le temps *i.e.* tel que : $t(\gamma'(s)) \equiv 1$.

Enfin on nomme *observateur* une particule non accélérée *i.e.* de trajectoire rectiligne, ou la trajectoire d'une telle particule.

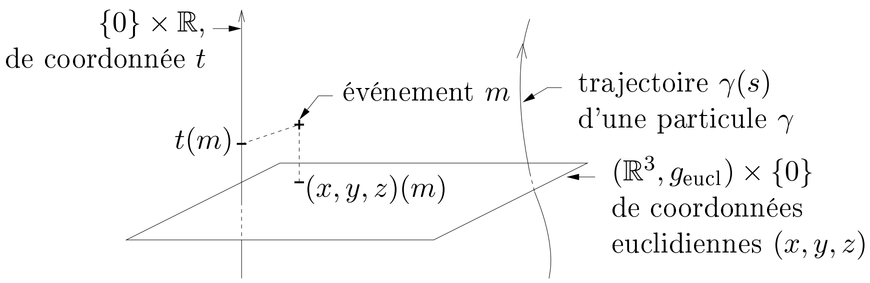


FIG. 1 – Le monde de Galilée E, muni d'un de ses systèmes de coordonnées galiléens (x, y, z, t).

Par ailleurs, E est paramétré de manière équivalente par tout autre système (x', y', z', t') de coordonnées galiléen, c'est-à-dire en translation rectiligne uniforme par rapport au système (x, y, z, t), ce qui signifie, par définition :

$$(x', y', z', t') = (M.(x, y, z) + t.(a, b, c), t), \quad \text{où } M \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^3, g_{\text{eucl}}) \text{ et } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

Pour alléger, on n'a considéré que les transformations linéaires *i.e.* préservant l'origine : on a omis l'ajout possible d'une constante (x_0, y_0, z_0, t_0). Notons que le groupe $G_{\text{Galilée}} \simeq$

N'étant pas historien des sciences, je commets nécessairement des erreurs d'appréciation dans ce panorama. J'espère seulement qu'elles ne sont pas majeures. Je renvoie le lecteur à de tels historiens pour des commentaires plus sûrs sur la nouveauté galiléenne et une meilleure mise en perspective.

La question de l'indifférence du choix du référentiel inertiel a été réactivée par l'électromagnétisme. La nature ondulatoire de la lumière, objet d'indices concordants dégagés par C. Huygens (1629-1695), puis battue en brèche par Newton, a été déterminée avec certitude par l'expérience d'interférence de T. Young en 1801. Il s'est ensuivi la question du milieu dans lequel se propage cette onde, l'«éther», conjecturé par Huygens et devenu concept incontournable après 1801 et au long du $19^{\text{ème}}$ siècle pour nombre de physiciens. Avec cette question a resurgi celle d'un unique référentiel privilégié — «immobile» donc — : celui lié à l'éther. Ainsi, si les lois de la mécanique sont indifférentes au mouvement uniforme du référentiel, celles de l'électromagnétisme, régissant la propagation de la lumière, réintroduisent la question de cette indifférence, voir ici les remarques 1.21 et 1.22.

$\mathrm{O}(3,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^3$ obtenu est de dimension 6. Ainsi, le monde galiléen est E, muni de l'orbite $G_{\text{Galilée}}.(x,y,z,t)$ d'un système de coordonnées galiléen sous l'action de G, voir fig. 2.

1.6 Remarque La notion d'immobilité n'existe donc pas dans E. En revanche, $t = t'$. À changement d'origine près (ajout de t_0, omis ici), le temps est défini absolument. Une fois fixée une origine, chaque événement $m \in E$ a une coordonnée temporelle, indépendante du repère galiléen choisi. On peut parler du temps $t(m_2 - m_1)$, noté aussi $\mathrm{d}t(m_2 - m_1)$, cela revient au même dans un espace vectoriel, écoulé entre deux événements m_1 et m_2, et de la simultanéité de ces derniers si ce temps est nul. En particulier également, toute trajectoire de point allant de l'événement m_1 à l'événement m_2 est de même durée, égale à $\mathrm{d}t(m_2 - m_1)$.

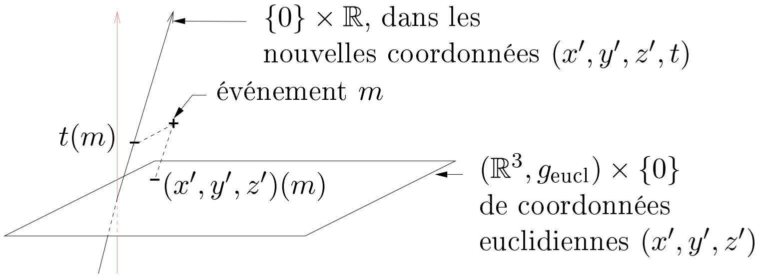


FIG. 2 – De nouvelles coordonnées galiléennes. La coordonnée t est invariante. Le feuilletage par plans $\{t = \text{cte}\}$ l'est donc aussi, feuille à feuille.

L'apparition de la relativité restreinte correspond à la disparition d'une autre notion intuitive : celle évoquée ci-dessus de simultanéité. Plus généralement, la notion d'un temps globalement défini (à une constante près) va disparaître. Cette disparition a deux sources : d'une part la constatation physique de l'égalité de la vitesse c de la lumière dans tous les référentiels galiléens (Michelson et Morley, 1887), d'autre part la même exigence d'une définition physiquement mesurable de la notion de simultanéité. Or un observateur ne peut se situer à la fois en deux événements m_1 et m_2 pour constater, ou pas, leur simultanéité. Il faudra recourir à un signal voyageant dans l'espace.

1.7 Récapitulation : données physiques Pour introduire la relativité restreinte, récapitulons les deux données de l'observation. Voir aussi fig. 3.

Déjà le monde, *tel qu'il apparaît à un certain observateur* $p(s)$, est $(\mathbb{R}^3, g_p) \times \mathbb{R}$, où g_p est une métrique euclidienne — puisque p peut mesurer des distances dans l'espace —, et où le dernier facteur $\mathbb{R}$ est muni d'une coordonnée-temps privilégiée t_p — puisque p peut mesurer des durées. Avant d'en savoir plus, on indexe g et t par leur observateur p. Note : ces mesures posent apparemment le problème de la non-ubiquité de p. Comment un observateur peut-il effectuer une mesure autre que celle du temps le long de sa propre trajectoire ? Ailleurs, il est absent. Ce problème se résoud car l'expérience prouve que tout observateur fixe par rapport à p peut synchroniser sa montre avec celle de p. La vérification se fait par échange de pulsations lumineuses, voir [E1905], I.1., *définition de la simultanéité*. Ceci permet d'associer physiquement à l'observateur p, qui ne constitue que sa trajectoire *i.e.* une droite dans $\mathbb{R}^4$, des coordonnées de tout l'espace $\mathbb{R}^4$. Les mesures «par p» de distances et de temps entre événements sont alors données par ce système de coordonnées.

Ensuite, le monde est muni, en tout point m, des trajectoires de rayons lumineux émis par m ou passant par m. Ces trajectoires, rectilignes, constituent les règles d'un cône dans $\mathbb{R}^4$, d'équation $x_p^2 + y_p^2 + z_p^2 = c^2 t_p^2$, dans des coordonnées (x_p, y_p, z_p, t_p) liées à un certain observateur p tel que $p(0) = m$. Il s'agit donc d'un cône du second degré, hypersurface de dimension trois dans $\mathbb{R}^4$. Le front d'onde apparaît, dans chaque hyperplan $t_p = s$, comme une sphère centrée en ce qui apparaît à $p(s)$ comme le lieu d'émission, dans les temps ultérieurs à l'émission. Un tel cône du second degré est attaché à chaque point m de E.

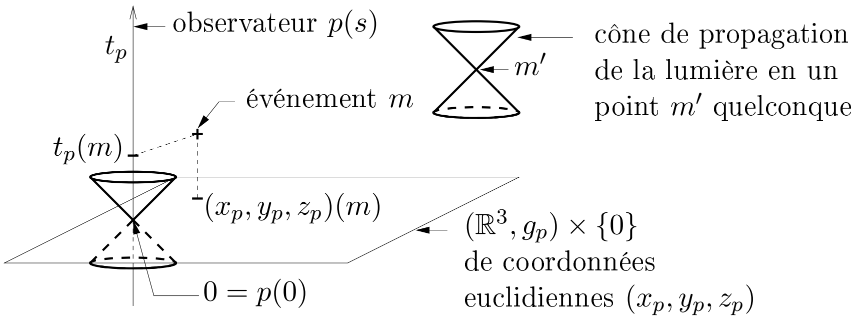


FIG. 3 – Le monde, tel que perçu par un observateur $p = p(s)$, avec le facteur espace $\mathbb{R}^3$ représenté comme $\mathbb{R}^2$. Les cônes apparaissent donc bidimensionnels. Les unités d'espace et de temps sont choisies pour que $c = 1$, la pente des règles des cônes est donc 1.

1.8 Vocabulaire Ces cônes sont appelés cônes de lumière.

Pour la suite, un exposé basé sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ avec des coordonnées (x, t) — une seule dimension d'espace — suffit, sans perte de généralité pour les résultats obtenus. En effet la question centrale est celle du changement d'observateur, c'est-à-dire du passage au système de coordonnées lié à un nouvel observateur. Or, quitte à translater un des observateurs, ce qu'autorise la note de 1.7, deux observateurs constituent deux droites sécantes et engendrent un plan. Les cônes y sont des couples de droites.

1.9 Exemple introductif Suivant [E1917], on considère, dans ce monde, un «quai de gare» de longueur $2d$ et un observateur $p = p(s)$ situé au milieu de ce quai. Cette position médiane a pu être physiquement vérifiée, au préalable, par ledit observateur à l'aide d'un mètre. Supposons alors qu'à chaque extrémité du quai se trouve une lampe pouvant émettre un signal lumineux. L'observateur a un critère de simultanéité pour deux tels signaux, émis de chaque extrémité aux événements respectifs m_1 et m_2 : m_1 et m_2 sont simultanés si leurs signaux lumineux parviennent simultanément à l'observateur, c'est-à-dire si cette arrivée constitue un même événement. En effet la lumière met, partout, le même temps $\frac{d}{c}$ pour parcourir (dans le vide) une même distance d ; du moins toutes les mesures le confirment, on suppose donc qu'il en est toujours ainsi. Cette définition de la simultanéité sera néanmoins relative à l'observateur. En effet, comme [E1917], supposons qu'un train passe le long de ce quai à la vitesse $v > 0$ et que ce soit le passage de la tête du train en tête de quai qui déclenche le signal m_2, et celui de la queue du train en queue de quai qui déclenche m_1. Supposons enfin que la situation soit telle que l'observateur p du milieu du quai perçoive les événements m_1 et m_2 comme simultanés, c'est à dire qu'il reçoit leurs signaux simultanément (événement «point noir» figure 4). Un second observateur $q = q(s)$ est situé au milieu du train — position également mesurée à l'avance. La vitesse v du train étant constante, ce dernier constitue lui aussi un repère galiléen. Les photons émis par les événements m_1 et m_2 se déplacent donc, dans le repère lié au train, à la vitesse c, *même s'ils ont été émis par des dispositifs fixes par rapport au quai et pas au train.* L'observateur q tient donc le même raisonnement que l'observateur p : m_1 et m_2 sont simultanés si leurs signaux lumineux lui parviennent simultanément. Ce n'est pas le cas, comme on le vérifie figure 4, où la perception de m_1 est postérieure à celle de m_2 (événements cerclés). Pour q, c'est un éventuel signal m_3 indiqué figure 4, émis par l'avant du train, qui est simultané à m_1.

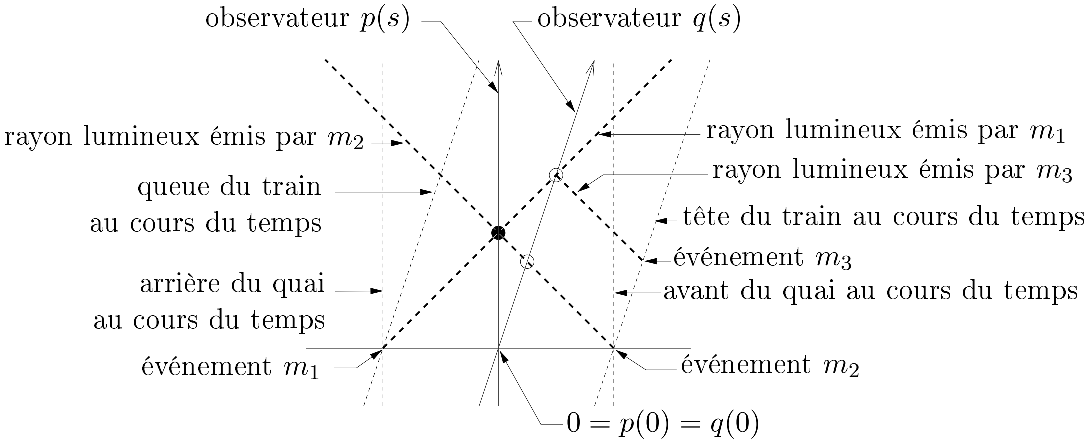


FIG. 4 – L'exemple du train présentée dans [E1917] et [E1921].

Ainsi, les événements physiquement perçus comme simultanés à l'événement m_1 par l'observateur p constituent la droite (m_1m_2). Ceux physiquement perçus comme simultanés à ce même événement m_1 par l'observateur q constituent la droite (m_1m_3).

Cette constatation n'est pas une absurdité. Elle signifie simplement que la coordonnée temporelle t_p perçue par p et celle, t_q, perçue par q, diffèrent. Une analyse similaire des coordonnées spatiales x_p et x_q montrerait qu'elles diffèrent également, et pas par une «translation uniforme» $x_q = x_p - vt_p$ comme sous l'action du groupe $G_{\text{Galilée}}$. Cherchons donc comment (x_q, t_q) notés désormais (x', t'), sont fonction de (x_p, t_p), notés (x, t).

1.10 Proposition (Voigt, Heaviside, Fitzgerald, Lorentz, Larmor, Poincaré, Einstein[2]) Une métrique lorentzienne g se déduit naturellement des données 1.7. Alors les coordonnées (x', t') sont celles perçues par un certain observateur q si et seulement si : $(x', t') = A.(x, t)$ avec $A \in \mathrm{SO}_0(g)$.

Démonstration. Elle suit presque immédiatement de la constance de la vitesse de la lumière. Donnons-en deux versions.

Version 1. Elle reprend, légèrement reformulés, les exacts arguments de [E1905]. Dans $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, choisissons une orientation du facteur espace et une du facteur temps. Notons u et v des vecteurs colinéaires aux rayons lumineux de vitesse $+c$ et $-c$ respectivement. Notons φ le difféomorphisme de E tel que $(x', t') = \varphi^*(x, t)$ et $A = \mathrm{d}\varphi(0)$, alors $\mathrm{d}x'(0) = \mathrm{d}x(0).A = x.A$ car x est une forme linéaire ; de même $\mathrm{d}t'(0) = t.A$. La vitesse de la lumière mesurée en 0 dans (x, t) et dans (x', t') est c, c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{l} x(u) = ct(u) \\ x(A(u)) = ct(A(u)) \end{array} \right. \quad \text{donc :} \left\{ \begin{array}{l} (x - ct)(u) = 0 \\ (x - ct)(A(u)) = 0. \end{array} \right.$$

Semblablement il vient que : $(x + ct)(v) = (x + ct)(A(v)) = 0$. Posons $g = (x - ct)(x + ct) = x^2 - c^2t^2$. Voici apparaître le produit lorentzien annoncé. On vient de montrer que les bases

[2]Tous ont contribué, j'ai essayé d'être chronologique. Le dernier n'a donc pas du tout la primeur de la proposition. En revanche, il en a tiré radicalement les conséquences physiques, de façon limpide, avec sa théorie de la relativité restreinte [E1905]. Woldemar Voigt [V1887] a la primeur de la transformation, à un facteur conforme près (voir ici la preuve : on montre déjà que le changement de coordonnées est conforme lorentzien). Henri Poincaré [P1905] a clarifié le tenseur invariant g et la structure de groupe de $\mathrm{O}(3, 1)$. Voir aussi l'appréciation historique de [D05] pp. 33–34.

(u,v) et $(A(u),A(v))$ sont toutes deux constituées de vecteurs g-isotropes. Donc A est dans le groupe conforme de g (le vérifier), et même dans sa composante neutre $\mathbb{R}_+^*.\mathrm{SO}_0(g) = \mathrm{CO}_0(g)$, pour des questions d'orientation spatiale et temporelle conservées. L'essentiel est dit. La suite est un achèvement technique. Les changements de coordonnées induits par les changements d'observateurs forment un groupe, transitif sur les directions de pente supérieure à $\frac{1}{c}$ (vitesse inférieure à c). Donc $G = \mathrm{CO}_0(g)$ ou $G = \exp(\mathbb{R}.M)$ où $M \in \mathfrak{co}(g)$ est un endomorphisme de matrice $\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}$ dans la base (u,v). (Remarquer que l'exponentielle de matrices est un difféomorphisme de cet ensemble de matrices sur $\mathfrak{co}(g)$, algèbre de Lie de $\mathrm{CO}_0(g)$, sur $\mathrm{CO}_0(g)$. Par ailleurs, on suppose que A dépend différentiablement du changement de coordonnées q.) Enfin la symétrie de l'effet de la vitesse de q, quand celle-ci vaut $\pm v$, contraint $\operatorname{tr} M = 0$ *i.e.* $M \in \mathfrak{o}(g)$. Donc $G = \mathrm{SO}_0(g)$. Pour conclure, [E1905] affirme que, «par homogénéité de l'espace-temps», φ est nécessairement linéaire, donc $\varphi = A$. | On peut aussi, purement mathématiquement, remarquer qu'en tout point m, $g = g_{|m}$ est définie et que par le même raisonnement : $\mathrm{d}\varphi(m) \in \mathrm{SO}_0(g_{|m})$. Par conséquent, φ est une isométrie de la variété pseudo-riemannienne (E,g). Comme enfin g est plate (synchronisation possible des montres, voir 1.7), et par un théorème non entièrement trivial[3], φ est linéaire, donc égale à A. □

Version 2. Généralisant la version 1 au cas $E = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, elle met en valeur son argument central. L'égalité de la vitesse de la lumière, donc de l'équation des rayons lumineux, pour deux observateurs, est exactement l'affirmation que *le cône de lumière a la même équation : $x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$ dans les systèmes de coordonnées liés aux deux observateurs.* Géométriquement : $A(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, où $A \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^4)$ est le changement de coordonnées et où $\mathcal{C}$ est, en chaque m de E, le cône isotrope d'une forme quadratique lorentzienne $g_{|m}$. Par la proposition 1.29, $A^*g_{|m} = \lambda g_{|m}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ *i.e.* $A \in \mathrm{CO}(g)$. On conclut semblablement. Remarque : dans le cas $E = \mathbb{R}^2$, 1.29 est immédiate. Le cône, union de deux droites $\mathrm{vect}(u_1)$ et $\mathrm{vect}(u_2)$ est A-invariant si et seulement si, à composition près par la permutation des u_i, chaque u_i est vecteur propre de A *i.e.* $A \in \mathrm{CO}(u_1^*.u_2^*)$. □

1.11 Remarque Retournant dans $\mathbb{R}^2$, et de façon délibérément élémentaire, élucidons l'exemple 1.9 par le fait $(*)$ suivant. Si p est un observateur, P sa trajectoire, U_1 et U_2 les deux directions des rayons lumineux et σ la symétrie par rapport à U_i, parallèlement à U_{3-i}, $(i = 1$ ou $2)$, alors on montre :

$$\text{Les événement perçus par } p \text{ comme simultanés à } 0 = p(0) \text{ forment la droite } \sigma(P). \quad (*)$$

Utilisons le second fait fondamental de 1.7 sous la forme «dans le système de coordonnées (x,t) perçues par p, la vitesse de la lumière est égale dans toutes les directions» *i.e.* :

$$U_1 \text{ et } U_2 \text{ sont symétriques par rapport à } P = \{x = 0\}, \text{ parallèlement à } \{t = 0\}. \quad (**)$$

L'équivalence de $(*)$ et $(**)$ est alors un exercice facile de géométrie ou d'algèbre linéaire.

On peut aussi montrer élémentairement $(**) \Rightarrow (*)$ en revenant, dans l'esprit de l'exemple, à des mesures. Supposons que l'observateur p tient, fixe par rapport à lui, une règle. Soit m un événement à l'extrémité de la règle et M la trajectoire de cette extrémité. Soit p' l'événement où p reçoit le signal lumineux de m, m' celui où un rayon lumineux issu de p rencontre M, x la distance $0m$, t_1 la durée $0p'$ et t_2 la durée mm', perçus par p ou m (c'est pareil, *cf.* note de 1.7). Les événements m et $0 = p(0)$ sont perçus comme simultanés par p si et seulement si $t_1 = x/c$, et par m si et seulement si $t_2 = x/c$, *avec le même c dans les deux cas, par* $(**)$. Mais m et p, mutuellement fixes, ont la même notion de simultanéité,

[3] Cousin du théorème «si une application de $\mathbb{R}^n$ euclidien dans lui-même préserve la distance euclidienne, alors elle est, à translation près, un automorphisme linéaire».

voir encore la note de 1.7. Donc 0 et m sont P-simultanés si et seulement si $t_1 = t_2$ *i.e.* $(0mm'p')$ est un parallélogramme, puisque P et M sont parallèles. Équivalemment : m est le le symétrique $\sigma(p')$ de p' par rapport à U_i, parallèlement à U_{3-i} ($i = 1$ figure 5), d'où $(*)$.

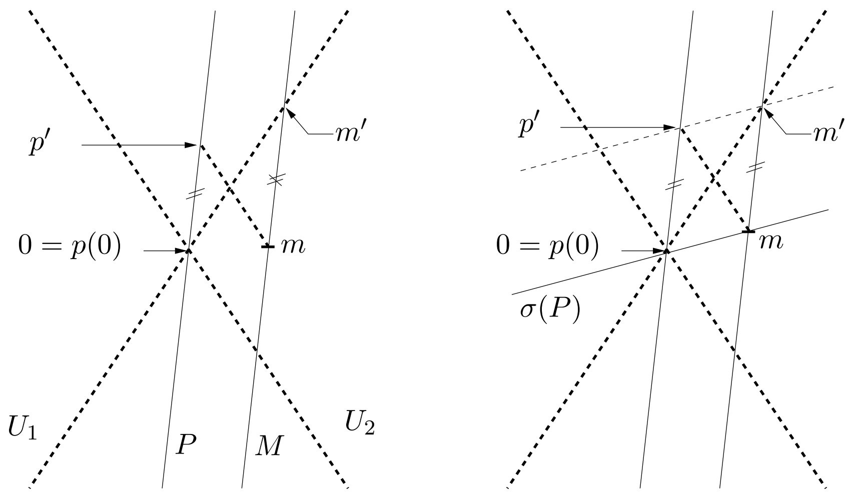


FIG. 5 – À gauche, m n'est pas P-simultané à 0, à droite il l'est. Le dessin oublie volontairement toute allusion euclidienne : c est quelconque, P n'est pas «vertical» notamment.

On retrouve également ainsi l'action projective d'un changement A d'observateur, envoyant P sur un autre observateur Q. Par définition, A envoie temps p-simultanés à 0 sur temps q-simultanés à 0. Comme $(**)$, donc $(*)$, sont vraies dans les deux systèmes, A, qui fixe U_1 et U_2, envoie donc $\sigma(P)$ sur $\sigma(Q)$. Ceci décrit l'action projective de A. C'est précisément celle des éléments de $\mathrm{SO}_0(g)$. En effet $\sigma(P) = P^{\perp_g}$.

En remplacement du monde de la cinématique galiléenne, le monde $E = \mathbb{R}^4$ de la cinématique relativiste est donc muni d'une forme quadratique lorentzienne g, d'un système de coordonnées (x, y, z, t) dans lequel $g = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$, et de tout autre système (x', y', z', t') perçu par un observateur en translation rectiligne uniforme dans le premier système, les systèmes étant liés par :

$$(x', y', z', t') = A.(x, y, z, t), \quad \text{où } A \in \mathrm{O}(g).$$

Notons que $\dim \mathrm{O}(g) = \frac{4(4-1)}{2} = 6 = \dim G_{\text{Galilée}}$. Le groupe des changements de coordonnées inertielles garde la même dimension. Semblablement, on a omis l'ajout possible d'une constante. Le groupe affine, avec cet ajout, est dit groupe de Poincaré $G_{\text{Poincaré}} = \mathrm{O}(g) \ltimes \mathbb{R}^4$.

1.12 Remarque Physiquement, les phénomènes étranges du type de l'exemple 1.9 ne sont sensibles que quand des vitesses relatives de l'ordre de c apparaissent. Quand ce n'est pas le cas, l'action de $\mathrm{O}(g)$ ne diffère pas sensiblement de celle de $G_{\text{Galilée}}$.

1.13 Exercice Dans l'exemple 1.9, si le train s'arrêtait le long du quai, serait-il de même longueur que lui ? Autrement dit, sa longueur, pour q («longueur du train au repos» car mesurée par q fixe par rapport à lui), est-elle égale à celle du quai, pour p («longueur du quai au repos») ? La réponse est non, le train est plus long. Les rôles du train et du quai ne sont donc pas symétriques. Pourquoi ? Quelle est la longueur du train perçue par p ? Celle du quai perçue par q ?

1.14 Remarque L'action de $O(g)$ montre notamment que la perception du temps dépend de l'observateur. Notamment, *une fonction temps globalement définie, à une constante près, n'existe plus.* La nouvelle notion pertinente est la suivante.

1.15 Définition (Temps propre) La coordonnée temporelle t_p associée à l'observateur p, en restriction à la trajectoire de p, est dite «temps propre de p». Si p_1 et p_2 sont des événements successifs sur celle-ci, $(\mathrm{d}t_p(p_2-p_1))^2 = -g(p_2-p_1, p_2-p_1)$, donc $\mathrm{d}t_p(p_2-p_1) = \sqrt{-g(p_2-p_1, p_2-p_1)}$, écriture qui ne fait plus intervenir t_p. Le temps propre est donc la «longueur lorentzienne» des vecteurs de la trajectoire. Comme pour la longueur euclidienne d'une courbe, on obtient alors le temps propre t_γ de n'importe quelle particule $\gamma \in C^1(\mathbb{R}, E)$, éventuellement accélérée, entre $\gamma(0)$ et $\gamma(s_0)$, par la formule :

$$t_\gamma(s_0) = \int_0^{s_0} \sqrt{-g(\gamma'(s), \gamma'(s))}\ \mathrm{d}s.$$

Notamment, si deux trajectoires de particules γ_1 et γ_2 dans $C^1([0,1], E)$ ont même point de départ $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ et d'arrivée $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$, le temps perçu par chacune entre ces extrémités est, en général, différent. Une comparaison de ces temps perçus acquiert un intérêt particulier *parce que les deux départs, puis les deux arrivées, coïncident*, donc sont vraiment simultanés : il s'agit chaque fois d'un même événement. Le temps entre deux événements dépend donc de la trajectoire suivie entre eux. L'illustration suivante [L11] en est célèbre.

1.16 Remarque (Phénomène des jumeaux — voir aussi 1.26) Considérons deux particules p et q partant de 0 et se rejoignant en un point m dans $E = \mathbb{R}^2$ et dotées de trajectoires comme figure 6. Alors le temps propre de p de 0 à m est strictement supérieur

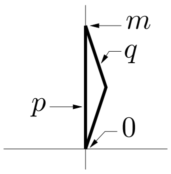


FIG. 6 – Le phénomène des jumeaux, exemple pédagogique dû à P. Langevin.

à celui de q de 0 à m. En particulier, si p et q sont des jumeaux, de même âge en 0, alors p est strictement plus âgé que q quand, après une promenade chacun de leur côté comme figure 6, ils se retrouvent en m. D'autres commentaires, notamment un intéressant dessin «Doppler», se trouvent sur http ://fr.wikipedia.org/wiki/Paradoxe_des_jumeaux.

Démonstration. Il suit de la proposition 1.10 que les parcours non accélérés depuis 0, autrement dit les vecteurs, de durée propre 1 sont les vecteurs v tels que $g(v,v) = -1$. Ils forment la branche d'hyperbole tracée figure 7. Quitte à changer d'unité, on peut supposer que le temps propre de p jusqu'à mi-parcours est 1.

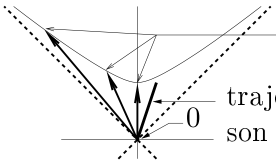


FIG. 7 – Les trajectoires de p,vecteur vertical sur le dessin, et de q jusqu'à mi-parcours.

La trajectoire de q jusqu'à mi-parcours, c'est-à-dire son rebroussement, n'atteint pas le niveau $g(v, v) = -1$, donc n'atteint pas la durée propre 1. Par symétrie, il en est de même du trajet de q de son rebroussement à son arrivée en m. Le résultat suit. $\square$

1.17 Remarque (Homogénéité du modèle de la figure 7.) Insistons sur le fait qu'aucun produit scalaire euclidien n'est défini dans $\mathbb{R}^2$ lorentzien. En particulier, le niveau $\{v \,/\, g(v, v) = -1\}$ est une hyperbole affine, sur laquelle aucun point n'est privilégié. Par exemple, figure 7, l'allure équilatère de l'hyperbole ou la position du vecteur vertical pointant vers un apparent sommet ne sont qu'un hasard du dessin. Seul le choix d'un observateur, donc de coordonnées (x, t) telles que $g = \mathrm{d}x^2 - c^2\,\mathrm{d}t^2$, privilégie alors une métrique euclidienne parmi les autres : la métrique $\mathrm{d}x^2 + c^2\,\mathrm{d}t^2$. Pour cette dernière, l'observateur devient sommet de l'hyperbole $g(v, v) = -1$, qui devient équilatère.

1.18 Exercice Dans l'esprit de 1.11, on peut également mettre en évidence le phénomène 1.16 par une mesure physique des trois durées en jeu. En effet, si un observateur tient une règle de longueur d fixe par rapport à lui, à l'extrémité de laquelle se trouve un miroir, ce dipositif lui sert d'horloge, en lui renvoyant un photon émis au bout du temps $2d/c$. En

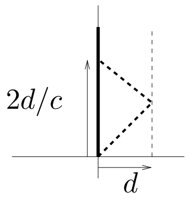


FIG. 8 – Verticales : la trajectoire de l'observateur, en gras, celle du miroir, en pointillés.

effectuant cette construction avec une règle telle que la lumière revient à p à mi-parcours, puis la même construction pour q, on se rend compte que la lumière n'est pas encore revenue à q à mi-parcours. Il s'est écoulé pour lui une durée strictement inférieure. *Attention.* La règle utilisée pour p et q doit garder la même longueur, c'est-à-dire être de même longueur pour q, *dans les coordonnées observées par* q, que pour p, *dans les coordonnées observées par* p. Par 1.11, et avec ses notations, si q_1 est le point de temps propre t sur la trajectoire de q, l'extrémité d'une règle de longueur c/t, au temps q-simultané à 0, se situe en $\sigma(q_1)$. Je laisse la figure 9 à votre méditation.

1.19 Remarque/Vocabulaire Vérifier les considérations suivantes. Pour la cinématique relativiste, deux points m et n vérifient $g(n - m, n - m) < 0$ si et seulement s'ils sont deux événements successifs sur la trajectoire d'un certain observateur. Pour cet observateur, ils ont lieu au même endroit, successivement, avec par exemple n postérieur à m. Pour tout autre observateur, ils ont lieu en des endroits différents et n est encore postérieur à m. Les événements m et n vérifient $g(n - m, n - m) > 0$ si et seulement s'ils sont simultanés pour un certain observateur. Pour tout autre observateur, ils ont lieu en des endroits et temps différents ; pour certains d'entre eux, n est postérieur à m, pour d'autres, il lui est antérieur. Enfin $g(n - m, n - m) = 0$ si et seulement si m et n sont deux événements sur la trajectoire d'un rayon lumineux. Tout observateur les perçoit comme successifs, dans le même ordre, et en des lieux distincts. En notant d leur distance perçue par un certain obstevateur, d/c est le temps qui les sépare, pour lui.

Ainsi, voyager «plus vite que la lumière», non seulement est impossible, mais n'a pas de sens. Cela signifierait relier par une trajectoire deux événements m et n tels que $g(n-m, n-$

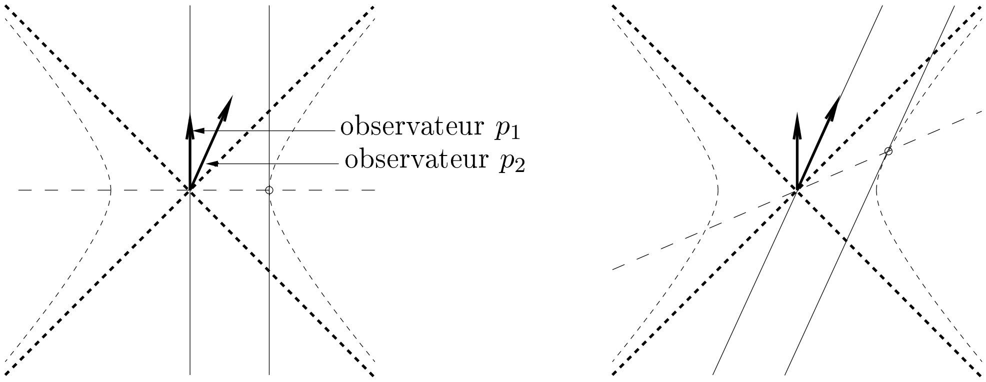


FIG. 9 – Deux observateurs p_1 et p_2. Les vecteurs les représentant sont de même temps propre t ; on a représenté, à gauche pour p_1, à droite pour p_2, la trajectoire de chaque extrémité d'une règle de longueur c/t fixe par rapport à p_i, ainsi que, en pointillés longs, la droite p_i-simultanée à 0. Elle est dirigée par $\sigma(p_i)$, voir 1.11. Le cône de lumière est en pointillés gras. Toutes les constructions sont affines : la trajectoire de l'extrémité de la règle est la tangente à l'hyperbole $g(v,v) = (c/t)^2$, parallèle à p_i. (Exercice : pourquoi ?). Note importante : chaque p_i voit la règle transportée par l'autre plus courte que la sienne.

$m) > 0$ *i.e.* deux événements simultanés, pour un certain observateur : deux événements qui ne sont pas distants dans le temps, mais purement dans l'espace.

Ces remarques ont consacré un vocabulaire usuel. Un vecteur v tel que $g(v,v) < 0$ est dit *de type temps*, tel que $g(v,v) > 0$ est dit *de type espace* et tel que $g(v,v) = 0$ est dit *de type lumière*. Plus généralement un sous-espace F est dit *de type temps* si $g_{|F}$ est lorentzienne *i.e.* de signature $(\dim F - 1, 1)$, est dit *de type espace* si $g_{|F}$ est euclidienne *i.e.* définie positive et est dit *de type lumière* s'il est istrope *i.e.* si $g_{|F}$ est dégénérée *i.e.* de signature $(\dim F - 1, 0)$.

Un vecteur est dit causal s'il est vecteur-temps ou -lumière : il peut être le vecteur tangent à la trajectoire d'une particule, il part d'un «passé» et pointe vers un «avenir».

Par ailleurs si un événement m est donné, disons placé en 0, les événements qu'une particule passant par m peut atteindre dans le futur de sa trajectoire constituent une des deux composantes connexes de $\{v \,/\, g(v,v) \leqslant 0\} \smallsetminus \{m\}$, le cas $g(v,v) = 0$ étant réalisé si et seulement si m a la vitesse de la lumière, en particulier est sans masse. Ceux dont elle peut provenir, dans le passé de sa trajectoire constituent l'autre composante connexe. Parfois, de façon légèrement impropre, ces deux composantes sont respectivement dites le futur et le passé de m. Le futur de m peut recevoir un signal issu de cet événement. Son passé, émettre un signal perçu par lui. Le reste : $\{v \,/\, g(v,v) > 0\}$ est l'«ailleurs» de m. L'événement m — attention, pas la particule passant par m, dont la trajectoire ne se réduit pas à m — ne peut rien en connaître ni lui transmettre aucun signal. Une particule passant par m ne peut ni s'y rendre, ni en provenir.

1.20 Exercice simple et important. Déterminer les positions relatives d'un sous-espace F et du cône de lumière, selon la nature de F : type espace, temps, lumière. *Faire un dessin.*

1.21 Remarque La mesure en 1887 par Michelson et Morley de la vitesse de la lumière dans des référentiels de vitesse relative non nulle jouait à quitte ou double avec le principe de relativité des référentiels galiléens. La physique ne pouvait rester en l'état : soit les mesures de cette célérité c s'avèrent différentes dans les différents référentiels. Alors un unique référentiel, au choix près de l'origine, devient privilégié, au sens «absolument immobile» :

celui dans lequel c est constante dans toutes les directions. Les autres ont une «vitesse absolue» par rapport à lui, mesurable par l'anisotropie de c. L'immobilité absolue acquiert une définition physique, il faut abandonner l'équivalence des référentiels galiléens introduite au début de 1.3. Soit les mesures s'avèrent égales. Alors la relativité galiléenne vaut aussi pour l'électromagnétisme, qui décrit la propagation de la lumière : aucun référentiel «immobile» n'est privilégié ; tout comme les lois de la gravité, celles de l'électromagnétisme sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels (galiléens). Ce sont les lois de la cinématique qu'il faut revoir, pour les rendre compatibles avec le phénomène de constance de c. C'est ce qui s'est produit, avec la proposition 1.10.

1.22 Remarque Les équations de Maxwell de l'électromagnétisme, décrivant les interactions électrique et magnétique entre particules électriquement chargées en mouvement, sont invariantes par le groupe $\mathrm{O}(g)$, au sens qu'elles prédisent la même interaction après un changement de coordonnées A, non pas galiléen, mais lorentzien *i.e.* $A \in \mathrm{O}(g)$. C'est aussi cette remarque qui est à l'origine de l'introduction des transformations «lorentziennes» de la proposition 1.10 ; on la trouve développée dans [P1905] puis dans [E1905], partie II. Cependant, les équations de Maxwell décomposent les interactions en interaction électrique et magnétique et, si la somme de ces deux interactions est bien invariante par $\mathrm{O}(g)$, chacune séparément ne l'est pas. Une présentation unifiée de l'interaction électromagnétique remplace les deux champs électrique (scalaire) et magnétique (vectoriel) de $\mathbb{R}^3$, variables dans le temps, par un seul tenseur, une 2-forme fermée sur $\mathbb{R}^4$, $\mathrm{O}(g)$-invariante. Une référence que je connais est le chapitre sur l'électromagnétisme de [B01], il y en a d'innombrables autres.

1.4 Retour aux mathématiques : le groupe $\mathbf{O(1,1)}$

Familiarisons-nous avec le groupe orthogonal, dans le cas le plus simple : $\mathrm{O}(1,1)$. En dimension deux, une forme quadratique pseudo-euclidienne q s'écrit, dans une base β donnée par le théorème 1.2, $\mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2$. Le cône isotrope est constitué de deux droites ; dans les cooronnées $(x', y') = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y, x + y)$, correspondant à une base β' de vecteurs isotropes, q s'écrit $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Dans β' on constate que $\mathrm{O}(1,1)$ est l'union disjointe de quatre composantes connexes :

$$\begin{aligned}\mathrm{O}(1,1) = &\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix} / a \in \mathbb{R}_+^*\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix} / a \in \mathbb{R}_-^*\right\} \\ &\cup \left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ a^{-1} & 0\end{pmatrix} / a \in \mathbb{R}_+^*\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ a^{-1} & 0\end{pmatrix} / a \in \mathbb{R}_-^*\right\}.\end{aligned}$$

Les deux premières forment $\mathrm{SO}(1,1)$, dont on constate donc qu'il n'est pas connexe, contrairement à $\mathrm{SO}(2)$. La composante de Id se note $\mathrm{SO}_0(1,1)$. Chaque composante de $\mathrm{O}(1,1)$ préserve ou permute les deux composantes connexes du niveau $\{q = 1\}$ et du niveau $\{q = -1\}$, réalisant une des quatre possibilités.

1.23 Exercice Montrer que dans β, $\mathrm{SO}_0(1,1) = \left\{\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\alpha & \operatorname{sh}\alpha \\ \operatorname{sh}\alpha & \operatorname{ch}\alpha\end{pmatrix} / \alpha \in \mathbb{R}\right\}$, où α est fonction de a. On retrouve ici une forme similaire à la forme canonique de $\mathrm{SO}(2)$. Montrer alors que $\mathrm{SO}_0(1,1)$ est transitif sur les composantes connexes des niveaux de q (privé de 0 pour le niveau nul).

1.24 Exercice (Suite à une remarque transmise par M.-F. Roy). Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien, l'angle θ apparaissant dans la matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ correspond à l'aire algébrique du

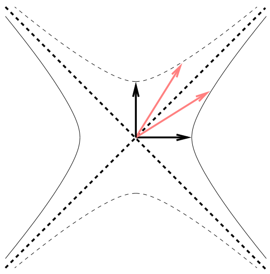


FIG. 10 – Les niveaux $\{q=-1\}$, $\{q=0\}$ et $\{q=1\}$. Une base pseudo-orthonormée et son image par un élément de $\mathrm{SO}_0(1,1)$, en grisé. On retrouve 1.11 $(*)$.

domaine compact délimité par la droite $d : y = 0$, son image $R_\theta(d)$ et le niveau $q_{\text{eucl}} = 1$. Pourquoi ? Montrer qu'il en est de même avec α et q, ce qui donne une interprétation géométrique à ce nombre. On peut penser par exemple à un changement de variable.

1.25 Remarque/Exercice Comprendre $\mathrm{O}(1,1)$ donne déjà une bonne idée des autres $\mathrm{O}(p,q)$. Par exemple, ils ont tous quatre composantes connexes. Le phénomène peut se comprendre ainsi. Soit g un produit pseudo-euclidien. Une fois choisis arbitrairement un sous-espace maximal F où g est définie positive et une orientation de F, tout autre tel sous-espace est lui aussi canoniquement orienté (Exercice : pourquoi ? On peut par exemple utiliser la projection parallèlement à un sous-espace maximal où g est définie négative, puis la connexité par arcs de l'ensemble de ces derniers sous-espaces). Une telle orientation est une *orientation spatiale* de (E,g). La notion d'orientation dite temporelle ou causale est définie semblablement avec les sous-espaces maximaux où g est définie positive.

Les quatre composantes de $\mathrm{O}(g)$ sont déterminées par leur action sur les orientations spatiale et temporelle. Notons qu'une composante change l'orientation de E si et seulement si elle change une seule de ces dernières ; $\mathrm{SO}(g)$ a donc deux composantes.

1.5 Quelques commentaires sur les différences espaces euclidiens / espaces pseudo-euclidiens données en 1.2

(1) Bien sûr, comme $g(v,v)$ peut être strictement négatif, considérer $\sqrt{g(v,v)}$ n'a plus de sens. Cependant, dans le cas *lorentzien*, c'est-à-dire en signature $(n-1,1)$, un phénomène mérite d'être noté. Si $x, y \in \mathbb{R}^{n-1,1}$ avec $y - x$ de type temps, on peut définir la «distance temporelle» entre x et y comme $\sqrt{-g(x-y,x-y)}$. Cette fonction n'est pas une distance, mais vérifie une inégalité triangulaire à l'envers :

1.26 Exercice Si u, v et w sont de type temps et $u = v+w$, alors $\sqrt{-g(u,u)} \geqslant \sqrt{-g(v,v)} + \sqrt{-g(w,w)}$. *Preuve :* par exemple, écrire que $v = \alpha u + u_0$ avec $u_0 \perp u$ et décomposer semblablement w. On retrouve ici le phénomène des jumeaux 1.16.

(3) Dès qu'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée g sur E est indéfinie, E admet un sous-espace F de signature $(1,1)$. Alors le sous-groupe $\{\gamma \in \mathrm{O}(g) : \gamma_{|F^\perp} = \mathrm{Id}_{F^\perp}\}$ de $\mathrm{O}(g)$ est conjugué à $\mathrm{O}(1,1)$, donc en particulier non relativement compact dans $\mathrm{GL}(E)$. Donc $\mathrm{O}(g)$ n'est pas compact. Semblablement, les niveaux non nuls de la forme quadratique associée à g sont donc des quadriques non dégénérées non compactes — ils contiennent des hyperboles. Le niveau nul est un cône non réduit à $\{0\}$.

Une conséquence en est que les endomorphismes g-autoadjoints A *ne sont pas nécessairement diagonalisables*, contrairement au cas euclidien. La preuve utilise la compacité de la sphère $\mathbb{S}^n$, qui y implique l'existence d'un extremum de $v \mapsto g(A(v), v)$. Le résultat lui-même devient faux, des deux manières possibles : trouver des endomorphismes g-autoadjoints nilpotents, ou sans valeur propre réelle, avec $g = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ sur $\mathbb{R}^2$.

1.27 Exercice Soit G un sous-groupe de $\mathrm{O}(p,q)$. Alors sont équivalents :
– G est compact,
– G stabilise des sous-espaces F_1 et F_2 respectivement défini positif de dimension p et défini négatif de dimension q.
– G est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{O}(p) \times O(q)$.

1.28 Exercice $\mathrm{O}(p,q)$ agit transitivement sur les vecteurs v tels que $g(v,v)$ est fixé. Que dire de l'action de $\mathrm{O}(p,q)$ sur les sous-espaces de signature donnée ?

(4) Soit $\mathcal{S}_{p,q}$ l'ensemble des formes de signature (p,q) sur $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{p+q}$. Alors $\mathcal{S}_{p,q}$ est connexe : si $G \in \mathcal{S}_{p,q}$ est identifié à sa matrice, par 1.2, $G = {}^tPI_{p,q}P$ pour un certain $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Quitte à changer le signe d'un des vecteurs de la base G-pseudo-orpthonormée donnée par P, on peut supposer que $P \in \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$. Le résultat suit par connexité de $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$.

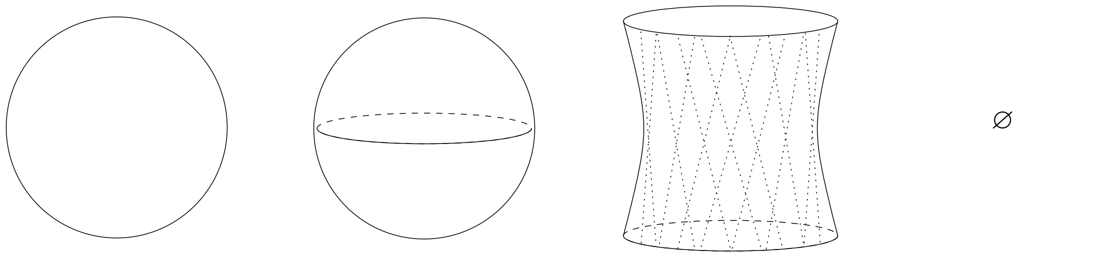
Si $g_1, g_2 \in \mathcal{S}_{n,0}$, $(tg_1 + (1-t)g_2)(v,v) > 0$ pour tous $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $t \in [0,1]$ donc $\mathcal{S}_{n,0}$ est convexe. En revanche si $g \in \mathcal{S}_{1,1}$, alors $-g \in \mathcal{S}_{1,1}$, mais $0 \in [-g, g]$ et $0 \notin \mathcal{S}_{1,1}$ donc $\mathcal{S}_{1,1}$ n'est pas convexe. On en déduit que $\mathcal{S}_{p,q}$ ne l'est pas non plus dès que $pq \neq 0$.

(6) Le cône isotrope joue un rôle important en géométrie pseudo-riemannienne. On en donne en 1.29 une propriété remarquable. Voir aussi en 2.18 une conséquence de 1.29.

1.29 Proposition Deux produits pseudo-euclidiens g et g' sont proportionnels *i.e.* de même classe conforme, au signe près, si et seulement si ils ont même cône isotrope.

Démonstration. Seul le «seulement si» est non immédiat. Il est par exemple une conséquence du théorème des zéros de Hilbert. On peut trouver aussi une preuve élémentaire, dans le cas de degré deux qui nous occupe, dans [S86] théorème 46 p. 113 : cette propriété est vraie pour tout corps de base et toute paire de formes symétriques, dès que le cône possède un point simple — donc en particulier dès que g ou g' est non dégénérée et le cône non réduit à $\{0\}$.

1.30 Remarque Une manière de dessiner les cônes en dimension quatre est de projectiviser, voir fig. 11.



signature $(2,1)$, cône dans $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$. signature $(3,1)$, cône dans $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$. signature $(2,2)$, fragment de cône dans $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$. signature $(4,0)$, cône dans $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$.

FIG. 11 – Quelques cônes projectivisés. On a représenté des règles de la quadrique $(2,2)$.

2 Variétés riemanniennes et pseudo-riemanniennes

Une métrique riemannienne g sur une variété différentielle M est un objet donnant un sens à la notion de longueur d'un vecteur tangent à M et par là, à la longueur des chemins dans M et à une distance sur M. La métrique g est un champ C^k, $k \geqslant 1$, de produits scalaires g_x sur T_xM, pour tout x de M. Ainsi la norme $\|v\|_g$ de $v \in T_xM$ est sa g_x-norme euclidienne et si $c \in C^1([0,1], M)$ est un chemin C^1 sur M, sa longueur est définie par :

$$l(c) = \int_0^1 \|c'(t)\|_g \, \mathrm{d}t.$$

La distance induite par g entre deux points x et y de M est la distance de chemins : $d_g(x,y) = \inf\{l(c) \,/\, c \text{ chemin de } x \text{ à } y\}$.

Une métrique pseudo-riemannienne g sur M est bien sûr un champ C^k, $k \geqslant 1$, de produits pseudo-euclidens de signature constante g_x sur T_xM, pour tout x de M. Exercice : montrer que si M est connexe, la signature de g_x est nécessairement constante.

2.1 Remarque Le mot «métrique» a subsisté, bien que cette fois, l'objet g ne fournisse pas de norme pour les vecteurs tangents à M, et subséquemment aucune notion de longueur de chemins ni de distance sur M. De même, une bijection qui est C^1 et préserve une métrique riemannienne est qualifiée d'isométrie sans contradiction avec la notion d'isométrie d'une distance : par théorème, elle est C^1 et préserve g, si et seulement elle préserve d_g. Un difféomorphisme préservant une métrique pseudo-riemannienne est aussi qualifié d'isométrie, cette fois sans qu'aucune distance ne soit en jeu.

2.1 Socle commun (pseudo-)riemannien

Toute une famille d'objets différentiels naît de l'introduction d'une métrique riemannienne sur M. Ces constructions persistent sans modification dans le cas pseudo-riemannien. Il s'agit notamment de la connexion de Levi-Civita D, du tenseur de courbure R et de ses éléments les courbures de Ricci, scalaire, et le tenseur de Weil, le transport parallèle, les géodésiques, les champs de Jacobi, les notions de champ de Killing et d'espace homogène ou symétrique, ou encore l'étude de la géométrie de la classe conforme de g etc. La courbure sectionnelle d'un 2-plan n'est cependant définie que pour les 2-plans non isotropes.

Un point commun fondamental est aussi que les géométries riemannienne comme pseudo-riemannienne sont toutes deux d'ordre un, c'est-à-dire que que si (M,g) et (N,h) sont des variétés (pseudo-)riemanniennes et φ une isométrie de U ouvert connexe de M dans V ouvert de N, alors la donnée de la différentielle $\mathrm{d}\varphi(x)$ de φ en un point x de U détermine φ : une isométrie est déterminée par sa donnée à l'ordre un en un point. Cela provient de l'unicité de la connexion de Levi-Civita D et du fait qu'en tout $y \in M$ l'exponentielle, définie grâce à D, conjugue φ à sa différentielle $\mathrm{d}\varphi(y)$.

Une fois posé ce socle constituant un langage commun, les différences listées en 1.2 entre produits scalaires et produits pseudo-euclidiens engendrent des différences nombreuses et profondes. Listons-en quelques-unes et proposons quelques commentaires.

2.2 Différences

(1) Une variété M admet toujours une métrique riemannienne mais n'admet en général *pas* de métrique pseudo-riemannienne. Il existe des obstructions topologiques.

Considérons une variété pseudo-riemannienne (M,g).

(2) Sous-variétés. Une sous-variété de (M, g) n'est en général pas pseudo-riemannienne. Quand elle ne l'est pas, son étude diffère fortement de celle d'une sous-variété riemannienne.

(3) Distance, complétude géodésique. Aucune notion de distance d_g n'est induite par g sur M. Le théorème de Hopf-Rinow n'a donc plus lieu d'être. Ses conséquences sur la complétude des ou de certaines géodésiques sont *toutes* mises en défaut. De façon générale, la complétude géodésique est un enjeu délicat en géométrie pseudo-riemannienne.

(4) Compacité, dynamique. Dans le cas où M est compacte, son groupe d'isométries $\mathrm{Isom}(M, g)$ n'est pas en général compact. D'autres propriétés liées à la compacité se perdent aussi. Par exemple, l'action du groupe $\mathrm{Diff}(M)$ des difféomorphismes de M sur l'ensemble $\mathcal{M}_{p,q}$ des métriques de signature (p, q) sur M n'est en général pas propre, contrairement au cas riemannien [Eb68]. La dynamique pseudo-riemannienne est donc plus riche que la dynamique riemannienne.

(5) Groupes ou représentations non semi-simples. Une conséquence algébrique de la compacité de $\mathrm{O}(n)$ est que toute représentation de groupe, orthogonale pour un produit scalaire, est semi-simple. Ce n'est plus vrai pour les représentations orthogonales pour un produit pseudo-euclidien. Les travaux où de telles représentations interviennent, comme la classification des espaces homogènes pseudo-riemanniens par exemple, sont donc plus complexes.

(6) Causalité. La notion de vecteur causal induit celle de variété lorentzienne (ici faiblement) causale : une variété dépourvue de courbe causale périodique, et celle de variété causalement (ou temporellement) orientable : une variété munie d'un champ de vecteurs-temps continu et jamais nul. De nouvelles problématiques y sont attachées.

La liste n'est pas exhaustive. De multiples autres grandes différences pourraient être citées, par exemple dans des aspects plus analytiques, moins familiers pour moi.

Par ailleurs, une multitude de petites différences, non regroupables dans de grandes catégories, se rencontrent constamment. Un exemple simple : en dimension supérieure ou égale à trois, les seuls espaces pseudo-riemanniens à courbure sectionnelle de signe constant sont les espaces à courbure sectionnelle constante. C'est une remarque de R. Kulkarni, voir [O'N83] p. 229 sq.

2.3 Commentaires

(1) Trois exemples importants de construction de variétés riemanniennes sont les suivants. Le premier s'adapte avec une précaution au cas pseudo-riemannien, le deuxième toujours, le troisième jamais.

2.2 Exemple Une sous -variété de $(\mathbb{R}^n, g_{\mathrm{eucl}})$ euclidien est naturellement munie d'une métrique riemannienne g : la restriction de g_{eucl} à chaque espace tangent, sous-espace de $\mathbb{R}^n$. Ainsi la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$ est-elle munie de sa métrique ronde canonique. Dans le cas pseudo-euclidien, cette construction fournit une métrique pseudo-riemannienne uniquement si cette restriction ne dégénère en aucun point.

2.3 Exemple Soit (M, g) une variété riemannienne et Γ un sous-groupe de $\mathrm{Diff}(M)$ tel que $N = M/\Gamma$ est une variété de même dimension que M *i.e.* Γ agit proprement discontinûment sur M. Exemple-type : $(M, g) = (\mathbb{R}^n, g_{\mathrm{eucl}})$ et $\Gamma \simeq \mathbb{Z}^n$ est le groupe des translations entières. Alors si $\Gamma \subset \mathrm{Isom}(M, g)$, g passe au quotient en une métrique $\overline{g}$ sur N. En effet, si $x \in N$ et $u \in T_xN$, quels que soient les relevés x_1 et x_2 de x dans M, en notant u_1 le relevé de u dans $T_{x_1}M$ et u_2 celui dans $T_{x_2}M$, alors $u_2 = \gamma^* u_1$ pour un certain $\gamma \in \Gamma \subset \mathrm{Isom}(M)$, donc $g(u_1, u_1) = g(u_2, u_2)$. On peut poser $\overline{g}(u, u) = g(u_1, u_1)$. Dans l'exemple-type ci-dessus, avec

$\mathbb{R}^2$ muni de la métrique euclidienne $\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$, on obtient pour $(N, \overline{g})$ un tore riemannien plat. Avec $\mathbb{R}^2$ muni d'un produit lorentzien, par exemple $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dont les translations sont également des isométries, la construction fournit un tore lorentzien plat, premier exemple ici de variété lorentzienne compacte.

2.4 Exemple La convexité de l'ensemble des produits scalaires sur $\mathbb{R}^n$ et l'existence de partitions de l'unité sur les variétés différentielles entraînent l'existence de métriques riemanniennes sur toute telle variété. On en construit comme combinaison convexe localement finie de métriques données sur de petits ouverts de carte, par rapatriement de la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^n$, voir par ex. [GHL04]. L'ensemble des produits pseudo-euclidiens n'étant pas convexe, cette construction ne passe pas au cas pseudo-riemannien. Le résultat d'existence lui-même est faux, on peut le voir simplement. Soit (M, g) une variété lorentzienne. Alors M admet une métrique riemannienne h par le procédé donné ci-dessus. En tout point x de M, cela définit l'endomorphisme h-autoadjoint A tel que $g = h(\,\cdot\,, A\,\cdot\,)$ et donc fournit un champ continu de directions $D_x \subset T_xM$ en tout point : l'unique direction propre de valeur propre négative de A. Les champs g et h sont continus, donc le champ D_x également. La conclusion suit des propriétés de topologie algébrique suivantes :

2.5 Proposition Si M est une variété admettant un champ continu $D_x \subset T_xM$ de droites, alors sa caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(M)$ est nulle.

2.6 Proposition Les seules surfaces compactes S de caractéristique $\chi(S)$ nulle sont le tore et la bouteille de Klein. Si Σ_g est la surface orientable de genre g alors $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$; en particulier par exemple $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$.

2.7 Exercice En se servant d'un objet introduit dans le cours de F. Loray, construire une métrique lorentzienne sur $\mathbb{S}^3$.

Plus généralement, l'existence d'une métrique de signature (p, q) sur une variété M entraîne l'existence d'une distribution continue de p-plans (donc d'une autre de q-plans : pourquoi ? Utiliser une métrique riemanienne auxiliaire) dans son fibré tangent. Certaines variétés présentent donc des obstructions de topologie algébrique à l'existence d'une telle métrique.

2.8 Remarque/Exercice Montrer plus précisément qu'une variété M de classe C^2 admet une métrique lorentzienne C^1 si et seulement si elle admet un champ de directions C^1. Remarquer que parmi les trois objets suivants : une métrique lorentzienne g sur M, une métrique riemannienne h sur M, un champ de directions D de g-type temps sur M, la donnée de deux fournit la donnée du troisième.

2.9 Remarque/Exercice [Topologie de l'espace des métriques] Profitons de ces observations pour dégager une autre différence entre géométries lorentzienne et riemannienne. L'ensemble $\mathcal{R}(M)$ des métriques riemanniennes sur une variété différentielle M, muni par exemple de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts (topologie compacte ouverte), est connexe. Preuve : argument de convexité. L'ensemble $\mathcal{L}(M)$ des métriques lorentziennes sur M ne l'est en revanche pas en général. Preuve : *Étape 1.* La correspondance construite en 2.8 est continue, en particulier respecte les homotopies : par exemple, si g_t est une homotopie de g_0 à g_1 et D un champ de droites, la métrique riemannienne h_t associée à (g_t, D) est une homotopie de h_0 à h_1. On en déduit que :

– Si D_0 et D_1 sont deux champs de droites de type temps pour une certaine métrique lorentzienne g, D_1 et D_2 sont homotopes (utiliser la connexité de $\mathcal{R}(M)$).

– Si g_0 et g_1 sont deux métriques lorentziennes, D_0 un champ de droites de g_0-type temps et D_1 un champ de droites de g_1-type temps, alors g_0 et g_1 sont homotopes si et seulement si D_0 et D_1 le sont. Les classes d'homotopie de métriques lorentziennes sont donc en correspondance bijective avec celles de champs de droites.

Étape 2. Soit S le tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Montrons que $\mathcal{L}(S)$ a une infinité de composantes connexes. Par ce qui précède, il suffit de montrer que l'espace des champs de directions sur S a une infinité de composantes connexes. Considérons un feuilletage de S avec un nombre n de composantes de Reeb (voir cours de F. Loray), *dont la concavité est dans le même sens*, dessiné figure 12.

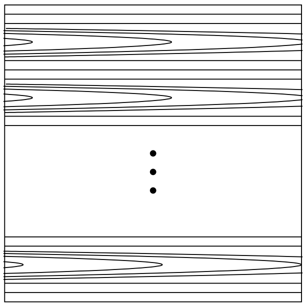


FIG. 12 – Le feuilletage trivial du tore S, avec insertion de n composantes de Reeb.

Un feuilletage de S induit un morphisme f du groupe fondamental $\pi_1(S)$ de S dans celui $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^1)$ de l'espace $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ des directions dans $\mathbb{R}^2$. En effet, notant $D_x \subset \mathbb{R}^2$ la droite (vectorielle) tangente au feuilletage en $x \in S$, à un lacet γ dans S est associé un lacet $D_{\gamma(t)}$ dans $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$. Sur la figure 12, notant a le lacet horizontal de S, b son lacet vertical et c un générateur de $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^1)$, quelle est l'expression de f ? Les champs tangents D associés à deux tels feuilletages avec $n \neq n'$ ne sont donc pas homotopes. La conclusion suit.

On peut encore montrer que, si C_n est la composante connexe de $\mathcal{L}(S)$ construite à partir du feuilletage de la figure 12, avec un nombre n pair de composantes de Reeb, alors $\pi_1(C_n) \simeq \mathbb{Z}$. Voir [M01], chapitre 2, et autres publications de cet auteur pour la preuve et d'autres développements. Tout au contraire, $\mathcal{R}(S)$ est, lui, contractile. Pourquoi ?

(2) On a vu en 2.2 qu'une sous-variété N d'une variété pseudo-riemannienne M n'est pseudo-riemannienne que si aucun de ses espaces tangents n'est isotrope. La courbure extrinsèque d'une sous-variété (pseudo-)riemannienne est codée dans la seconde forme fondamentale, définie par exemple à partir de la connexion de Levi-Civita D comme :

$$II: \begin{array}{rcl} (T_xN)^2 & \rightarrow & (T_xN)^\perp \\ (X,Y) & \mapsto & p(D_XY), \end{array}$$

où p est la projection g-orthogonale de T_xM sur l'orthogonal $(T_xN)^\perp$ de T_xN. Voir par exemple [GHL04]. Notons une petite différence, même dans ce cas, avec la géométrie riemannienne : si N est une hypersurface, l'endomorphisme de Weingarten $W \in \mathrm{End}(TN)$ défini par $II(\cdot,\cdot) = g(\cdot, W\cdot)$ est g-autoadjoint. Ses valeurs propres s'appellent les *courbures principales* de N. Si $g_{|N}$ est riemannienne, W est diagonalisable. Ce n'est plus en général le cas si $g_{|N}$ est pseudo-riemannienne, comme vu en 1.5 **(3)**.

La différence radicale apparaît cependant quand T_xN est isotrope. Alors T_xM n'est plus somme directe $T_xN \oplus (T_xN)^\perp$ et p n'existe pas. Aucun objet équivalent ne vient alors remplacer la seconde forme fondamentale. Ce comportement différent des sous-variétés isotropes apparaît dès le cas le plus simple : celui d'une courbe dans $\mathbb{R}^n$ pseudo-euclidien. Voyons-le.

2.10 Rappel Une courbe n'a pas de courbure intrinsèque. Dans $\mathbb{R}^n$ euclidien, sa courbure (extrinsèque) est un scalaire σ. En dimension $n = 3$, elle forme avec la torsion τ, liée au 3-jet de la courbe, un système complet d'invariants de la courbe. L'introduction du repère de Frenet lié à la courbe fait apparaître naturellement ces nombres. On le construit dans le cas où la courbe γ n'est pas incluse dans un plan ; alors $\beta(t) = (\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et γ est dite birégulière. Le procédé d'orthonormalisation de Schmitt fournit à partir de $\beta(t)$ une base orthonormée (par exemple directe) mobile $(v_1(t), v_2(t), v_3(t))$. Paramétrant γ par son abscisse curviligne *i.e.* par l'unique paramétrage tel que $\gamma'(t) = v_1(t)$ on constate que : $v_1'(t) = \sigma v_2(t)$ pour un certain $\sigma \in \mathbb{R}$. C'est par définition la courbure de γ en $\gamma(t)$. C'est aussi l'inverse du rayon du cercle osculateur à γ en $\gamma(t)$, dit rayon de courbure. Enfin $v_2'(t) = -\sigma v_1(t) + \tau v_3(t)$, ce qui définit la torsion τ.

2.11 Exercice Dans l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{2,1}$, l'orthonormalisation effectuée en 2.10 n'est possible que si :

– la tangente à la courbe n'est jamais isotrope *i.e.* $g(\gamma'(t), \gamma'(t)) \neq 0$,

– le plan osculateur, *i.e.* engendré par $(\gamma'(t), \gamma''(t))$, ne l'est jamais non plus.

Pourquoi ? Dans le cas d'un cercle $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}^{1,1} = (\mathbb{R}^2, \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2)$, centré en 0, on peut définir le repère de Frenet, donc la courbure σ, en tout point sauf aux points de $\mathcal{C} \cap \{x = y\}$ et $\mathcal{C} \cap \{x = -y\}$. Montrer par le calcul (pas totalement immédiat je crois) que, pour un paramétrage de $\mathcal{C}$ dans le sens direct, σ tend vers $+\infty$ en ces points. Retrouver ce résultat avec les hyperboles osculatrices : montrer que, similairement au cas euclidien, en un point m_0 de $\mathcal{C}$, la courbure σ est le réel tel que l'hyperbole $g(m, m) = \frac{1}{\sigma^2}$ ou l'hyperbole $g(m, m) = -\frac{1}{\sigma^2}$, convenablement translatée, est osculatrice à $\mathcal{C}$ en m_0. Le réel $\frac{1}{\sigma}$ est le «rayon de courbure» de $\mathcal{C}$. Que sont les courbes à courbure constante dans $\mathbb{R}^{1,1}$?

Retournons dans $\mathbb{R}^{2,1}$ avec une courbe γ birégulière. Montrer que, sur un intervalle I où les deux conditions de non-isotropie ci-dessus sont réalisées, courbure et torsion se définissent similairement. Montrer qu'en un point isolé où la tangente est isotrope, la courbure tend vers l'infini. Considérons deux cas :

– Sur un intervalle I, $\gamma'(t)$ est non isotrope. On y paramètre alors γ par l'abscisse curviligne : $g(\gamma'(t), \gamma'(t)) = \pm 1$. Montrer que le plan osculateur ne peut être isotrope qu'en des points isolés.

– Sur un intervalle I, $\gamma'(t)$ est isotrope. Montrer que $\gamma''(t)$ ne l'est jamais. On paramètre alors γ pour que $g(\gamma''(t), \gamma''(t)) = \pm 1$. On pose $(v_1(t), v_2(t)) = (\gamma'(t), \gamma''(t))$. Montrer qu'alors on trouve $v_3(t)$ tel que :

$$\mathrm{Mat}_{(v_1,v_2,v_3)}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et qu'alors : } \mathrm{Mat}_{(v_1,v_2,v_3)}(v_1', v_2', v_3') = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

pour un certain $k \in \mathbb{R}$. Le réel k est l'unique invariant (complet) de la courbe γ. Noter qu'il n'a pas tout-à-fait le même sens que la courbure σ dans le cas précédent. Il peut s'annuler, même sur un intervalle non trivial, pour une courbe birégulière (construire une telle courbe), alors que c'est impossibe pour σ. Consulter [Ch03] pour une étude en dimension quelconque.

Ainsi, dès la dimension un, les sous-variétés dégénérées requièrent une étude propre. Le problème s'accroît pour les sous-variétés générales.

(3) Une des conséquences les plus frappantes de l'absence de distance canoniquement associée à une métrique pseudo-riemannienne porte sur la complétude des géodésiques. En géométrie riemannienne, ces dernières se définissent de quatre façons équivalentes. Soit (M, g) une variété riemannienne et I un intervalle.

2.12 Définition Une géodésique c de (M, g) est une courbe $c \in C^1(I, M)$ paramétrée proportionnellement à son abscisse curviligne et réalisant un (en fait le) plus court chemin entre deux quelconques de ses points, dès qu'ils sont assez proches.

Rappelons que la connexion de Levi-Civita D associée à la métrique g permet de dériver un champ de vecteur V dans la direction d'un vecteur X, en restant dans le fibré tangent : si $X \in T_x M$, $D_X V \in T_x M$. Ceci permet de définir :

2.13 Définition Une géodésique c de (M, g) est une courbe $c \in C^2(I, M)$ d'accélération $D_{\dot{c}}\dot{c}$ nulle.

Soit désormais $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$. La fonctionnelle longueur $l : C^1(I, M) \to \mathbb{R}_+$ donnée par $l(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| \, \mathrm{d}t$ et la fonctionnelle énergie $E : C^1(I, M) \to \mathbb{R}_+$ donnée par $E(c) = \int_a^b g(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) \, \mathrm{d}t$ sont deux applications différentiables d'un espace de Banach dans $\mathbb{R}$. La définition 2.12 donne envie de dire qu'un segment géodésique se définit «presque» comme un minimum de l, parmi des chemins à extrémités fixées. C'est le cas :

2.14 Définition Un segment géodésique c de m_0 à m_1 dans (M, g) est un point critique de l sur le Banach $\{c \in C^1([a, b], M) \,/\, c(a) = m_0 \text{ et } c(b) = m_1\}$.

On montre enfin l'équivalence avec cette dernière définition :

2.15 Définition Un segment géodésique c de m_0 à m_1 dans (M, g) est un point critique de E sur le Banach $\{c \in C^1([a, b], M) \,/\, c(a) = m_0 \text{ et } c(b) = m_1\}$.

Si (M, g) est une variété pseudo-riemannienne, les définitions des géodésiques qui gardent un sens, c'est-à-dire celles qui n'utilisent ni norme ni distance, les définitions 2.13 et 2.15, sont toujours équivalentes et définissent les géodésiques.

2.16 Remarque La définition 2.13 implique que la valeur de $g(\dot{c}, \dot{c})$ est constante pour $t \in I$. On parle alors, selon son signe, d'une géodésique de type temps, lumière ou espace.

2.17 Remarque/Exercice Si (M, g) est lorentzienne, le phénomène remarqué en 1.16 et 1.26 se traduit par le fait que les géodésiques de type temps se définissent comme les courbes *maximisant* leur «pseudo-longueur» entre deux quelconques assez proches de leurs points.

2.18 Remarque/Exercice La définition 2.15 permet, par transformation de Legendre, comme dans le cas riemannien, de voir les géodésiques comme les courbes intégrales, sur T^*M, du champ hamiltonien associé au hamiltonien $q = (x, \alpha) \mapsto g_{|x}(\alpha^\sharp, \alpha^\sharp)$. En voici un corollaire frappant, spécifiquement pseudo-riemannien : si g et g' sont dans la même classe conforme *i.e.* si $g' = e^\lambda g$ avec $\lambda \in C^1(M, \mathbb{R})$ alors g et g' ont les mêmes géodésiques lumière, à reparamétrage près. En effet les niveaux $q^{-1}(0)$ et $q'^{-1}(0)$ coïncident sur T^*M (privé de l'image de la section nulle pour obtenir des niveaux réguliers).

Définissons enfin la complétude d'une géodésique et la complétude géodésique de (M, g).

2.19 Définition Une géodésique $c \in C^1(I, \mathbb{R})$ est dite maximale si elle ne peut se prolonger en une géodésique définie sur $J \supsetneq I$. Elle est dite complète si $I = \mathbb{R}$. La variété (pseudo-)riemannienne (M, g) est dite géodésiquement complète si toutes ses géodésiques maximales sont complètes.

2.20 Exemple L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, les espaces $\mathbb{R}^{p,q}$ sont géodésiquement complets. En revanche $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ ou $\mathbb{R}^{p,q} \smallsetminus \{0\}$ ne le sont pas. De manière générale, L'exemple $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ est caractéristique des variétés riemanniennes non géodésiquement complètes : cette variété riemannienne possède un «trou» à distance finie. Autrement dit, elle n'est pas complète pour la distance riemannienne. C'est le théorème de Hopf-Rinow suivant.

2.21 Théorème Une variété riemannienne (M, g) est géodésiquement complète si et seulement si (M, d_g) est un espace métrique complet.

Ce théorème découle directement du lemme de Gauss. On peut en tirer d'autres remarques, par exemple ce qui suit.

2.22 Définition On appelle homogène une variété (pseudo-)riemannienne dont le groupe d'isométries agit transitivement.

2.23 Proposition Une variété riemannienne homogène est complète, dans les deux sens du terme.

2.24 Exercice Montrer 2.23. Vérifier le rôle crucial de la distance d_g dans la preuve.

Attention cependant, une variété riemannienne non complète peut n'être incluse dans aucune variété riemannienne complète de même dimension. Exemple, le cône épointé $\{x^2 + y^2 = z^2\} \smallsetminus \{0\} \subset \mathbb{R}^3$. Autre exemple, plus retors, $\mathbb{C}$ muni de la métrique $\exp^* g_{\mathrm{eucl}}$, où $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* \simeq (\mathbb{R}^2, g_{\mathrm{eucl}}) \smallsetminus \{0\}$.

En revanche, les phénomènes de non complétude pseudo-riemanniens sont bien plus divers.

2.25 Exercice [Mise en défaut pseudo-riemannienne de 2.23] Vérifier que $(M, g) = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y)$ est une variété lorentzienne homogène non complète. On peut remarquer qu'un espace (pseudo-)riemannien homogène (M, g) s'écrit toujours comme G/H où G est le groupe $\mathrm{Isom}(M, g)$, qui est un groupe de Lie ([O'N83] ch. 9 th. 32), et où H est un sous-groupe d'isotropie de G (le stabilisateur dans G d'un point de M), muni d'une métrique $\mathrm{Ad}(H)$-invariante. Dans l'exemple, l'isotropie est triviale (à indice fini près), (M, g) est donc un groupe de Lie muni d'une métrique invariante à gauche. Reconnaître lequel, et la métrique. (G est le groupe affine $\mathrm{GA}(\mathbb{R})$. Si on paramètre G en notant ses éléments $x \mapsto a^{-1}x + b$, la métrique g s'écrit $\mathrm{d}a\, \mathrm{d}b$, qui est invariante à gauche.) Que se passe-t-il si on remplace, en Id, la métrique lorentzienne $\mathrm{d}a\, \mathrm{d}b$ par la métrique riemannienne $\mathrm{d}a^2 + \mathrm{d}b^2$, et qu'on la translate à gauche ? (On obtient pour (M, g) le plan hyperbolique : la métrique devient $\frac{1}{a^2}(\mathrm{d}a^2 + \mathrm{d}b^2)$. Remarquer qu'il est géodésiquement complet.)

On trouvera dans [O'N83] des exemples de variétés dont seules les géodésiques temps, ou espace, ou lumière, sont incomplètes, un exemple d'une variété lorentzienne compacte non complète, le tore de Clifton-Pohl (pourquoi une variété riemannienne compacte est-elle nécessairement géodésiquement complète ?) et d'autres commentaires.

Enfin, à travers la proposition et le théorème suivants, on peut noter un phénomène caractéristique de la géométrie pseudo-riemannienne : certains résultats riemanniens restent vrais, mais avec des hypothèses plus fortes et une tout autre démonstration, plus difficile. Le théorème 2.27 se montre à l'aide d'une structure géométrique comme introduite par F. Loray dans le cas d'une structure projective complexe. L'espace modèle est cette fois, non $\mathbb{C}$ muni du groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, mais, dans [C89] par exemple, $\mathbb{R}^{n-1,1}$ muni de son groupe d'isométries.

2.26 Proposition (Marsden, voir [O'N83] p. 258) Une variété pseudo-riemannienne *homogène et compacte* est géodésiquement complète.

2.27 Théorème (Carrière [C89], Klingler [K96]) Une variété lorentzienne compacte et à courbure sectionnelle constante est géodésiquement complète.

(4) Si (M, g) est une variété (pseudo-)riemannienne compacte, son groupe d'isométries G est un groupe de Lie. Si g est riemannienne, G est de surcroît compact, voir [He78] th. 2.5 p. 169. Si g est pseudo-riemannienne, G peut être non compact.

2.28 Exemple Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ agit sur $\mathbb{R}^2$ en préservant le réseau $\mathbb{Z}^2$ des points entiers. Son action passe donc au quotient par $\mathbb{Z}^2$ en une action sur $M = \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Choisissons dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ un élément A hyperbolique, c'est-à-dire avec deux valeurs propres réelles distinctes λ et $\frac{1}{\lambda}$. La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est souvent citée comme exemple. Notons (u, v) des coordonnées de $\mathbb{R}^2$ associées à une base de vecteurs propres de A. Alors la métrique lorentzienne $g = \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ de $\mathbb{R}^2$ est invariante par A *i.e.* $A \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2, g)$. La métrique g est invariante par translation, passe donc au quotient en une métrique $\overline{g}$ sur M et, en notant encore A l'action quotient de A sur M, on obtient $A \in \mathrm{Isom}(M, \overline{g})$. On peut montrer que, à indice 4 près, $\mathrm{Isom}(M, \overline{g}) = \langle A \rangle \ltimes (\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$, où le facteur ditingué $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ agit par translation. Or $\langle A \rangle$ contient la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ qui quitte tout compact de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Donc $\mathrm{Isom}(M, \overline{g})$ n'est pas compact. Pour être rigoureux, mentionnons qu'en effet, sur $\mathrm{Isom}(M, \overline{g})$, la topologie induite par la topologie naturelle de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ d'une part, et les topologies C^k, $k \geqslant 0$, d'autre part, coïncident.

Un phénomène voisin, lié à un défaut de compacité, est la non propreté de l'action de $\mathrm{Diff}(M)$ sur l'espace $\mathcal{M}_{(p,q)}(M)$ des métriques pseudo-riemanniennes de signature (p, q) sur M, contrairement à celle sur l'espace $\mathcal{R}(M)$ des métriques riemanniennes sur M. Ces deux espaces sont munis d'une topologie compacte ouverte C^k, $k \leqslant 1$, qui coïncide avec la topologie C^k si M est compacte.

Il est naturel d'étudier l'espace quotient $\mathcal{R}(M)/\,\mathrm{Diff}(M)$ ou $\mathcal{M}_{(p,q)}(M)/\,\mathrm{Diff}(M)$, où $g \sim g'$ s'il existe un difféomorphisme φ tel que $g' = \varphi^* g$. En effet, c'est l'espace des métriques sur M, considérées à isométrie près : g et g' sont isométriques si et seulement si $g' = \varphi^* g$ pour un $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$. Dans le cas de $\mathcal{R}(M)$, l'action de $\mathrm{Diff}(M)$ est propre [Eb68].

2.29 Définition Soit G un groupe topologique agissant contiûment sur un espace topologique localement compact E. Cette action est *propre* si, pour tout compact K de E, l'ensemble $\{\gamma \in G \,/\, g.K \cap K \neq \varnothing\}$ est compact.

2.30 Exemples Les actions suivantes sont-elles propres ? Celle de $\mathbb{Z}^n$ sur $\mathbb{R}^n$ par translations. Celle de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{R}$ par translations. Celle de $\mathbb{R}_+^*$, puis de $\langle 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} \rangle$, sur $\mathbb{R}^n$ par homothéties. Celle de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$, puis de $\langle 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}} \rangle$, par homothéties. Décrire les espaces quotients. Sont-ils séparés ?

2.31 Exercice Dans le cadre de 2.29, montrer que l'espace quotient E/G est séparé. Remarquer aussi que les orbites sont fermées.

En première approximation, on peut donc penser au quotient d'une variété par une action propre, encore comme à une variété. Dans le cas de $\mathcal{R}(M)$, espace de Banach de dimension infinie, on peut penser à $\mathcal{R}(M)/\operatorname{Diff}(M)$ comme à une variété, de dimension infinie. C'est agréable. En particulier l'orbite $\operatorname{Diff}(M).g$ d'une métrique riemannienne g est fermée : si $(\varphi_n)_{n\in N} \in \operatorname{Diff}(M)^{\mathbb{N}}$ et $\varphi_n^* g \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g_\infty$, alors g_∞ est isométrique à g. Ce n'est plus du tout le cas, en général, avec $\mathcal{M}_{(p,q)}(M)/\operatorname{Diff}(M)$.

2.32 Exemple L'action de $\operatorname{Diff}(\mathbb{T}^2)$ sur l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{T}^2)/\operatorname{Diff}(\mathbb{T}^2)$ des métriques lorentziennes sur le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ n'est pas propre. On exhibe en effet facilement une orbite non fermée et on applique 2.31. L'existence d'une telle orbite montre en outre directement que l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{T}^2)/\operatorname{Diff}(\mathbb{T}^2)$ n'est pas séparé (pourquoi ?).

Soit $\overline{g} = \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ la métrique de $M = \mathbb{T}^2$ et $A \in \operatorname{Isom}(M, \overline{g})$ définis en 2.28. Soit $k \in \mathbb{R}$. Introduisons la métrique $h_k = \overline{g} + k\,\mathrm{d}u^2$, alors $A^{n*}h_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \overline{g}$ pour la topologie C^∞ (le vérifier). Or pour k bien choisi, la métrique h possède des géodésiques isotropes périodiques, ce dont $\overline{g}$ est dépourvue, donc h_k et g ne sont pas isométriques. Vérifier tout ceci ; les géodésiques de g ou de h, toutes deux plates, sont les images des droites de $\mathbb{R}^2$ par l'application quotient $\mathbb{R}^2 \to M$. Pour des raffinements de cet exemple, d'autres développements et divers théorèmes, notamment de propreté de l'action de $\operatorname{Diff}(M)$ sur $\mathcal{L}(M)$ dans certains cas, consulter par ex. [M01] chap. 4.

(5) Rappelons qu'une représentation linéaire réelle ρ d'un groupe G est un morphisme $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Une telle représentation est dite *simple*, ou *irréductible*, si $\rho(G)$ ne stabilise aucun sous-espace non trivial de $\mathbb{R}^n$. Elle est dite *semi-simple* si elle est somme directe de représentations simples *i.e.* si tout sous-espace $\rho(G)$-stable de $\mathbb{R}^n$ admet un supplémentaire $\rho(G)$-stable. Les représentations semi-simples sont un sujet profond, bien étudié, objet d'une théorie élaborée.

2.33 Exercice Soit ρ une représentation d'un groupe G dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que ρ est semi-simple *i.e.* exhiber une décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme directe de sous-espaces $\rho(G)$-irréductibles. Indication : penser aux supplémentaires orthogonaux. Construire une représentation non semi-simple de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{O}(2,1)$. Indication : soit $g = \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$; trouver un endomorphisme g-antiautoadjoint nilpotent non nul A (ce qui n'existe pas dans le cas euclidien) et observer $\exp(tA)$ pour $t \in \mathbb{R}$. Ceci fournit une représentation de $\mathbb{R}$. Montrer que $\ker A$ est $\rho(\mathbb{R})$-stable mais n'a pas de supplémentaire $\rho(\mathbb{R})$-stable.

Des représentations de groupes dans $\mathrm{O}(p,q)$ sont au cœur de l'étude des espaces homogènes, ou symétriques, pseudo-riemanniens, ainsi que d'autres problématiques (holonomie de métriques, (G,X)-structures...). Le défaut, en général, de semi-simplicité, mis en évidence ci-dessus, ainsi que d'autres phénomènes, rendent cette étude encore plus riche et complexe que l'étude riemannienne.

(6) Je voulais ici seulement citer la notion de causalité, source de questions spécifiquement lorentziennes. Notons que l'orientabilité temporelle est indépendante de la notion d'orientabilité : construire une métrique lorentzienne temporellement inorientable sur le cylindre et une métrique temporellement orientable sur le ruban de Möbius.

2.4 Quelques espaces lorentziens importants

La comparaison géométrie riemannienne/géométrie lorentzienne pourrait notamment se poursuivre avec l'étude des espaces à courbure sectionnelle K constante, dits «à courbure constante». Dans le cas riemannien, ce sont :

– pour $K = 0$, l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, g_{\mathrm{eucl}})$,

– pour $K = 1$, la sphère $\mathbb{S}^n = q^{-1}(1)$ munie de la métrique induite, avec $q = \sum_{i=0}^n \mathrm{d}x_i^2$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$,

– pour $K = -1$, le plan hyperbolique $\mathbb{H}^n = q^{-1}(-1)$ muni de la métrique induite, avec $q = -\mathrm{d}x_0^2 + \sum_{i=1}^n \mathrm{d}x_i^2$ le produit «scalaire lorentzien» canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Dans le cas lorentzien, ce sont :

– pour $K = 0$, l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{n-1,1}$,

– pour $K = 1$, l'espace dit «de Sitter[4]» $\mathrm{dS}^n = q^{-1}(1)$ muni de la métrique induite, avec $q = -\mathrm{d}x_0^2 + \sum_{i=1}^n \mathrm{d}x_i^2$ le produit «scalaire lorentzien» canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$,

– pour $K = -1$, l'espace dit «anti de Sitter» $\mathrm{AdS}^n = q^{-1}(-1)$ muni de la métrique induite, avec $q = -\mathrm{d}x_0^2 - \mathrm{d}x_1^2 + \sum_{i=2}^n \mathrm{d}x_i^2$ le produit «scalaire de signature $(n-2, 2)$» canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Ces espaces appelleraient de nombreux commentaires élémentaires. Une approche algébrique approfondie se trouve dans [W84]. On trouvera des développements vers la géométrie conforme sous-jacente à tous ces espaces dans [F02].

2.34 Exercice Faire des dessins pour $n = 2$, puis éventuellement des dessins projectifs pour $n = 2$ et pour $n = 3$. Montrer que $\mathbb{S}^n$ et $\mathbb{H}^n$ sont des sous-variétés riemanniennes de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $\mathbb{R}^{n,1}$ respectivement, de groupes d'isométries respectifs $\mathrm{O}_{n+1}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{O}(n, 1)$. Montrer que dS^n et AdS^n sont des sous-variétés lorentziennes de $\mathbb{R}^{n,1}$ et $\mathbb{R}^{n-1,2}$ respectivement, de groupes d'isométries respectifs $\mathrm{O}(n, 1)$ et $\mathrm{O}(n-1, 2)$. Indication : montrer que, pour toutes ces sous-variétés notées N, en notant g la métrique ambiante, $T_xN = x^{\perp_g}$. Vérifier que chaque groupe orthogonal est inclus dans le groupe d'isométries cherché, obtenir l'inclusion inverse par le fait que la géométrie est d'ordre un, voir 2.1.

Citons enfin une variété lorentzienne importante : le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. En effet, son algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) = T_{\mathrm{Id}}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de trace nulle (pourquoi ?) :

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \ / \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

En notant $-g$ le déterminant sur $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, on remarque que g est la forme quadratique $\mathrm{d}a^2 + \mathrm{d}b\,\mathrm{d}c$, de signature $(2, 1)$. Par translation à gauche, elle se propage en une métrique lorentzienne sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. On note alors la propriété importante suivante : les translations à droite ont le même effet sur g que celles à gauche. La métrique construite est à courbure sectionnelle constante -1 et $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), g)$ est isométrique à l'espace AdS^3.

Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est donc muni d'une métrique lorentzienne canonique, à courbure -1. On peut rapprocher ce phénomène de la métrique riemannienne canonique, à courbure 1, sur $\mathrm{SU}(2) \simeq \mathbb{S}^3$.

Références

[B01] D. Bressoud, *Second Year Calculus — From Celestial Mechanics to Special Relativity.* Undergraduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, 2001.

[C89] Y. Carrière, *Autour de la conjecture de L. Markus sur les variétés affines.* Invent. Math. **95** (1989), no. 3, 615–628.

[4]Willem de Sitter, 1872-1934, physicien, astronome et mathématicien néerlandais. A présenté une solution des équations d'Einstein dans le vide avec constante cosmologique positive, à qui on a donné son nom.

[Ch03] X. Charuel, *Courbes et hypersurfaces nulles en géométrie pseudo-riemannienne.* Thèse de doctorat, Université de Nancy I, 2003.

[D05] T. Damour, *Si Einstein m'était conté.* Paris, Le Cherche-midi, 2005.

[G1632] G. Galilei, *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo.* Florence, Landini, 1632. Traduction française : *Dialogue sur les deux grands systèmes du monde.* Paris, Seuil, 2000.

[G1638] G. Galilei, *Discorso e dimonstrazioni matematiche, intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica e i movimenti locali.* Leiden, Elsevir, 1638. Traduction française : *Discours concernant deux sciences nouvelles.* Paris, Armand Colin, 1970 et PUF, 1985. Édité aussi dans [Ha02].

[Eb68] D. Ebin, *The manifold of Riemannian metrics.* 1970 Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XV, Berkeley, Calif., 1968) pp. 11–40. Amer. Math. Soc., Providence, R.I.

[E1905] A. Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper.* Annalen der Physik **27** (1905), 891–921. Traduction française : *Sur l'électrodynamique des corps en mouvement.* Paris, Jacques Gabay, 2005. Édité aussi dans [Ha02] et dans les oeuvres complètes d'Einstein.

[E1917] A. Einstein, *Über die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie, gemein-verständlich.* (La théorie de la Relativité Restreinte et Générale, exposé élémentaire.) Braunschweig, Vieweg, 1917. Traduction française : *La relativité.* Paris, Payot, 2001.

[E1921] A. Einstein, *Vier Vorlesungen über Relativitätstheorie – gehalten im Mai 1921 an der Universität Princeton.* Braunschweig, Vieweg, 1922. Traduction française : *Quatre conférences sur la théorie de la relativité.* Paris, Dunod, 2005. Édité en anglais sous le titre *The meaning of Relativity*, Chapman & Hall et Princeton University Press.

[F02] C. Frances, *Géométrie et dynamique lorentziennes conformes.* Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Lyon, 2002.

[GHL04] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Riemannian Geometry.* Springer Verlag, 3ème éd., 2004.

[Ha02] S. Hawking, *Sur les épaules des géants.* Paris, Dunod, 2002. (Textes collectés de Copernic, Galilée, Kepler, Newton, Einstein.)

[He78] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces.* Academic Press, 1978.

[K96] B. Klingler, *Complétude des variétés lorentziennes à courbure constante.* Math. Ann. **306** (1996), no. 2, 353–370.

[L11] P. Langevin, *L'évolution de l'espace et du temps.* (conférence au congrès de philosophie de Bologne, 1911) Scientia (Bologna) **10** (1911), 31–54.

[M01] P. Mounoud, *Sur l'espace des métriques de Lorentz d'une variété compacte.* Thèse de doctorat, Université de Montpellier II, 2001.

[N1687] I. Newton, *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, livres I, II et III. Londres, Joseph Streater, 1687. Traduction française : *Principia : Principes mathématiques de la philosophie naturelle.* Paris, Dunod, 2005. Édité aussi dans [Ha02].

[O'N83] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry.* Academic Press, 1983.

[P1905] H. Poincaré, *Sur la dynamique de l'électron.* C.R. **140** (1905), 1504–1508.

[S86] P. Samuel, *Géométrie projective.* Presses Universitaires de France, 1986.

[V1887] W. Voigt, *Über das Doppler'sche Princip.*, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen **2** (1887) 41-51. Réédité avec des commentaires dans Physikalische Zeitschrift **16** (1915), 381–386.

[W84] J. Wolf, *Spaces of constant curvature,* 5ème éd. Publish or Perish, Houston, TX, 1984.