Table des matières

Préambule

L'holonomie est un invariant sur les variétés munies d'une connexion affine, introduit pour la première fois explicitement par Elie Cartan au début du vingtième siècle. Il a essentiellement été étudié, cependant, depuis la seconde moitié du siècle et surtout, mais pas exclusivement, dans le cas riemannien. Citons notamment quatre théorèmes essentiels : celui de Borel-Lichnérowicz (1952), celui de de Rham (1952) et celui d'Ambrose-Singer (1953), ainsi que la classification par Berger des holonomies possibles dans le cas irréductible (1955). On pourra consulter par exemple le chapitre 10 de l'ouvrage d'Arthur Besse sur les variétés d'Einstein [Bes87] et, pour les développements plus récents, l'article de Bryant dans les *Actes de la Table Ronde de géométrie différentielle en l'honneur de Marcel Berger* [Bes96].

Si l'holonomie des variétés riemanniennes est aujourd'hui assez bien connue et s'est révélée un outil fécond, celle des variétés pseudo-riemanniennes représente encore un vaste champ de recherche ouvert. Cet état de fait, ainsi que l'attrait du monde pseudo-riemannien, si semblable en apparence au riemannien et au comportement pourtant parfois très différent, son possible intérêt en physique également, incitent à s'intéresser au cas pseudo-riemannien.

* * *

C'est à quelques aspects de cette étude que se consacre cette thèse. Il s'agira déjà partout d'holonomie *restreinte*, c'est-à-dire de l'holonomie engendrée par le transport parallèle le long de lacets homotopes à l'identité uniquement. Ainsi, tous les résultats présentés ici sont locaux, voire purement algébriques, c'est-à-dire ponctuels ; d'éventuels problèmes globaux à aborder ne seront le cas échéant que suggérés par les résultats locaux obtenus.

Les trois chapitres constituent en fait trois parties largement indépendantes ainsi que de style et de propos assez différents. Un objet les réunit cependant, typique du monde pseudo-riemannien : les sous-espaces totalement isotropes d'un espace vectoriel (E,g) pseudo-euclidien, stables sous l'action d'un certain sous-groupe de $O(E,g)$.

* * *

Le premier chapitre dégage une classification locale des variétés pseudo-riemanniennes dont la courbure de Ricci est parallèle. Pour ce faire, il utilise comme outils certains sous-espaces totalement isotropes comme décrits ci-dessus. Plus précisément, il utilise les propriétés de l'holonomie locale vis-à-vis de certains sous-espaces totalement isotropes qu'elle laisse stables. Il propose en outre, comme corollaire, un résultat du même type sur les variétés symplectiques munies d'une connexion affine compatible.

Le deuxième chapitre est l'étude d'un problème d'algèbre linéaire en dimension finie : cette étude a été suggérée par le premier chapitre qui en utilise un des résultats. Il s'agit du problème suivant : si a et b sont deux formes bilinéaires symétriques sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, quelle est la structure de la représentation dans E de $O(a)\cap O(b)$? Là encore, le problème «riemannien», c'est-à-dire ici euclidien, est connu : si $\mathbb{K}$ est le corps $\mathbb{R}$ et a définie positive, b est diagonalisable dans une base a-orthonormée, ce qui permet de répondre facilement à la question. Wilhelm Klingenberg avait déjà étudié le cas général au début des années cinquante (voir [Kli54] et fourni une famille de «bases privilégiées» généralisant les bases codiagonalisantes. C'est en dégageant ici certains espaces $[O(a) \cap O(b)]$-stables, a-isotropes, canoniques, formant un double drapeau, qu'on décomposera l'action de $O(a) \cap O(b)$ sur E. On effectue en outre le même travail quand a et/ou b est antisymétrique, mais toujours en supposant non dégénérée une des deux formes.

La situation est malheureusement très touffue ; le fruit le plus utilisable de ce chapitre est sans doute les tables dressées en annexe, récapitulant les formes matricielles relatives de a et b dans les différents cas possibles.

Le troisième chapitre enfin, beaucoup plus analytique que les deux autres, s'intéresse directement aux sous-espaces totalement isotropes stables par holonomie et aux feuilletages et fibrés locaux associés. Ces sous-espaces sont en effet une des nouveautés du cas pseudo-riemannien par rapport au monde riemannien, et une nouveauté encore très mal connue. Pour dire les choses très brièvement, les variétés riemanniennes voient leurs espaces tangents se décomposer en somme directe orthogonale sous l'action de l'holonomie, par exemple :

$$\mathrm{T}_m\mathcal{M} = E_1 \overset{\perp}{\oplus} E_1^\perp.$$

D'après le théorème d'Ambrose-Singer, il correspond alors à cette décomposition, une décomposition de la variété en produit riemannien :

$$\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_1'.$$

L'holonomie d'une variété pseudo-riemannienne pourra, elle, stabiliser par exemple seulement un *drapeau* dans les espaces tangents :

$$\{0\} \subset E_1 \subset E_1^\perp \subset \mathrm{T}_m\mathcal{M}, \quad \text{où } E_1 \text{ est totalement isotrope.}$$

A quelle structure géométrique correspond alors cette décomposition du fibré tangent? Ce n'est plus un produit riemannien.

De plus en général, c'est un treillis possiblement très compliqué de sous-espaces tous dégénérés de $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$ que stabilise l'holonomie restreinte d'une variété pseudo-riemannienne qui ne se décompose pas en produit riemannien.

C'est par la construction de **coordonnées locales** «privilégiées» que nous tentons ici d'apporter une réponse à cette question.

Si, à notre connaissance, ce problème de géométrie analytique locale n'a pas encore été traité, il existe déjà quelques résultats algébriques ponctuels sur les candidats-groupes d'holonomie possibles, stabilisant un drapeau comme indiqué plus haut. Ainsi, Aziz Ikemakhen et Lionel Bérard Bergery ont-ils [BBI93] démontré que les groupes d'holonomie agissant de façon indécomposable mais réductible se répartissent en quatre types possibles, dans le cas des variétés lorentziennes, c'est-à-dire pseudo-riemanniennes de signature $(1{,}d-1)$. C'est aussi avec le projet de proposer une compréhension locale de ces variétés que nous avons entrepris cette construction de coordonnées. De fait, ces dernières permettent de vérifier que les quatre types d'holonomies possibles se réalisent effectivement comme holonomie de variétés lorentziennes ; elles permettent en outre alors de les classifier.

Ce dernier chapitre constitue essentiellement une première approche, locale, des variétés pseudo-riemanniennes «réductibles, indécomposables». En apportant quelques réponses, il ouvre essentiellement plutôt quantité de questions. Pour cette raison, la rédaction, le système de notations introduit, la présentation des choses ne sont sûrement pas optimaux ; nous espérons surtout proposer ici un premier débroussaillage de la situation. Nous espérons également qu'une présentation plus synthétique et dégageant mieux l'essentiel en viendra, quand elle sera mieux comprise. Nous prions donc le lecteur d'excuser le caractère parfois pénible des constructions effectuées.

* * *

Bibliographie

[BBB] Lionel BÉRARD-BERGERY et Charles BOUBEL. Réduction simultanée de deux formes bilinéaires, symétriques ou antisymétriques. preprint.

[BBI93] Lionel BÉRARD-BERGERY and Aziz IKEMAKHEN. On the Holonomy of Lorentzian Manifolds. *Proc. of Symposia in Pure Mathematics*, 54,Part 2:27–39, 1993. (MR 94d:53106).

[BBI97] Lionel BÉRARD-BERGERY et Aziz IKEMAKHEN. Sur l'holonomie des variétés pseudo-riemanniennes de signature (n,n). *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 125 n°1, 93–114, 1997. (MR 98m:53087).

[Ber57] Marcel BERGER. Les espaces symétriques non compacts. *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 74:85–177, 1957. (MR 21♯3516).

[Bes87] Arthur L. BESSE. *Einstein Manifolds.* Springer Verlag — *Berlin, Heidelberg*, 1987.

[Bes96] Arthur L. BESSE, éditeur. *Actes de la Table Ronde de géométrie différentielle en l'honneur de Marcel Berger.* Collection *Séminaires et congrès* n°1, S.M.F., 1996.

[Bour] Nicolas BOURBAKI. *Elements de mathématique.* Groupes et Algèbres de Lie, chapitre 1 : Algèbres de Lie. Hermann, Paris, 1960.

[CP70] Michel CAHEN et Monique PARKER. Sur des classes d'espaces pseudo-riemanniens symétriques. *Bulletin de la Société Mathématique de Belgique*, XXII:339–354, 1970. (MR 44♯3247).

[CP80] Michel CAHEN and Monique PARKER. *Pseudo-riemannian symmetric spaces.* Memoirs of the American Mathematical Society, 24(229), 1980. (MR 81b:53036).

[CW70] M. CAHEN and N. WALLACH. Lorentzian symmetric spaces. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 76:585–591, 1970. (MR 42♯2402).

[E68] David G. EBIN. The manifold of Riemannian metrics. *1970 Global Analysis, Proc. of Symposia in Pure Mathematics*, 15:11-40, 1968. (MR 42♯2506).

[I96] Aziz IKEMAKHEN. Examples of indecomposable non-irreducible Lorentzian manifolds. *Ann. Sci. Math. Québec* 20, n°1, pp.53–66, 1996. (MR 97e:53122).

[Kli54] Wilhelm P.A. KLINGENBERG. Paare symmetrischer und alternierender Formen zweiten Grades. *Abh.Math.Sem.Univ.Hamburg*, 19:78–93, 1954. (MR 16,327g).

[NN57] NEWLANDER and NIRENBERG. Complex analytic coordinates in almost complex manifolds. *Annals of math.*, 65:391–404, 1957. (MR 19,557).

[Q94] M. QUERCIA, article paru dans la rubrique *Questions et réponses* de la *Revue de mathématiques spéciales*, n°5, pp.381–388, janvier 1994.

[T67] Jacques TITS. *Tabellen zu den einfachen Lie Gruppen und ihren Darstellungen.* Lecture Notes in Mathematics n°40, Springer-Verlag — *Berlin, Heidelberg, New York*, 1967.

[W49] A. G. WALKER. On parallel fields of partially null vector spaces. *Quart. Journ. of Mathematics (Oxford)*, 20:135–145, sept. 1949.

[W50a] A. G. WALKER. Canonical form for a riemannian space with a parallel field of null planes. *Quart. Journ. of Mathematics (Oxford)(2)*, 1:69–79, 1950.

[W50b] A. G. WALKER. Canonical forms (II) : parallel partially null planes. *Quart. Journ. of Mathematics (Oxford)(2)*, 1:147–152, 1950.

[Wu67] H. WU. Holonomy groups of indefinite metrics. *Pacific Journal of Mathematics*, 20:351–392, 1967. (MR 35♯3606).