

Courbe orthoptique d'une conique

Romain Bondil*et Charles Boubel†

16 avril 2009

Résumé

Ces notes illustrent comment la géométrie projective complexe permet de résoudre un problème de géométrie affine euclidienne : la détermination du lieu d'où l'on voit une conique sous un angle droit.

Mots-clefs — *Courbe orthoptique, conique, points cycliques, birapport, polarité.*

Introduction

« Tout ce que je fais ici par le calcul, je pourrais l'exécuter avec la règle et le compas ; mais il n'est pas permis de vous révéler ces secrets. »

G. Monge, cité dans [Du] p. 21.

L'exercice suivant, a encore été posé récemment à l'oral de l'École Polytechnique (cf. RMS 116, Ex. 249) :

Déterminer l'ensemble des points où passent deux tangentes perpendiculaires à une ellipse donnée.

Pour une courbe C donnée, l'ensemble des points du plan à partir desquels on peut tracer deux tangentes à C , perpendiculaires entre elles, s'appelle *courbe orthoptique* de C .

En réponse à l'exercice proposé, pour l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormé, la courbe orthoptique est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{a^2 + b^2}$, souvent appelé *cercle de Monge*.

Ce résultat est bien antérieur à Monge. Suivant [BL] p. 159 : « Dès 1685 La Hire a mentionné la propriété des coniques qui sert de définition au cercle de Monge ».

Dans [BL], il est aussi mentionné que la dénomination *cercle orthoptique* est plus récente et serait due à un certain H. Picquet (1872).

*Lycée Joffre, Montpellier, en remerciant l'Université Montpellier II pour son soutien, romain.bondil@math.univ-montp2.fr

†Université de Strasbourg, charles.boubel@unistra.fr

Toujours d'après [BL], la dénomination *cercle de Monge* viendrait du fait que Monge a fait connaître ce résultat par l'intermédiaire de sa généralisation en dimension supérieure : pour une quadrique à centre C , l'ensemble des points du plan qui sont à l'intersection de trois plans tangents à C deux à deux perpendiculaires est une sphère, dite *sphère de Monge*. (La référence la plus ancienne qui nous ayons trouvé sur ce sujet étant de 1828, dans [Ge] p. 121).

Plus encore, on doit comprendre que le merveilleux outil qu'est la « géométrie analytique », c'est-à-dire le calcul en coordonnées, tel qu'il est développé dans le cours de Monge ([Mo-2]), faisait du cercle de Monge déjà un exercice pour les premières générations de candidats à l'X (voir la rédaction du début de [Ro]). Le cas de la sphère de Monge est aujourd'hui abordable en prépa. (cf. [FGM] 4.25 ¹).

Nous rappelons donc, au § 0, la solution habituelle (hier comme aujourd'hui) à l'exercice cité. *On peut en outre considérer la même question pour une conique quelconque, ce que nous ferons.*

En suivant les conseils de Monge, qui engageait à comparer, sur deux colonnes, les preuves obtenues par les méthodes analytiques et les méthodes descriptives, on s'intéresse dans ces notes à une autre preuve, qui relève de la géométrie projective : « chaque opération analytique peut être regardée comme l'écriture d'un spectacle en géométrie » ([Mo-1] p. 16)

La motivation de cet article était de comprendre l'élégante esquisse de preuve en quatre lignes dans [Be] 17.4.2.3., qui est elliptique à plus d'un titre. Cette preuve est à la base de celle donnée dans le paragraphe § 8, que nous espérons être la plus explicite possible.

Les paragraphes qui précèdent le § 8 sont consacrés à la mise en place des outils nécessaires pour permettre, aux agrégatifs notamment, une lecture autonome du texte : l'accent est porté sur le fait qu'on utilise la géométrie projective complexe pour résoudre un problème *euclidien*, et sur la notion de *polarité par rapport à une conique*.

Les § 1 et 2 se trouvent dans tous les manuels, par exemple dans [Sa]. On y fixe surtout les notations. Le lecteur plus expérimenté peut sans doute commencer la lecture au § 3 ou au § 5. Tout est démontré, à l'exception du théorème de Chasles-Steiner au § 7.

Le § 8 est donc l'essentiel de notre propos, et conclut que la courbe orthoptique réelle est ou bien un cercle ou bien un cercle-point ou bien vide. Dans le cas de l'ellipse, il y a des points évidents et la courbe est donc bien un cercle.

Un second article étudiera plus en détail comment on peut comprendre, dans le cadre projectif complexe, les différentes formes de la courbe orthoptique réelle, en particulier pour les hyperboles, en fonction de l'angle entre leurs asymptotes, mais aussi comment on voit les foyers et directrices en géométrie projective par exemple.

Nous espérons que notre effort de clarification sera utile car les références dont nous disposons ([Be] loc. cit. et [Si] 7.21) ne sont pas de lecture facile et

¹dans ce très bon livre, la dénomination sphère *orthoptique* est discutable : on ne voit pas l'ellipsoïde sous un angle droit.

restent imprécises, notamment sur la gestion des cas particuliers.

Remerciements — Les deux auteurs remercient Denis Favennec², Pierre Crepel et Bernard Bru, pour leurs précisions historiques.

0 Une méthode de calcul standard

On se place ici dans le plan \mathbb{R}^2 muni de son produit scalaire canonique et on considère une ellipse C d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Pour un point $m = (x, y)$ on notera $f(m) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$ de sorte que : $m \in C \Leftrightarrow f(m) = 0$.

Soit un point $p = (x_0, y_0)$. On peut tracer en général au plus deux tangentes à C issues du point p , que l'on détermine comme suit : pour un vecteur $u = (x, y)$ la droite $\mathcal{D}_{p,u}$ passant par p et de vecteur directeur u est tangente à C si, et seulement si, elle intersecte C en un seul point.

En notant $p + tu = (x_0 + tx, y_0 + ty)$ les points de $\mathcal{D}_{p,u}$ (où t varie dans \mathbb{R}), la droite $\mathcal{D}_{p,u}$ est tangente à C ssi l'équation $f(p + tu) = 0$ admet une unique solution $t \in \mathbb{R}$.

En posant $q(m) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, on définit une forme quadratique q dont la forme bilinéaire associée est donnée par : $B(m_1, m_2) = \frac{x_1x_2}{a^2} + \frac{y_1y_2}{b^2}$. On sait que $q(p + tu) = q(p) + 2tB(p, u) + t^2q(u)$ et donc

$$f(p + tu) = 0 \Leftrightarrow t^2q(u) + 2tB(p, u) + q(p) - 1 = 0 \quad (1)$$

L'équation (1) (qui est vraiment du second degré car $q(u) \neq 0$) admet une unique solution si, et seulement si, son discriminant est nul : on a donc obtenu le (i) de propriété suivante :

Proposition 0.1 *Pour un point $p \in \mathbb{R}^2$, on note \mathcal{T}_p la réunion des tangentes à C issue du point p .*

(i) *Le point $p \in \mathbb{R}^2$ étant fixé, un vecteur $u \neq 0$ est vecteur directeur d'une tangente à C issue de p si, et seulement si :*

$$q(u)(q(p) - 1) - B(p, u)^2 = 0 \quad (2)$$

(ii) *Si on note Q la forme quadratique : $u \mapsto q(u)(q(p) - 1) - B(p, u)^2$, la condition du (i) revient à chercher les $u \neq 0$ dans le cône isotrope de cette forme quadratique, qu'on notera $\overrightarrow{\mathcal{T}}_p$. On en déduit que \mathcal{T}_p peut être soit vide, soit formé d'une droite, soit de deux droites.*

Justification du (ii) La classification des formes quadratiques en dimension deux sur \mathbb{R} donne que leur cône isotrope peut être : ou bien réduit à $\{0\}$ (si signature

²dont on peut consulter le très bel ouvrage [FR]

$(2, 0)$ ou $(0, 2)$) ou bien formé de deux droites (si signature $(1, 1)$) ou bien formé d'une seule droite (si la forme quadratique est de rang un), en excluant le cas de la forme nulle.

On en déduit les trois formes possibles du cône affine \mathcal{T}_p . Si $\overrightarrow{\mathcal{T}}_p = \{0\}$ alors $\mathcal{T}_p = \emptyset$. Si $\overrightarrow{\mathcal{T}}_p$ est formé d'une (resp. de deux) droite(s) vectorielle(s), alors \mathcal{T}_p est formé d'une (resp. de deux) droite(s) affine(s). \square

Dans le cas où $\overrightarrow{\mathcal{T}}_p$ est réunion de deux droites, la condition $u = (x, y) \in \overrightarrow{\mathcal{T}}_p$ peut aussi s'écrire :

$$(\alpha x + \beta y).(\alpha' x + \beta' y) = 0. \quad (3)$$

Sous cette forme, la condition que les deux droites de $\overrightarrow{\mathcal{T}}_p$ soient orthogonales devient :

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' = 0 \quad (4)$$

En développant le produit dans (3), $\alpha\alpha'$ et $\beta\beta'$ sont respectivement les coefficients de x^2 et y^2 et on a obtenu :

Proposition 0.2 *Les deux tangentes issues du point p sont orthogonales si, et seulement si, dans la forme quadratique Q de la proposition 0.1, en prenant $u = (x, y)$, la somme des coefficients de x^2 et de y^2 est nulle.*

Or $Q(u) = (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})(q(p) - 1) - (\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2})^2$ donc la condition sur la somme des coefficients de x^2 et y^2 est :

$$\begin{aligned} (\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2})(q(p) - 1) - \frac{x_0^2}{a^4} - \frac{y_0^2}{b^4} = 0 &\Leftrightarrow (\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2})(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1) = \frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}, \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{a^2 b^2}(x_0^2 + y_0^2) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}, \\ &\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2. \end{aligned}$$

On vient donc de montrer que d'un point $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, on peut tracer deux tangentes orthogonales à C si, et seulement si, p est sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{a^2 + b^2}$, on a donc bien prouvé :

Théorème 0.3 *La courbe orthoptique de l'ellipse C d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{a^2 + b^2}$, dit cercle de Monge de l'ellipse C .*

Remarque 0.4 *La proposition 0.2 admet la généralisation suivante en dimension n quelconque. Une forme quadratique d'un espace euclidien admet une base orthonormée formée de vecteurs isotropes si, et seulement si, elle est de trace nulle, ce qui est une autre façon de dire qu'une matrice de trace nulle est orthogonalement semblable à une matrice de diagonale nulle. C'est ce que l'on utilise pour étendre ce résultat en dimension supérieure (cf. [FGM] 4.25, et [Me] p. 336 et seq.)*

On peut compléter le théorème précédent en faisant (presque) le même calcul en remplaçant l'ellipse considérée par une hyperbole ou une parabole :

Théorème 0.5 Si C est l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, la courbe orthoptique de C est l'ensemble d'équation $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ qui est un vrai cercle si $a > b$, réduit à un point si $a = b$ et est vide si $a < b$.

Enfin si C est une parabole d'équation $y^2 = 2px$, sa courbe orthoptique est la droite d'équation $y = -p/2$, c'est-à-dire la directrice de C .

N.B. Dans le cas d'une hyperbole équilatère, le point trouvé, qui est le centre de l'hyperbole, est en fait l'intersection des deux asymptotes, et non de tangentes au sens usuel! La géométrie projective est déjà cachée ici (voir § 8.5).

1 Généralités sur les plans et droites projectives

1.1 Définition du plan projectif

Soient \mathbb{K} un corps, (pour nous ce sera \mathbb{R} ou \mathbb{C}), $d \in \mathbb{N}$ et E un \mathbb{K} -e.v. de dimension $d + 1$, on peut définir l'espace projectif de dimension d associé à E , qu'on note $\mathbb{P}(E)$, comme l'ensemble de classes d'équivalences $[v]$ des vecteurs $v \in E \setminus \{0\}$ pour la relation : $v \sim w \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, v = \lambda w$.

On identifiera aussi souvent la classe $[v]$ avec la droite $\mathbb{K}v$ dans E .

On note encore $\pi : E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(E), v \mapsto p = [v]$ l'application qui à un vecteur non nul v associe le point p classe de v dans $\mathbb{P}(E)$.

Dans la suite on ne s'intéresse qu'aux cas $d = 1$ et $d = 2$, pour lesquels $\mathbb{P}(E)$ est respectivement une droite et un plan projectif. Notamment, si on fixe E un \mathbb{K} -e.v. de dimension 3, on notera $P = \mathbb{P}(E)$ le plan projectif associé. Alors P contient des droites projectives : en effet, par définition, pour tout plan vectoriel Π de E , $D = \pi(\Pi \setminus \{0\})$ est une droite projective incluse dans $\mathbb{P}(E)$.

Par abus de notation, on notera simplement $D = \pi(\Pi)$ par la suite.

Notation – Si on a deux points $p = [v]$ et $q = [w]$ distincts de P , on notera (pq) la droite projective $\pi(\text{Vect}(v, w))$.

1.2 Coordonnées homogènes dans \mathbb{P}

Si on fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E de dimension 3, et qu'on note (X, Y, Z) les coordonnées de v dans \mathcal{B} , on note $[X : Y : Z]$ les coordonnées homogènes du point $p = [v]$ dans $\mathbb{P}(E)$ qui ont la propriété que $[X : Y : Z] = [X' : Y' : Z']$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $(X, Y, Z) = \lambda(X', Y', Z')$.

Droite à l'infini – Si on note D_∞ l'ensemble des point $p \in \mathbb{P}(E)$ tels que $Z = 0$, on voit que $D_\infty = \pi(\text{Vect}(e_1, e_2))$ est une droite projective, dite droite à l'infini de P .

Remarque – Cette notion de droite à l'infini est relative au choix de la base fixée ci-dessus. C'est un trait important des méthodes projectives que de faire varier ce choix de droite à l'infini. Cependant, dans ces notes, la droite à l'infini D_∞ sera fixée (voir le § 1.4).

Complémentaire de la droite à l'infini – Pour tout $p \in P \setminus D_\infty$, où $p = [v]$, on peut considérer le point d'intersection de la droite $p = \mathbb{K}v$ dans E avec le plan d'équation $Z = 1$. On définit ainsi une bijection entre l'ensemble $P \setminus D_\infty$ qu'on notera \mathbb{A} et le plan affine d'équation $Z = 1$ dans E .

Ces remarques permettent donc de voir P comme un plan affine \mathbb{A} (identifié au plan $Z = 1$) auquel on ajoute la droite projective D_∞ .

En remarquant encore que $D_\infty = \mathbb{P}(\vec{\mathbb{A}})$ où $\vec{\mathbb{A}}$, d'équation $Z = 0$, est le plan vectoriel associé à \mathbb{A} , on obtient :

Lien entre points à l'infini et directions de droites – Un point à l'infini $p \in D_\infty$ peut être vu, de manière équivalente, comme :

- (i) un point de coordonnées $[a : b : 0]$,
- (ii) l'image par π d'un vecteur $v = (a, b)$ du plan d'équation $Z = 0$,
- (iii) La direction des droites affines dirigées par le vecteur v dans le plan affine \mathbb{A} .

Pour le (iii), en effet, on remarque qu'une droite D contient le point $[a : b : 0]$ dans P si, et seulement si la droite affine $D \cap \mathbb{A}$ est dirigée par $v = (a, b)$.

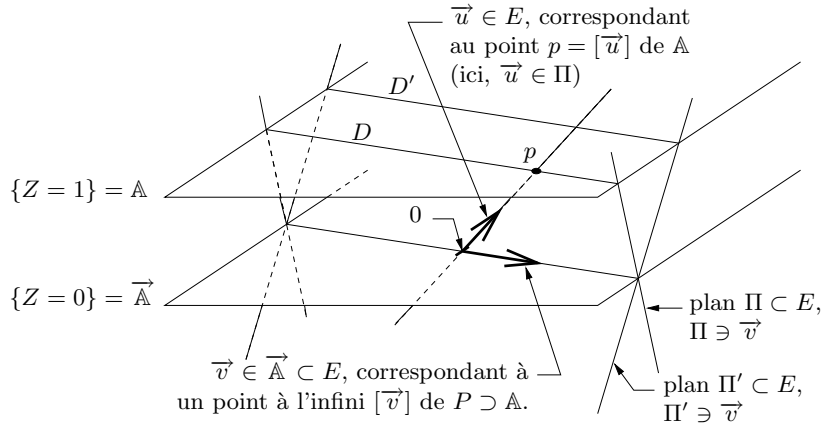


FIG. 1 – Affinement, les droites affines D et D' de \mathbb{A} sont dirigées par \vec{v} . Projectivement, les droites projectives D et D' de P s'intersectent au point à l'infini $[\vec{v}]$. En effet $D = \pi(\Pi)$ et $D' = \pi(\Pi')$, avec $D \cap D' = \pi(\Pi \cap \Pi') = \pi(\text{Vect}(\vec{v})) = [\vec{v}]$.

1.3 Coordonnées homogènes sur une droite projective

On note $D = \mathbb{P}(\mathbb{K}^2)$ une droite projective. Le choix d'une base \mathcal{B} de \mathbb{K}^2 attribue à un vecteur $v \in \mathbb{K}^2$ un couple (X, Y) de coordonnées et on note $[X : Y]$ les coordonnées dites *homogènes* du point $p = [v]$ dans la droite D , avec la même règle qu'au § 1.2, à savoir que $[X : Y]$ et $[X' : Y']$ définissent le même point si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $(X', Y') = \lambda(X, Y)$.

De la sorte on voit que l'application de $i : \mathbb{K} \rightarrow D, t \in \mathbb{K} \mapsto [t : 1]$ est une injection de \mathbb{K} dans D qui est surjective sur $D \setminus \{[1 : 0]\}$. Le point $[1 : 0]$ est alors vu comme *point à l'infini* de D .

Notation – Pour deux points $a = [v]$ et $b = [w]$ distincts, dans un plan projectif P , on pourra noter les points de la droite (ab) distincts de b , sous la forme $a + tb$ avec $t \in \mathbb{K}$, en définissant $a + tb$ comme $[v + tw]$.

1.4 Une convention importante tout au long de ces notes

Dans ces notes, on veut appliquer la géométrie projective à la résolution d'un problème de *géométrie affine euclidienne*, le problème de la courbe orthoptique d'une conique.

On notera $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$ un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé fixé, et (x, y) les coordonnées dans ce repère (voir aussi § 2.3 pour davantage sur la structure euclidienne).

On notera $P_{\mathbb{R}}$ le plan projectif réel qui complète $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$: on a fixé la droite à l'infini D_{∞} comme la droite d'équation : $Z = 0$ et on identifie $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$ au plan affine $Z = 1$ de \mathbb{R}^3 . On notera $P_{\mathbb{C}}$ le plan projectif complexe contenant $P_{\mathbb{R}}$ (cf. § 2.2).

La notation P sera utilisée dans les énoncés valables pour un plan projectif quelconque (réel ou complexe).

2 Coniques projectives, réelles et complexes

2.1 Des coniques affines aux coniques projectives réelles

On considère maintenant une conique C du plan affine euclidien $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$ disons, à déplacement près, une des trois coniques suivantes :

- (i) une ellipse \mathcal{E} d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,
- (ii) une hyperbole \mathcal{H} d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$,
- (iii) une parabole \mathcal{P} d'équation $y^2 = 2px$.

On associe à une telle conique euclidienne C la conique *projective* \overline{C} qu'on notera respectivement $\overline{\mathcal{E}}, \overline{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{P}}$ définie, pour tout point $p \in P$ de coordonnées homogènes $[X : Y : Z]$ par :

- (i) $p \in \overline{\mathcal{E}} \Leftrightarrow \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = Z^2$,
- (ii) $p \in \overline{\mathcal{H}} \Leftrightarrow \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = Z^2$,
- (iii) $p \in \overline{\mathcal{P}} \Leftrightarrow Y^2 = 2pXZ$.

Trois remarques :

a) Ainsi, $C = \overline{C} \cap \mathbb{A}_{\mathbb{R}}$ avec la convention du § 1.2 qui permet de voir $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$ comme le plan d'équation $Z = 1$ dans E .

b) On remarque que seules les équations homogènes ont un sens dans P , donc qu'il était nécessaire d'« homogénéiser » les équations de départ.

c) Que dire de $\overline{C} \setminus C$?

On laisse au lecteur le soin de vérifier qu'on a ajouté resp. 0, 2, 1 points dans les cas (i), (ii), (iii) ci-dessus i.e. qu'une ellipse n'a pas de points à l'infini dans

$P_{\mathbb{R}}$, une hyperbole deux, une parabole un. (Ces points à l'infini correspondent aux directions asymptotiques).

Plus généralement, on introduit la :

Définition – Pour toute forme quadratique q sur E de dimension trois, l'ensemble des points de la conique projective définie par q est l'ensemble des $p = [v]$ dans $P = \mathbb{P}(E)$ tels que $q(v) = 0$.

On parlera aussi de conique sur une droite projective en remplaçant, dans la définition précédente, E par un e.v. de dimension deux. Cette conique sera alors formée d'au plus deux points.

2.2 Conique projective complexe associée

En voyant \mathbb{R}^3 comme sous-ensemble de \mathbb{C}^3 , on voit $P_{\mathbb{R}}$ comme sous-ensemble de $P_{\mathbb{C}} = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$.

Exemple – Pour l'équation $X^2/a^2 + Y^2/b^2 = Z^2$ qui ne donnait pas de points sur la droite D_{∞} d'équation $Z = 0$ dans $P_{\mathbb{R}}$, on a maintenant deux points à l'infini dans $P_{\mathbb{C}}$ car l'équation $X^2/a^2 + Y^2/b^2 = 0$ avec $Z = 0$ donnent deux solutions : $[1 : ib/a : 0]$ et $[1 : -ib/a : 0]$. On dit qu'on a *deux points imaginaires à l'infini* sur notre ellipse (le mot imaginaire signifiant ici complexe non réel).

2.3 Lien avec la structure euclidienne

Si, au § 2.2, on part d'un cercle C de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$ d'équation $x^2 + y^2 = R^2$, on obtient quel que soit le rayon R les même points $[1 : \pm i : 0]$ dans la conique projective complexe associée.

Définition – Les points $I = [1 : i : 0]$ et $J = [1 : -i : 0]$ sont appelés *points cycliques* de notre plan projectif. La paire $\{I, J\}$ est la conique définie sur D_{∞} par la forme quadratique q_0 où $q_0(X, Y) = X^2 + Y^2$.

Propriété (réciproque de ce qui précède) – Une conique non dégénérée de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$ est un cercle si, et seulement si, la conique projective complexe associée passe par les points cycliques.

Cette notion de point cyclique est relative à notre choix (ici ferme et définitif cf. § 1.4) de la droite D_{∞} comme droite d'équation $Z = 0$ et de la structure euclidienne dans le plan affine.

Plus précisément, pour mieux comprendre le rôle des points cycliques, et en même temps rendre évidente la propriété ci-dessus, considérons $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\mathbb{R}}$ comme le plan d'équation $Z = 1$ dans E espace vectoriel de dimension 3 (cf. fin du § 1.2).

Qu'est ce qu'une structure euclidienne sur \mathbb{A} ? C'est la donnée d'une forme quadratique définie positive sur $\vec{\mathbb{A}}$, plan vectoriel associé à \mathbb{A} , qui est le plan d'équation $Z = 0$ de E .

Dans $\mathbb{P}(E)$, l'équation $Z = 0$ définit D_{∞} , donc une structure euclidienne est la donnée d'une conique définie par une forme quadratique de signature $(2, 0)$ sur D_{∞} .

En pratique, si on choisit une base orthonormée de $Z = 0$ pour bâtir les coordonnées homogènes, la forme quadratique en question est bien sûr définie par $q_0(X, Y) = X^2 + Y^2$. La conique qu'elle définit est la paire de points $\{I, J\}$.

Une conique C d'équation, en coordonnées affines, $q(x, y) + ax + by + c = 0$ et donc définissant \overline{C} d'équation homogène $q(X, Y) + aXZ + bYZ + cZ^2 = 0$, est un cercle ssi q et q_0 sont proportionnelles, ce qui revient à dire que $\overline{C} \cap D_\infty$ est définie par q_0 , et donc est la même conique $\{I, J\}$.

Scholie – On vient d'exhiber une *bijection* entre les triplets $(E, D_\infty, \{I, J\})$ et les couples $(\mathbb{A}_\mathbb{R}, \langle q_0 \rangle)$ où q_0 est une forme quadratique, dont la classe $\langle q_0 \rangle$ modulo multiplication par un scalaire non nul, définit une structure euclidienne dans le plan affine $\mathbb{A}_\mathbb{R}$.

3 Polarité par rapport à une conique

On considère toujours $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension trois et on note toujours $P = \mathbb{P}(E)$.

On fixe une forme quadratique q sur E et on note $C = \{[v] \in P, q(v) = 0\}$ qui est par définition *la conique* définie par q dans le plan projectif $P = \mathbb{P}(E)$ (cf. la déf. du § 2.1).

On suppose que q est *non dégénérée* sur E , on dit alors aussi que C est une conique non dégénérée (on dit aussi *propre*) et on note B sa forme bilinéaire symétrique associée.

Définition 3.1 *On trouve dans la littérature la terminologie suivante : deux points $[a]$ et $[b]$ de P sont dits conjugués par rapport à la conique C si, et seulement si, $B(a, b) = 0$.*

On préférera dire ici q -orthogonaux, vu la multitude de significations du mot conjugué. La raison de l'emploi possible du mot conjugué sera cependant plus claire après le lemme 5.1 ci-dessous.

Définition 3.2 *Pour un point $p = [v]$, la droite projective $D = \pi(v^\perp)$ où v^\perp est le plan q -orthogonal au vecteur v dans E s'appelle la droite polaire de p par rapport à C . On notera ici $D = \widehat{p}$. De même on définit et on notera $\widehat{D} = p$ le point q -orthogonal à la droite D , appelé aussi le pôle de D .*

Les propriétés usuelles de l'orthogonalité pour la forme quadratique *non dégénérée* q de l'espace vectoriel E donnent les propriétés de dualité suivantes :

Remarque 3.3

(i) *Pour tout $p \in \mathbb{P}(E)$, on a $\widehat{\widehat{p}} = p$, de même pour toute droite $D \subset \mathbb{P}(E)$, on a $\widehat{\widehat{D}} = D$.*

(ii) *Si D_1 et D_2 sont deux droites de P , $\widehat{D_1 \cap D_2} = (\widehat{D_1}, \widehat{D_2})$.*

(iii) *Si p_1 et p_2 sont deux points de P , $\widehat{(p_1 p_2)} = \widehat{p_1} \cap \widehat{p_2}$.*

Premier lien avec le problème de la courbe orthoptique

L'intérêt de la notion de polarité en lien avec notre problème apparaît déjà dans la première propriété suivante :

Proposition 3.4

- (i) Si $p \in C$, la droite polaire \widehat{p} est la droite tangente à C en p .
- (ii) Si $p \notin C$: il peut y avoir zéro ou deux tangentes distinctes à C passant par p . Si l'on se place dans le plan projectif complexe, il y a toujours deux tangentes distinctes à C issues de p .
- (iii) Si $p \notin C$, et si on note T_1 et T_2 les deux tangentes distinctes issues de p dans $P_{\mathbb{C}}$, et a et b les deux points d'intersections de T_1 et T_2 avec C , alors la droite polaire \widehat{p} est exactement la droite (ab) .

On convient d'abord :

Définition 3.5 Une droite D est tangente à une conique C en un point m si, et seulement si, $D \cap C = \{m\}$.

Comme les points d'intersections s'obtiennent en résolvant une équation du second degré :

Remarque 3.6 Une droite qui n'est pas tangente à C intersecte toujours C en deux points distincts dans $P_{\mathbb{C}}$.

Preuve de la propriété 3.4

(i) Soit $m \in P \setminus C$. Les points de la droite (pm) distincts de m peuvent s'écrire $p + tm$ avec $t \in \mathbb{K}$ (cf. notation à la fin du § 1.3), de sorte que les points d'intersection de (pm) avec C correspondent aux valeurs de $t \in \mathbb{K}$ qui sont les racines de l'équation du second degré $q(p + tm) = 0$.

La droite (pm) est donc tangente à C en p si, et seulement si, $t = 0$ est racine double de l'équation.

Or cette équation est $q(p) + 2tB(p, m) + t^2q(m) = 0$ avec $q(p) = 0$, et la condition $t = 0$ racine double équivaut à $B(p, m) = 0$ i.e. $m \in \widehat{p}$.

Mais comme $p \in C$, on a $p \in \widehat{p}$ et donc $B(p, m) = 0 \Leftrightarrow (pm) = \widehat{p}$.

Au total, on a bien montré que (pm) est tangente à C , si, et seulement si, $(pm) = \widehat{p}$.

(ii) On donne une preuve par dualité, à comparer aux équations de la proposition 0.1 :

Soit $p \in P \setminus C$. Pour tout point $a \in C$, on vient de voir que la tangente à C en a est la droite \widehat{a} .

Ainsi p est sur une tangente \widehat{a} à C si, et seulement si, par dualité, $a \in \widehat{p}$.

Donc les points de C dont on peut mener une tangente à C passant par p sont les points de $\widehat{p} \cap C$.

Comme \widehat{p} est une droite, qui n'est pas tangente à C (car $p \notin C$), elle rencontre C en deux points a_1 et a_2 dans $P_{\mathbb{C}}$ et en zéro ou deux points dans $P_{\mathbb{R}}$.

(iii) On a par (i), $p \in \widehat{a}$ et $p \in \widehat{b}$ donc $\{p\} = \widehat{a} \cap \widehat{b}$ ce qui équivaut par la prop. 3.3, à $\widehat{p} = (ab)$. \square

4 Homographies et birapport

Propriétés générales

Définition 4.1 Si E et F sont deux \mathbb{K} -e.v. et $f : E \rightarrow F$ est un isomorphisme alors f induit une application $\bar{f} : \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}(F)$ appelée une homographie.

Définition 4.2 Soient M_1, M_2, M_3, M_4 quatre points distincts d'une droite projective $D = \mathbb{P}(E)$ et $[X_i : Y_i]$ leur coordonnées homogènes par rapport à une base \mathcal{B} de E . L'expression :

$$[M_1, M_2, M_3, M_4] = \frac{\begin{vmatrix} X_1 & X_3 \\ Y_1 & Y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_2 & X_3 \\ Y_2 & Y_3 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} X_2 & X_4 \\ Y_2 & Y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_1 & X_4 \\ Y_1 & Y_4 \end{vmatrix}}$$

est bien définie indépendamment du couple (X_i, Y_i) représentant les coordonnées homogènes $[X_i : Y_i]$ et est aussi indépendant du choix de la base \mathcal{B} .

On l'appelle birapport des quatre points alignés M_1, \dots, M_4 .

L'indépendance du choix du couple (X_i, Y_i) se vérifie en multipliant ces couples par des λ_i (ce qui fait comprendre la nécessité d'un *bi*-rapport), et l'indépendance du choix de la base se voit par formule de changement de base pour le déterminant (ou cf. [Si]).

Mieux, la même raison donne la propriété :

Proposition 4.3 Si D et D' sont deux droites projectives et $h : D \rightarrow D'$ est une homographie, alors si M_1, \dots, M_4 sont sur D et $M'_i = h(M_i)$ alors $[M_1, M_2, M_3, M_4] = [M'_1, M'_2, M'_3, M'_4]$.

Remarque 4.4 La réciproque est vraie : pour qu'il existe une homographie envoyant quatre points d'une droite sur quatre autres points d'une autre droite il suffit qu'ils aient le même birapport. La déf. 4.2, qui va au plus pressé ici, cache le sens profond du birapport. Voir plutôt, p.ex., [Mn] p. 122.

Calculs

Remarque 4.5 Si M_3 et M_4 ont pour coordonnées homogènes respectives $[1 : 0]$ et $[0 : 1]$ (i.e. $M_3 = O$ et $M_4 = \infty$ suivant l'identification du § 1.3), alors l'expression ci-dessus devient :

$$[M_1, M_2, O, \infty] = \frac{Y_1 X_2}{Y_2 X_1} = \frac{Y_1}{X_1} / \frac{Y_2}{X_2}.$$

Définition 4.6 Quatre points distincts M_1, M_2, M_3, M_4 d'une droite projective D forment une division harmonique si, et seulement si, $[M_1, M_2, M_3, M_4] = -1$

On dit parfois aussi que les couples (M_1, M_2) et (M_3, M_4) sont conjugués harmoniques.

Lemme 4.7 (Une interprétation affine)

En considérant le point M_4 comme point à l'infini sur la droite projective D , on a la caractérisation suivante :

$$[M_1, M_2, M_3, \infty] = -1 \Leftrightarrow M_3 \text{ est le milieu de } [M_1, M_2],$$

la notion de milieu étant bien définie dans la droite affine $D \setminus \{M_4\}$.

Preuve — On choisit les coordonnées sur D comme dans la remarque 4.5.

Avec les notations de cette remarque, en notant en outre $t_1 = X_1/Y_1 \in \mathbb{K}^*$ et $t_2 = X_2/Y_2 \in \mathbb{K}^*$, $[M_1, M_2, O, \infty] = -1 \Leftrightarrow t_2 = -t_1$ i.e. O est le milieu du segment $[M_1, M_2]$. \square

En considérant le plan vectoriel E au-dessus de la droite projective D , en notant $M_i = [v_i]$ et $D_i = \text{Vect}(v_i)$, on déduit du lemme. 4.7 (avec les mêmes coordonnées pour la preuve) le résultat suivant :

Remarque 4.8 (Interprétation vectorielle de la division harmonique)

Les quatre points (M_1, \dots, M_4) forment une division harmonique si, et seulement si, les droites D_1 et D_2 sont images l'un de l'autre par la symétrie vectorielle d'axe D_3 parallèlement à D_4 .

Birapport de quatre droites concourantes

Théorème-Définition 4.9 (Projections centrales) Si $o \in P$ et Δ et Δ' sont deux droites du plan projectif P ne contenant pas o , l'application projection de centre o qui à tout point $m \in \Delta$ associe le point d'intersection de (om) avec Δ' est une homographie.

Démonstration — On note $\pi : E \setminus \{0\} \rightarrow P$ comme dans la définition du plan projectif au §1.1 et Π et Π' plans vectoriels de E tels que $\pi(\Pi) = \Delta$ (resp. $\pi(\Pi') = \Delta'$). En notant $o = [u]$, on sait que $\text{Vect}(u) \cap \Pi = \text{Vect}(u) \cap \Pi' = \{0\}$ et que la projection de centre o vient de la restriction à Π (injective) du projecteur sur Π' parallèlement à $\text{Vect}(u)$. \square

Corollaire 4.10 (Birapport de quatre droites concourantes) Soit P un plan projectif et D_1, D_2, D_3, D_4 quatre droites distinctes qui passent par le même point o . Une droite Δ coupe chaque droite D_i en un point p_i .

Alors le birapport des points $[p_1, p_2, p_3, p_4]$ est indépendant du choix de la droite Δ . On l'appellera birapport des droites $[D_1, D_2, D_3, D_4]$.

Démonstration — Si on considère deux droites Δ et Δ' , et des points d'intersection p_i et p'_i de Δ avec D_i , alors l'application projection de centre o de Δ sur Δ' est une homographie qui envoie les p_i sur les p'_i . Donc le birapport est conservé. \square

N.B. On peut donner une définition intrinsèque du birapport de quatre droites concourantes, soit par dualité (cf. [Si]), ou directement comme suit : notons $D_i = \pi(\Pi_i)$ où Π_i est un plan de E . Alors les Π_i sont concourants en $\text{vect}(u)$, où $[u] =$

o. On considère désormais l'espace quotient $E/\text{vect}(u)$: par définition, le birapport $[D_1, D_2, D_3, D_4]$ est celui des quatre points $\Pi_i/\text{vect}(u)$ dans la droite projective $\mathbb{P}(E/\text{vect}(u))$.

Le lien avec la définition par sécantes vient de l'isomorphisme entre $E/\text{Vect}(u)$ et le plan Π au-dessus de Δ , induit par la projection $E \rightarrow \Pi$.

Proposition 4.11 *Soient D_1, \dots, D_4 et p_1, \dots, p_4 comme dans la proposition précédente. Soit C un conique propre de P .*

Alors on a l'égalité des birapports $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [\widehat{D}_1, \widehat{D}_2, \widehat{D}_3, \widehat{D}_4]$ où \widehat{D}_i désigne le point polaire de la droite D_i par rapport à la conique C .

Preuve – Pour une forme quadratique *non dégénérée* q de forme bilinéaire associée B l'application $\varphi : E \rightarrow E^*, v \mapsto B(v, \square)$ est un isomorphisme donc la polarité $\mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}(E^*), p \mapsto \hat{p}$ est une homographie et les homographies conservent le birapport. \square

5 Lemme clef sur la polarité par rapport à une conique

Lemme 5.1 *Soit C une conique propre i.e. définie par une forme quadratique non dégénérée q , dans P plan projectif sur un corps quelconque (de caractéristique différente de 2) et α et β deux points de P .*

Si α et β sont distincts, on note a et b les deux points d'intersection (distincts ou confondus) de la droite $(\alpha\beta)$ avec C .

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) α et β sont q -orthogonaux et distincts,
- (ii) le birapport $[a, b, \alpha, \beta]$ vaut -1 .

Comme un point $\alpha \in P$ est q -orthogonal à lui-même si, et seulement si, $\alpha \in C$, on peut faire la :

Remarque 5.2 *La condition (i) ci-dessus est encore équivalente à :*

- (i)' α et β sont q -orthogonaux et l'un d'eux est hors de C (et alors l'autre aussi).

Preuve du lemme – Dans le cas où α et β sont confondus, le birapport ne peut valoir que $1, 0, \infty$, il suffit donc de montrer la propriété dans le cas où α et β sont distincts.

On note B la forme bilinéaire associée à q .

Une preuve de ce résultat est donnée dans [Sa] p. 127. Le second auteur en propose une autre, en suivant la remarque 4.8, qui “se voit sur un dessin”.

Avec les notations du § 1.1, on considère $F = \pi^{-1}(ab)$, le plan vectoriel au-dessus de la droite projective (ab) . Dans F , a et b sont des droites vectorielles.

Soit $\sigma \in \text{GL}(F)$ la symétrie par rapport à la droite a parallèlement à la droite b . Vu la remarque 4.8, on veut prouver que $B(\alpha, \beta) = 0 \Leftrightarrow \sigma(\alpha) = \beta$ (*).

Prenons u et v des représentants de a et b dans le plan F .

Notons w un représentant de α dans F .

Or comme F est un plan, l'orthogonal w^\perp du vecteur w pour la forme q est de dimension un, donc montrer (*) équivaut à montrer que $B(w, \sigma(w)) = 0$ (**).

Or (u, v) est une base de F et dans cette base q s'écrit $\forall (x, y) \in \mathbb{K}^2, q(xu + yv) = xy$. Alors $\sigma^*B = -B$.

Donc $B(w, \sigma(w)) = -B(\sigma(w), \sigma(\sigma(w))) = -B(\sigma(w), w)$, ce qui démontre bien (**). \square

Comme application immédiate de ce résultat on peut donner la :

Propriété-définition 5.3 (Centre) *Soit C une conique qui n'est pas tangente à la droite à l'infini D_∞ , i.e. qui n'est pas une parabole (cf. 2.1).*

Posons $o = \widehat{D_\infty}$. Alors pour toute droite contenant o , coupant C en deux points a, b , le point o est le milieu du segment $[a, b]$ autrement dit o est centre de symétrie de C .

Réciproquement si une conique a un centre de symétrie, il est unique et c'est $\widehat{D_\infty}$.

Preuve – Soient donc $o = \widehat{D_\infty}$ et $\Delta = (a, b)$ avec $(a, b) \in C^2$.

Le point o est q -orthogonal à tous les points de D_∞ , donc en particulier au point à l'infini de Δ .

Par le lemme clef précédent, en notant ∞_Δ le point à l'infini de Δ , on a donc $[a, b, o, \infty_D] = -1$, ce qui par le lemme 4.7, signifie que o est le milieu de $[a, b]$.

Comme les deux lemmes invoqués donnent des équivalences, on a aussi la réciproque. \square

6 L'orthogonalité euclidienne vue dans le projectif complexe

Dans le lemme suivant, on parle de l'orthogonalité (euclidienne) de deux droites D et D' de $\mathbb{A}_\mathbb{R} \subset P_\mathbb{C}$ suivant la convention fixée aux § 1.4 et § 2.3.

Lemme 6.1 *Deux droites D_1 et D_2 du plan affine $\mathbb{A}_\mathbb{R}$ (voir la notation ci-dessus) sont orthogonales pour la structure euclidienne, si et seulement si, en notant ∞_{D_i} (pour $i = 1, 2$) leurs points à l'infini, on a :*

$$[I, J, \infty_{D_1}, \infty_{D_2}] = -1,$$

où I, J sont les points cycliques définis au § 2.3.

Démonstration – Notons pour $i = 1, 2$, v_i un vecteur directeur de D_i . Notons B_0 le produit scalaire défini pour les vecteurs de $\mathbb{A}_\mathbb{R}$ i.e. sur le plan vectoriel $\vec{\mathbb{A}}_\mathbb{R}$ d'équation $Z = 0$.

Alors $D_1 \perp D_2 \Leftrightarrow B_0(v_1, v_2) = 0 \Leftrightarrow [\pi(v_1), \pi(v_2), I, J] = -1$ par le lemme 5.1, car la conique C_0 définie par B_0 sur D_∞ est par définition $\{I, J\}$. \square

Remarque 6.2 *En utilisant la notion de birapport de quatre droites concourantes (cf. 4.10), on peut formuler le résultat du lemme précédent comme suit : si $D_1 = (ma)$ et $D_2 = (mb)$ on a l'équivalence :*

$$(ma) \perp (mb) \Leftrightarrow [(ma), (mb), (mI), (mJ)] = -1.$$

En effet, le birapport de quatre droites se calcule par intersection avec une droite quelconque, il suffit de considérer la droite à l'infini. \square

7 Théorème de Chasles-Steiner

Nous faisons ici une exception à notre volonté de tout redémontrer en admettant le :

Théorème 7.1 *Soit p, q, r et s quatre points distincts du plan trois à trois non alignés et $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Alors en notant :*

$$C_{p,q,r,s}(\lambda) = \{m \in P \mid [(mp), (mq), (mr), (ms)] = \lambda\},$$

$C_{p,q,r,s}$ est une conique propre passant par p, q, r et s , et privée de ces points. Si exactement trois points parmi p, q, r et s sont alignés, disons $\{p, q, r\} \subset D$, alors la définition précédente de $C_{p,q,r,s}$ fait encore sens et $C_{p,q,r,s}(\lambda)$ est la droite (ss') privée de $\{s, s'\}$, où s' est le point de D tel que $[p, q, r, s'] = \lambda$.

L'énoncé précédent nous suffira pour donner une preuve du théorème sur la courbe orthoptique (cf. § 8.6). Mais pour les lecteurs familiers avec le plan projectif dual, une autre formulation, équivalente, du théorème de Chasles-Steiner précédent, s'exprime en terme d'homographie entre faisceaux de droites. Pour un point $a \in P$, on note a^* le faisceau de toutes les droites de P passant par a . On a alors :

Théorème 7.2 *Soient a et b deux points distincts du plan, f une application de a^* dans b^* , et $E_f = \bigcup_{D \in a^*} (D \cap f(D)) = \{m \in P, m \in f(ma)\}$. Alors E_f est une conique si et seulement si f est une homographie, et dans ce cas E_f est propre si et seulement si $f((ab)) \neq (ab)$.*

Le lecteur pourra se référer par exemple, à [Sa] p. 84–86 ou à [Si] Chap. 5. On utilisera le théorème sous la forme 7.2 pour la deuxième preuve, plus « unifiée », du théorème sur la courbe orthoptique (cf. § 8.7).

8 Le théorème sur la courbe orthoptique

8.1 Revue des cas particuliers

Soit C une conique non dégénérée définie par une forme quadratique q à coefficients réels, que l'on voit dans le plan projectif complexe $P_{\mathbb{C}}$. La courbe

orthoptique de C est définie par la donnée de trois objets : C , donc la donnée de la polarité par rapport à C , et les points cycliques I et J . Trois cas particuliers doivent être notés :

- C est un cercle *i.e.* $\{I, J\} \subset C$, équivalentement : $I \in \widehat{I}$, ou encore : $J \in \widehat{J}$.
- C est une parabole *i.e.* C tangente à $D_\infty = (IJ)$ *i.e.* $\widehat{D_\infty} \in D_\infty$.
- C est une hyperbole équilatère *i.e.* C coupe D_∞ en deux points h et h' (les directions des asymptotes) vérifiant : $[h, h', I, J] = -1$. Par le lemme 5.1, ceci est équivalent à : $J \in \widehat{I}$ et encore à : $I \in \widehat{J}$.

8.2 Enoncé du théorème principal

On considère une conique réelle C comme au 8.1, et on notera \mathcal{O} la courbe orthoptique de C dans le plan affine réel $\mathbb{A}_\mathbb{R}$.

N.B. On plonge C dans $P_\mathbb{C}$ et on considère dans toute la suite un point $m \in P_\mathbb{C}$ hors de $C \cup \{I, J\}$.

On note (ma) et (mb) les deux tangentes à C issues de m , avec $(a, b) \in C^2$.

Ces deux tangentes existent toujours dans le plan projectif complexe, et sont distinctes (cf. 3.4). D'après la remarque 6.2,

$$m \in \mathcal{O} \Leftrightarrow [(ma), (mb), (mI), (mJ)] = -1 \quad (1)$$

Définition – On notera $\mathcal{O}_\mathbb{C}$ l'ensemble des points $m \in P_\mathbb{C} \setminus (C \cup \{I, J\})$ vérifiant (1), que l'on appellera *la courbe orthoptique projective complexe*. Bien sûr $\mathcal{O} = \mathcal{O}_\mathbb{C} \cap \mathbb{A}_\mathbb{R}$.

La condition (1) n'a de sens que pour $m \notin C \cup \{I, J\}$, d'où le N.B. ci-dessus.

Théorème principal – Si C n'est pas une parabole, $\mathcal{O}_\mathbb{C} = \Gamma \setminus (\{I, J\} \cup (\Gamma \cap C)) = \Gamma \setminus (\Gamma \cap (D_\infty \cup C))$, où Γ est une conique passant par I et J .

La conique Γ est propre sauf si C est une hyperbole équilatère. Dans le cas où C est une hyperbole équilatère, $\Gamma = \widehat{I} \cup \widehat{J}$.

Si C est une parabole, $\mathcal{O}_\mathbb{C} = (I_1 J_1) \setminus \{I_1, J_1\}$ où I_1 et J_1 désignent les points de tangence des tangentes à C issues respectivement de I et J , et distinctes de D_∞ .

Remarque – Comme C est réelle, Γ est définie par une forme quadratique à coefficients réels, et par § 2.3, le fait que Γ passe par I et J signifie que la courbe orthoptique $\mathcal{O} = \Gamma \cap P_\mathbb{R}$ est ou bien un vrai cercle réel ou bien réduite à un point, ou bien vide.

8.3 La preuve, en un dessin !

La figure 2 suivante, avec sa légende, donne la preuve en quatre étapes du théorème principal du § 8.2, abstraction faite des cas particuliers. Cette preuve est ensuite reprise, de manière plus détaillée, dans les paragraphes qui suivent. Nous engageons au lecteur à un aller-retour entre cette preuve courte et les

Preuve. Par lecture du birapport des droites par intersection avec la droite \widehat{m} :

$$\begin{aligned} [(ma), (mb), (mI), (mJ)] = -1 &\Leftrightarrow [a, b, (mI) \cap \widehat{m}, (mJ) \cap \widehat{m}] = -1 \\ &\Leftrightarrow (mI) \neq (mJ) \text{ et } (mJ) \cap \widehat{m} \in \widehat{(mI)} \cap \widehat{m} \end{aligned}$$

la deuxième équivalence provenant du lemme-clef 5.1.

Comme $(mJ) \cap \widehat{m} \in \widehat{m}$ et $m \neq (mI) \cap \widehat{m}$ (car $m \notin \widehat{m}$) la condition $(mJ) \cap \widehat{m} \in \widehat{(mI)} \cap \widehat{m}$ revient à dire que $(mJ) \cap \widehat{m}$ est le pôle de la droite $(m, (mI) \cap \widehat{m}) = (mI)$. \square

8.5 Fin dans le cas où C est une hyperbole équilatère

Dans ce cas, on a $J \in \widehat{I}$ (cf. § 8.1). La deuxième condition du lemme du § 8.4, $(mJ) \cap \widehat{m} = \widehat{I} \cap \widehat{m}$, est alors vraie dès que $m \in \widehat{I}$. Si $m \notin \widehat{I}$ alors $\widehat{I} \cap (mJ) = \{J\}$, donc cette condition équivaut à $J = \widehat{I} \cap \widehat{m}$ i.e. $\widehat{J} = (mI)$ i.e. $m \in \widehat{J}$. Ceci montre le théorème avec $\Gamma = \widehat{I} \cup \widehat{J}$. **Désormais, on suppose ce cas exclu.**

8.6 Fin de la preuve du théorème principal, méthode 1 :

Pour cette preuve, on doit mettre à part le cas où C est un cercle. Ce cas est bien sûr évident par ailleurs. On suppose donc que C n'est ni un cercle, ni une hyperbole équilatère.

Comme C n'est pas un cercle, \widehat{I} coupe C en une paire $\{I_1, I_2\}$. Si $m \notin \widehat{I}$, et comme $\widehat{(mI)} \in \widehat{I}$, dans la condition **(2)** du lemme 8.4, l'égalité $(mJ) \cap \widehat{m} = \widehat{(mI)}$, lue sur la droite \widehat{I} , signifie que les points $(mJ) \cap \widehat{m}$ et $(mI) \cap \widehat{I}$ sont q -orthogonaux. En appliquant alors le 5.1 à la deuxième partie de la condition **(2)** du lemme 8.4, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{(2)} &\Leftrightarrow [I_1, I_2, (mI) \cap \widehat{I}, (mJ) \cap \widehat{m}] = -1 \text{ ou } \left(m \in \widehat{I} \text{ et } (mJ) \cap \widehat{m} = \widehat{(mI)} \right) \\ &\Leftrightarrow [(mI_1), (mI_2), (mI), (mJ)] = -1 \text{ ou } (mJ) = \widehat{I} \quad \mathbf{(3)} \\ &\Leftrightarrow m \in C_{I,J,I_1,I_2}(-1) \quad \mathbf{(4)} \end{aligned}$$

Justification la deuxième partie de **(3)** : si $m \in \widehat{I}$ et $(mJ) \cap \widehat{m} = \widehat{(mI)}$, alors m et $(mJ) \cap \widehat{m}$ sont dans \widehat{I} . Or ils sont dans (mJ) , et distincts car $m \notin \widehat{m}$, donc $(mJ) = \widehat{I}$. La réciproque est immédiate.

Justification de **(4)** : on applique le théorème 7.1 et le cas $J \in \widehat{I}$, donc $(mJ) = \widehat{I}$, est exclu.

Cas dégénérés. $C_{I,J,I_1,I_2}(-1)$ est une conique propre si et seulement si C n'est pas une parabole.

En effet, d'après le théorème 7.1, $C_{I,J,I_1,I_2}(-1)$ n'est pas une conique propre exactement quand trois points parmi I, J, I_1, I_2 sont alignés. Or, comme C n'est pas un cercle, $I \notin \widehat{I} = (I_1 I_2)$, et comme C n'est pas une hyperbole équilatère,

$J \notin \widehat{I} = (I_1 I_2)$. Donc ceci a lieu quand I_1 ou I_2 est sur D_∞ , c'est-à-dire quand D_∞ est tangente à C i.e. quand C est une parabole. Alors, $C_{I,J,I_1,I_2}(-1)$ est une droite passant par I_1 . Par symétrie des rôles de I et J , elle passe aussi par J_1 . Le résultat suit. \square

8.7 Fin de la preuve du théorème principal, méthode 2 :

En utilisant la forme 7.2 du théorème de Chasles-Steiner, on donne une preuve plus courte et plus synthétique (on ne doit pas écarter le cas des cercles), plus proche de l'esprit de [Si] Ex. 7.20. La base commune aux deux preuves est le lemme du § 8.4, qu'on peut traduire comme l'alignement de trois points distincts, précisément (et c'était la remarque du § 8.3) :

Comme $J \notin \widehat{I}$, $J \notin \widehat{(mI)}$ donc la deuxième condition de (2) s'écrit : m , J et $\widehat{(mI)}$ sont alignés et distincts i.e. $m \in (J, \widehat{(mI)})$.

Comme $J \notin \widehat{I}$, on peut définir l'application f suivante, composée d'homographies, et E_f sa conique associée par le théorème 7.2 :

$$f : \begin{array}{ccccc} I^* & \rightarrow & \widehat{I} & \rightarrow & J^* \\ d & \mapsto & \widehat{d} & \mapsto & (J\widehat{d}), \end{array} \quad E_f = \bigcup_{d \in p^*} (d \cap f(d)).$$

Alors $m \in (J, \widehat{(mI)})$ s'écrit : $m \in f(mI)$. Ainsi : $m \in \mathcal{O} \Leftrightarrow m \in E_f$ et $m \notin D_\infty$, avec E_f une conique contenant $\{I, J\}$.

Cas dégénérés. D'après le théorème 7.2, E_f dégénère exactement quand on a $f((IJ)) = (IJ)$. Mais :

$$f((IJ)) = (IJ) \Leftrightarrow f(D_\infty) = D_\infty \Leftrightarrow (I, \widehat{D_\infty}) = D_\infty \Leftrightarrow \widehat{D_\infty} \in D_\infty.$$

Donc E_f est une conique propre si et seulement si C n'est pas une parabole, et alors $D_\infty \cap E_f = \{I, J\}$ donc la condition $m \notin D_\infty$ est superflue. Dans le cas parabolique, E_f est l'union du point fixe de f i.e. de la droite $(IJ) = D_\infty$ et d'une autre droite, donc \mathcal{O}_C est incluse dans cette dernière. Comme, dans tous les cas, les points de tangence des tangentes à C issues de I et J sont dans E_f (le vérifier), $E_f \supset \{I_1, J_1\}$, donc $\mathcal{O}_C = (I_1 J_1) \setminus \{I_1, J_1\}$. \square

8.8 Une généralisation immédiate : point de vue harmonique sur une conique

La démonstration précédente, outre son caractère géométrique, présente encore l'intérêt d'être valable *verbatim* si on remplace les points I et J par un couple quelconque de points distincts du plan projectif.

Précisément : soit C est une conique propre et soient p et q deux points de $P_{\mathbb{C}}$. Notons $D = (pq)$.

Pour tout point $m \in P_{\mathbb{C}} \setminus (C \cup \{p, q\})$ on note (ma) et (mb) les deux tangentes à C issues de m , avec $(a, b) \in C^2$.

On définit $\mathcal{H} = \{m \in P_{\mathbb{C}} \setminus (C \cup \{p, q\}), [(ma), (mb), (mp), (mq)] = -1\}$ qu'on peut appeler la courbe à point de vue harmonique sur C vis-à-vis de (p, q) .

Alors la preuve du théorème 8.2 donne directement :

Théorème (généralisation du 8.2) – *Si C n'est pas tangente à D , alors $\mathcal{H} = \Gamma \setminus (\{p, q\} \cup (\Gamma \cap C)) = \Gamma \setminus (\Gamma \cap (D \cup C))$, où Γ est une conique passant par p et q .*

La conique Γ est propre sauf si C coupe D en deux points h, h' tels que $[h, h', p, q] = -1$. Dans ce cas particulier, $\Gamma = \widehat{p} \cup \widehat{q}$.

Si C est tangente à D , $\mathcal{H} = (p_1q_1) \setminus \{p_1, q_1\}$ où p_1 et q_1 désignent les points de tangence des tangentes à C issues respectivement de p et q , et distinctes de D .

Références

- [Au] M. Audin, Géométrie, EDP Sciences, 2006.
- [Be] M. Berger, Géométrie, t. 2, Nathan, 1990.
- [BL] H. Brocard, T. Lemoyne, Courbes géométriques remarquables, t. 1, A. Blanchard, 1967.
- [Du] C. Dupin, Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de Gaspard Monge, Bachelier, 1819.
- [FR] D. Favennec, en collaboration avec E. Riboulet-Deyris, Douce perspective, une histoire des sciences et d'art, Ellipses, 2007.
- [FGM] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, Ex. de maths. oraux X-E.N.S., algèbre 3, Cassini, 2008.
- [Ge] J. Gergonne, Annales de math. pures et appl., T. XVIII, n. 8, 1828, in Bulletin des sciences math., phys. et chimiques, Treutel et Würtz, 1828.
- [Mo-1] G. Monge, Géométrie descriptive, rééd. J. Gabay, 1989.
- [Mo-2] G. Monge, Application de l'analyse à la géométrie, rééd. Cours historiques de l'Ecole Polytechnique, Ellipses, 1994.
- [Me] P. Meunier, Agreg. interne de math., Exercices d'oral corrigés et commentés, P.U.F., 1997.
- [Mn] R. Mneimné, Eléments de géométrie, Cassini, 1997.
- [Ro] Rochat, Recherche de quelques propriétés des tangentes aux sections coniques, Ann. Maths pures et appl., t. 2 (1811-1812), p. 225-230.
- [Sa] P. Samuel, Géométrie projective, P.U.F., 1986.
- [Si] J.C. Sidler, Géométrie projective, Dunod, 2000.