ENS Lyon février 2006
Préparation à l'agrégation

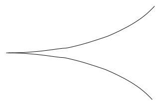
Étude des surfaces dans $\mathbb{R}^3$:
un parallèle avec l'étude des courbes dans $\mathbb{R}^2$.

Cette feuille veut montrer en quoi l'étude locale des courbes, qui vous est plus familière, et celle des surfaces, suivent le même schéma.

1 Courbes et surfaces : définitions locales

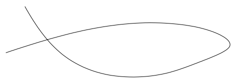
(a) Une «courbe» Γ de $\mathbb{R}^2$, est l'image d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ par $\gamma \in C^2(U, \mathbb{R}^2)$, avec γ un *plongement*, c'est-à-dire une *immersion injective* qui est un *homéomorphisme sur son image*. Remarque : dans une étude locale, seul le premier mot, «*immersion*», est important. En effet, si en $t \in I$, γ est une immersion, c'est-à-dire si $\gamma'(t)$ est injective, c'est-à-dire simplement ici si $\gamma'(t) \neq 0$, alors quitte à se restreindre à un intervalle I plus petit autour de t, γ sera injective et sera un homéomorphisme sur son image (pourquoi ?). Justifions ces trois hypothèses.

– «Immersion» évite les singularités :



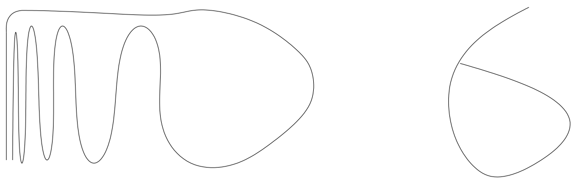
Leur étude, possible et très riche, sort du cadre de cette feuille, notamment dans le cas des surfaces où elle est totalement hors de portée.

– «Injective» évite les points multiples :



En effet, on y verra simplement, localement, plusieurs courbes qui s'y croisent, qu'on étudiera chacune séparément. L'injectivité évite aussi une courbe parcourue plusieurs fois par le paramétrage, comme $\exp : i\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$. Ainsi, à un point correspond un et un seul paramètre, ce qui évite des problèmes techniques inutiles.

– «Homéomorphisme sur son image» bannit les phénomènes indésirables suivants :



On n'a en effet pas envie d'appeler courbe ce qu'on voit au voisinage d'un point du segment vertical à gauche de la figure de gauche, au bien au voisinage du point «trifide» à droite. Exercice : vérifiez que γ ne peut être un homéomorphisme sur son image dans les deux dessins ci-dessus.

Enfin, l'objet étudié n'est pas γ, mais bien son image $\Gamma = \gamma(I)$. Si on compose γ à la source par un difféomorphisme $\varphi : J \to I$, Γ ne change pas. Réciproquement :

Proposition. Si $\gamma_1 \in C^k(I_1, \mathbb{R}^2)$ et $\gamma_2 \in C^k(I_2, \mathbb{R}^2)$ sont deux plongements qui ont même image Γ, alors il existe un C^k-difféomorphisme $\varphi : I_2 \to I_1$ tel que $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$ (Pourquoi ?).

Moralité. Pour vérifier qu'une propriété de γ ou qu'un nombre associé à $\gamma(t)$ ne dépend que de Γ et pas du paramétrage γ choisi, il suffit de vérifier que cette propriété ou que le calcul de ce nombre est invariant par composition de γ par un difféomorphisme à la source.

(b) Une «surface» S est l'image d'un ouvert connexe U de $\mathbb{R}^2$ par $f \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$, avec, semblablement, f un *plongement*. Encore une fois, dans une étude locale, exiger «f immersion» suffit. Si en $m \in U$, f est une immersion, c'est-à-dire si $\mathrm{d}f(m)$ est *injective*, alors quitte à se restreindre à un ouvert U plus petit autour de m, f sera injective et sera un homéomorphisme sur son image (pourquoi ?). Encore une fois, on évite ainsi les singularités, les points multiples et des ensembles $f(U)$ que l'on n'a pas envie de considérer ici comme des surfaces de $\mathbb{R}^3$. Semblablement, c'est l'*ensemble* S qu'on étudie, pas ses paramétrages. Si on compose f à la source par un difféomorphisme $\varphi : V \to U$, S ne change pas. Réciproquement :

Proposition. Si $f_1 \in C^k(U_1, \mathbb{R}^3)$ et $f_2 \in C^k(U_2, \mathbb{R}^3)$ sont deux plongements qui ont même image S, alors il existe un C^k-difféomorphisme $\varphi : U_2 \to U_1$ tel que $f_2 = f_1 \circ \varphi$ (Pourquoi ?).

Moralité. Pour vérifier qu'une propriété de f ou qu'un nombre associé à $f(m)$ ne dépend que de S et pas du paramétrage f choisi, il suffit de vérifier que cette propriété ou que le calcul de ce nombre est invariant par composition de f par un difféomorphisme à la source.

Présentons à présent différentes notions, parallèlement, en **(a)** et en **(b)**.

2 Tangente, plan tangent

(a) La tangente $T_{\gamma(t)}\Gamma$ à Γ en $\gamma(t)$ est la droite affine $\gamma(t) + \mathrm{vect}(\gamma'(t))$. Justification géométrique : c'est la limite de la droite $D_{t'} = (\gamma(t), \gamma(t'))$ quand $t' \to t$, au sens où $\gamma(t)$ ne bouge pas et où un vecteur directeur unitaire tend vers celui de la tangente, ou bien où $T_{\gamma(t)}\Gamma$ est l'ensmeble des valeurs d'adhérence des suites bornées de points $p_n \in D_{t'_n}$ avec $t'_n \to t$. Démonstration : revenez à la définition de la dérivée. On vérifie que cette définition est invariante par composition à droite par un difféomorphisme.

(b) Le plan tangent $T_{f(m)}S$ à S en $f(m)$ est le plan affine $f(m)+\mathrm{vect}(\mathrm{d}f(m).e_1, \mathrm{d}f(m).e_2)$ $= f(m)+\mathrm{Im}\,\mathrm{d}f(m)$. Justification géométrique : c'est la limite du plan $P_{m',m''} = (f(m), f(m'), f(m''))$ quand $(m', m'') \to (m, m)$ avec $(\overrightarrow{mm'}, \overrightarrow{mm''})$ libre, au sens où $T_{f(m)}S$ est l'ensmeble des valeurs d'adhérence des suites bornées de points $p_n \in P_{m'_n,m''_n}$ avec $(m'_n, m''_n) \to (m, m)$, ou bien où $f(m)$ ne bouge pas et où un vecteur normal unitaire du plan tend vers celui du plan tangent. Démonstration : définition de la différentielle. Cette définition est encore invariante par composition à droite par un difféomorphisme.

3 Longueur d'un arc de courbe

Il s'agit de la longueur induite par le produit scalaire ambiant de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. C'est une notion métrique.

(a) Un vecteur tangent V à Γ en $p \in \Gamma$ est, par la définition ci-dessus, un $V = \mathrm{d}\gamma(t).v$ où t est tel que $\gamma(t) = p$ et $v \in \mathbb{R}$, donc un $V = \lambda\gamma'(t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. La norme euclidienne ambiante de $\mathbb{R}^2$ induit sur $T_{\gamma(t)}\Gamma$ une norme euclidienne : $\|V\|$.

La longueur de $\gamma([a,b]) \subset \Gamma$ est $l(\gamma([a,b])) := \int_a^b \|\gamma'(t)\|\mathrm{d}t$. On vérifie qu'elle est invariante par composition à droite par un difféomorphisme. On dit donc que γ est un paramétrage de Γ **par la longueur d'arc** si pour tout t, $\|\gamma'(t)\| = 1$, autrement dit, si $\mathrm{d}\gamma(t)$ est une isométrie euclidienne de $T_t I = \mathbb{R}$ sur la tangente $T_{\gamma(t)}\Gamma$. Alors, $l(\gamma([a,b])) = b - a$. Autrement dit, **tout arc tracé dans $\boldsymbol{\Gamma}$ a la même longueur que l'arc correspondant dans l'espace $\boldsymbol{I}$ des paramètres**. **Il existe toujours de tels paramétrages**.

(b) Un vecteur tangent V à S en $p \in S$ est, par la définition ci-dessus, un $V = \mathrm{d}f(m).v$ où m est tel que $f(m) = p$ et $v \in \mathbb{R}^2$. Le produit scalaire ambiant de $\mathbb{R}^3$ induit encore sur $T_{f(m)}S$ un produit scalaire : $\|V\|$.

Un arc tracé sur S est un $f(C)$ où $C = c([a,b])$, $c \in C^1([a,b], U)$, est un arc tracé dans U. (Cette définition se transporte par composition de f à droite par un difféomorphisme). De même, $l(f(C)) := \int_a^b \|(f \circ c)'(t))\|\mathrm{d}t$. On dira que f est une **isométrie** de U muni du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$, sur S, si pour tout $m \in U$, $\mathrm{d}f(m)$ est une isométrie euclidienne de $T_m U = \mathbb{R}^2$ dans le plan tangent $T_{f(m)}S$. Si f est une isométrie, alors **tout arc $\boldsymbol{f(C)}$ a la même longueur dans $\boldsymbol{S}$ que l'arc correspondant $\boldsymbol{C}$ dans l'espace $\boldsymbol{U}$ des paramètres**. Contrairement au cas des courbes, **un tel paramétrage isométrique n'existe pas en général, pour $\boldsymbol{S}$ donnée**. C'est la principale différence, du point de vue métrique, entre les courbes «toutes isométriques à des intervalles de $\mathbb{R}$, donc localement isométriques entre elles», et les surfaces, «non localement isométriques entre elles», en général.

Les surfaces admettant, localement, un paramétrage f isométrique depuis un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ sont les surfaces développables (des morceaux de plans gondolés dans l'espace). [Attention, les surfaces développables ne sont pas introduites ainsi dans les livres. La présentation ci-dessus est alors une propriété caractéristique non triviale.]

Attention. Attention au **double sens** du mot isométrie. Au sens introduit ci-dessus, on a envie de dire que deux surfaces $S = f(U)$ et $S' = g(U)$ avec $f \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ et $g \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ deux plongements, sont **isométriques**, plus précisément que $h = g\circ$«f^{-1}»: $S \to S'$ est une isométrie, si pour tout point $p = f(m)$ de S, «$\mathrm{d}h(p)$ est une isométrie euclidienne de $T_p S$ sur $T_{h(p)}S'$». Une difficulté apparaît cependant : définir $\mathrm{d}h$, qui n'est pas à variable dans un espace vectoriel. On la contourne facilement :

Définition 1. Deux surfaces S et S' sont dites isométriques si elles admettent des paramétrages respectifs $f \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ et $g \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ tels que, pour tout m dans U, les produits scalaires de $\mathbb{R}^2$ définis par :

$$\|v\|_m^f := \|\mathrm{d}f(m).v\| \quad \text{et :} \quad \|v\|_m^g := \|\mathrm{d}g(m).v\|$$

sont égaux. Voir figure page suivante.

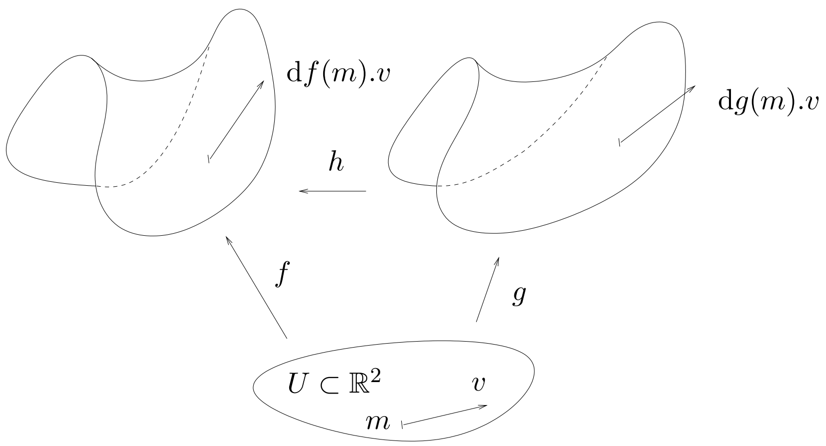
C'est la définition que vous trouverez dans les livres. La définition donnée plus haut de paramétrage isométrique à partir d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ en est un cas particulier. Attention, $h : S \to S'$ n'est pas en général une restriction d'isométrie euclidienne de $\mathbb{R}^3$.

Or le mot isométrie a déjà un sens usuel, entre espaces métriques :

Définition 2. «bijection préservant la distance».

Pourquoi employer le même mot ? Voici le lien. Un morceau de surface S dans $\mathbb{R}^3$ euclidien est un espace métrique au sens naturel suivant : on pose $d(p,q) = \inf\{$longueur des arcs tracés sur S et reliant p à $q\}$. Exercice : c'est une distance. Alors :

Propriété. Isométrie au 1er sens $\Rightarrow$ isométrie au 2ème sens. Preuve : exercice facile.



La réciproque est vraie mais NON TRIVIALE et déborde le cadre de l'agrégagtion. Je n'ai pas vu ce danger signalé, pas plus que l'ambiguïté du mot isométrie.

Attention bis. Ici l'étude est locale. En particulier, tous les paramétrages sont injectifs et l'application h construite plus haut est automatiquement bijective. Pour des surfaces en général, non réduites à un petit voisinage d'un point, la définition 1 n'est équivalente à la définition 2 que si on précise que les surfaces sont en **bijection** par une isométrie au sens 1. Une isométrie au sens 1, de S dans S', non bijective, est dite une *isométrie locale* (en un sens différent de celui utilisé ici d'«isométrie d'un petit ouvert de S sur un petit ouvert de S'»). Exemples : l'enroulement d'un plan autour d'un cylindre ou l'enroulement d'un morceau de plan autour d'un cône ; l'enroulement d'un hélicoïde sur une caténoïde.

Note. En le sens 1, utilisé dans le cas des courbes, et comme annoncé plus haut, si Γ et Γ' sont deux courbes et $p \in \Gamma$, $p' \in \Gamma'$, il existe toujours une isométrie d'un voisinage O de p dans Γ sur un voisinage O' de p' dans Γ'. Pourquoi ?

4 Courbure d'une courbe. Endomorphisme de Weingarten d'une surface.

Cette dernière notion est la seule nouveauté à acquérir. La suite montre en quoi elle se définit exactement de la même façon que la courbure d'une courbe.

(a) Soit Γ une courbe de classe C^2 (orientée, i.e. on privilégie une classe de paramétrages, qui diffèrent les uns des autres par composition par un difféomorphisme *croissant* des intervalles de paramètres, mais je ne m'intéresse pas ici à cette subtilité ; dans la suite, les problèmes d'orientation sont entre parenthèses) et $\gamma \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ un paramétrage (d'orientation positive) par la longueur d'arc. Vous savez que :

Proposition/Définition. La courbure de Γ en $p = \gamma(t) \in \Gamma$ est le réel λ tel que : $\gamma''(t) = \lambda n_\gamma(t)$, où $n_\gamma(t)$ est la normale unitaire (complétant $\gamma'(t)$ en une base directe) à Γ en $\gamma(t)$.

Le paramétrage croissant par la longueur d'arc étant unique à translation près à la source, cette définition n'est pas ambiguë. Remarque : notons ρ la rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ dans $\mathbb{R}^2$ orienté. Alors $n_\gamma(t) = \rho(\gamma'(t))$ et on retrouve la relation équivalente que vous connaissez, $n'(t) = (\rho(\gamma'))'(t) = \rho(\gamma''(t)) = -\lambda\gamma'(t)$. Écrit autrement, $\mathrm{d}n_\gamma(t) = -\lambda \mathrm{d}\gamma(t)$. Comme $\mathrm{d}\gamma(t) : \mathbb{R} = T_t I \to T_{\gamma(t)}\Gamma$ est une bijection (γ est une immersion), on peut l'écrire :

$$\boxed{\mathrm{d}n_\gamma(t) \circ (\mathrm{d}\gamma(t))^{-1} = -\lambda \mathrm{Id}_{T_{\gamma(t)}\Gamma}.} \qquad (1)$$

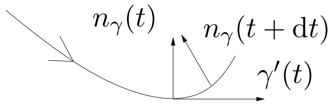
(Attention à l'ordre des parenthèses autour de $\mathrm{d}\gamma(t)$.) La courbure en p apparaît comme un endomorphisme de $T_p\Gamma$, ce qui revient à un scalaire car $\dim T_p\Gamma = 1$.

Intérêt de cette autre formule définissant la courbure. Elle est valable pour *n'importe quel paramétrage (positif)* δ, et pas uniquement celui par la longueur d'arc. Démonstration : soit $\varphi : J \to I$ un difféomorphisme et $\delta := \gamma \circ \varphi$. La normale unitaire orientée $n_\delta(t)$ à Γ au point $\delta(t) = \gamma(\varphi(t))$ est $n_\delta(t) = n_\gamma(\varphi(t))$. Différentions :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}n_\delta(t) &= \mathrm{d}n_\gamma(\varphi(t)).\mathrm{d}\varphi(t) \quad \text{(différentielle d'une composée)}\\
&= -\lambda \mathrm{d}\gamma(\varphi(t)).\mathrm{d}\varphi(t) \quad \text{(par (1))}\\
&= -\lambda \mathrm{d}(\gamma \circ \varphi)(t) \quad \text{(différentielle d'une composée)}\\
&= -\lambda \mathrm{d}\delta(t).
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout paramétrage γ, si $t \mapsto n_\gamma(t)$ associe à t la normale unitaire à Γ en $\gamma(t)$, la relation (1) définit la courbure.

Interprétation géométrique. La courbure indique à quelle vitesse et dans quel sens la normale $n_\gamma(t)$ tourne, i.e. se couche sur la courbe, quand t croît.



Ici, $n_\gamma(t+\mathrm{d}t) = n_\gamma(t) - \lambda\gamma'(t)\mathrm{d}t$ avec $\lambda > 0$. Ce λ est le même quel que soit le paramétrage positif choisi, comme démontré. La courbure ici est positive, $n_\gamma(t)$ se couche sur la courbe dans la direction opposée à $\gamma'(t)$. La courbe orientée tourne «à gauche».

Remarque. La courbure ne dit rien sur la courbe en tant qu'espace métrique : toutes les courbes, localement, sont isométriques à un intervalle de $\mathbb{R}$. Elle informe sur la courbe comme *sous*-espace métrique de $\mathbb{R}^2$: elle indique comment ce sous-espace est courbé dans $\mathbb{R}^2$. Quel est son cercle ou sa parabole osculatrice.

(b) Cette présentation se transfère *telle quelle* au cas des surfaces dans $\mathbb{R}^3$. Pour comprendre comment une surface S (orientée) paramétrée (positivement) par $f \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ est courbée à l'intérieur de $\mathbb{R}^3$, on introduit $n_f(m) = \frac{1}{\|\frac{\partial}{\partial x}(m) \wedge \frac{\partial}{\partial y}(m)\|} \frac{\partial}{\partial x}(m) \wedge \frac{\partial}{\partial y}(m)$ la normale unitaire orientée à S au point $f(m)$, où $\frac{\partial}{\partial x}(m) := \mathrm{d}f(m).e_1$ et $\frac{\partial}{\partial y}(m) := \mathrm{d}f(m).e_2$. Comme f est une immersion, $\mathrm{d}f(m) : \mathbb{R}^2 = T_mU \to T_{f(m)}S$ est une bijection et :

Définition. L'équivalent, pour une surface, de la courbure en $p = f(m) \in S$ est l'endomorphisme W de T_pS, dit «de Weingarten», défini par :

$$\boxed{\mathrm{d}n_f(m) \circ (\mathrm{d}f(m))^{-1} = -W \in \mathrm{End}(T_{f(m)}S).} \tag{2}$$

Semblablement, on montre immédiatement que cette définition est indépendante du paramétrage f (Ça tombe bien, car pour une surface, il n'y a PAS, en général, de paramétrage isométrique, «par la longueur des arcs». On est donc condamné à introduire la courbure par une formule basée sur un paramétrage quelconque), donc que W est bien une grandeur associée à l'ensemble S.

Interprétation géométrique. Lien avec le théorème d'Euler. Cet endomorphisme a la même interprétation géométrique. Il indique à quelle vitesse et dans quel sens la normale $n_f(m)$ se «couche» sur S quand le paramètre m varie : $W(u)$, pour $u \in T_pS$, est la dérivée de $n_f(m)$ quand $f(m)$ varie avec une dérivée égale à u. Comme $\dim T_{f(m)}S = 2$, un scalaire ne suffit plus.

Autre point de vue : il suit immédiatement des formulations (1) et (2) que, si u est un vecteur de norme 1 de T_pS et P_u est le plan affine passant par $p = f(m)$ et de base (directe) $(u, n_f(m))$, alors la courbe $\Gamma_u := S \cap P_u$ (pourquoi est-ce une courbe ?), orientée par u, a pour courbure $W(u)$ en p.

Comme W est autoadjoint (propriété), il est diagonalisable en base orthonormée (v_1, v_2) de T_pS et la remarque ci-dessus donne un théorème d'Euler que vous trouvez dans les livres : quand u parcourt le cercle unité de T_pS, $W(u)$ décrit une sinusoïde oscillant entre deux extrema (éventuellement égaux) atteints pour $\pm v_1$ et $\pm v_2$ avec $v_1 \perp v_2$.

Remarque. Comme la courbure d'une courbe, l'endomorphisme de Weingarten décrit une propriété extrinsèque du *sous*-espace métrique S de $\mathbb{R}^3$: comment il se courbe dans $\mathbb{R}^3$, à l'ordre deux, en p. Quel est son paraboloïde osculateur si vous voulez (exercice, do Carmo). Une différence apparaît cependant avec les courbes. Alors qu'un intervalle de $\mathbb{R}$ peut être plongé dans $\mathbb{R}^2$ de sorte que sa courbure en un point donné (et même en tout point, mais ça ne m'intéresse pas ici) soit un $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ prescrit, une surface donnée $S \subset \mathbb{R}^3$, n'admet en général pas de surface $\widetilde{S}$ qui lui est isométrique au sens 1 donné page 3 et dont l'endomorphisme de Weingarten en un point p donné est un certain W_0 prescrit.

C'est une découverte de Gauss : si $f \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ et $g \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ sont des paramétrages respectifs de S et $\widetilde{S}$, tels que S et $\widetilde{S}$ sont isométriques au sens 1, alors pour tout paramètre $m \in U$, l'endomorphisme de Weingarten de f et celui de g ont *même déterminant*. Ce déterminant suit de la seule donnée des produits scalaires $\|\cdot\|^f$ et $\|\cdot\|^g$ donnés par f et g en chaque point de U (*cf* pp. 3–4). Il dépend donc uniquement de S comme espace métrique (si on admet l'équivalence isométrie 1 – isométrie 2), pas de du choix de son plongement dans $\mathbb{R}^3$. On l'appelle courbure de Gauss. Notez qu'elle ne dépend pas de l'orientation choisie de la surface. Un changement d'orientation change W en $-W$ donc $\det W$ est inchangé.

Exemple : un plan affine dans $\mathbb{R}^3$ a un endomorphisme de Weingarten partout nul. On peut le gondoler de sorte que W ne soit plus nul : l'intersection avec des plans contenant la normale en un point p seront en général des courbes à courbure non nulle en p. Mais le déterminant de W restera partout nul, i.e. W aura partout une valeur propre nulle.

L'endomorphisme de Weingarten contient beaucoup d'autres informations. Ainsi, une surface est «minimale» (en gros, minimise l'aire comprise dans un contour tracé sur elle) si et seulement si $\operatorname{tr} W \equiv 0$.

Attention enfin, toutes ces notions et faits liés à la courbure n'ont de sens que si tous les objets : surfaces, applications, sont de classe C^2.

5 Et les surfaces vues globalement ?

La définition globale d'une surface (qu'on étudie ensuite uniquement localement) doit être connue.

C'est très simple : une surface est un ensemble $S \subset \mathbb{R}^3$ qui en tout point est localement une surface. Plus précisément : dont tout point p admet un voisinage V <u>dans $\mathbb{R}^3$</u> tel que $S \cap V$ est une surface au sens introduit page 2.

Exemple : si $F : V \to I$ est une submersion d'un ouvert V de $\mathbb{R}^3$ dans un ouvert I de $\mathbb{R}$, $F^{-1}(0)$ est une surface de $\mathbb{R}^3$ (théorème d'inversion locale).

Charles Boubel