Equations Différentielles

Exercice 1 Soit $N \subset \mathbb{R}^2$ un compact tel que $(0,0) \subset \mathrm{Int}(N)$. On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 définie par $f = y^2 - x^2$ sur $\mathbb{R}^2 - N$. Montrer que f possède au moins un point critique. Indication : On définit $z = (x, y)$ et étudie le flot du système $\dot{z} = \nabla f / ||\nabla f||^2$. Est-il complet ?

Exercice 2 1. Montrer que si y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes d'une équation linéaire du deuxième ordre, entre deux zéros consécutifs de y_1 il y a exactement un zéro de y_2.
2. Soit (E) l'équation $y'' + q(t)y = 0$, avec $q(t) \leq 0$ sur un intervalle $[t_1, t_2]$. Montrer qu'une solution non identiquement nulle de (E) s'annule au plus une fois sur $[t_1, t_2]$.
3. Soient deux équations (A) : $x'' + \phi(t)x = 0$ et (B) : $y'' + \psi(t)y = 0$. On suppose que $\phi \leq \psi$ sur un intervalle I. Montrer qu'entre deux zéros d'une solution non nulle de (A), toute solution de (B) s'annule au moins une fois.

Exercice 3 On se donne $a \in \mathbb{R}$ et $q \in C^1([a; +\infty[)$, $q > 0$. On suppose de plus que $\int_a^{+\infty} \sqrt{q(u)}du = +\infty$ et $q'(x) = o(q^{\frac{3}{2}}(x))$ lorsque $x \to +\infty$.
On considère une solution réelle non nulle de l'équation $y'' + qy = 0$ sur $[a; +\infty[$, et on note $N(x)$ le nombre de zéros de y sur $[a; x]$. Le but de l'exercice est de montrer l'équivalent :
$N(x) \sim \frac{1}{\pi} \int_a^x \sqrt{q(u)}du$ quand $x \to +\infty$.

1) On pose $\tau(x) = \int_a^x \sqrt{q(u)}du$. Montrer que τ est une bijection de $[a; +\infty[$ sur $[0; +\infty[$, et que si l'on pose $Y = y \circ \tau^{-1}$, on obtient une fonction C^2 sur $[a; +\infty[$.
2) Montrer que Y est solution d'une équation différentielle du type :
$Y''(t) + \phi(t)Y'(t) + Y(t) = 0$, $t \geq 0$.
3) Montrer qu'il existe deux fonctions r et θ dans $C^1([0, +\infty[)$ telles que $Y = r\sin(\theta)$ et $Y' = r\cos(\theta)$.
4) Montrer que l'on doit avoir $\theta' = 1 + \phi \sin\theta \cos\theta$ sur $[0, +\infty[$.
5) En déduire un équivalent à $\theta(t)$ lorsque $t \to +\infty$.
6) Conclure.
Une application : soit y une solution réelle non nulle de $y'' + e^{x^2}y = 0$ et $(x_n)_{n\geq 1}$ la suite de ses zéros positifs, en ordre croissant ; montrer que $x_n \sim \sqrt{2\log n}$ quand $n \to \infty$.

Exercice 4 Soit $a \in C^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$. On considère l'équation différentielle

$$y'' + a(x)y = 0\,. \qquad (E)$$

1. On suppose que $a(x)$ tend vers $+\infty$ en croissant quand $x \to +\infty$. Montrer alors que toutes les solutions de (E) sur $[0, +\infty[$ sont bornées.
2. Montrer que si toutes les solutions de (E) sont bornées, alors les solutions de

$$y'' + (a(x) + \epsilon(x))y = 0\,,$$

le sont aussi, dès que $\int_0^\infty |\epsilon(x)|dx < \infty$.
3. Soit $\epsilon \in C^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$ telle que $\epsilon(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$ et $\int_0^\infty |\epsilon'(x)|dx < \infty$. Montres que les solutions de

$$y'' + (1 + \epsilon(x))y = 0\,,$$

sont toutes bornées.

Exercice 5 À propos d'exercices sur les équations différentielles, soit $L \in \mathrm{End}(E, E)$ avec E un espace vectoriel réel de dimension finie. Montrer l'équivalence des deux points suivants.

(i) $\mathrm{Spec}(L) \subset i\mathbb{R}$ et $L_{\mathbb{C}}$ est diagonalisable.

(ii) E admet un produit scalaire pour lequel L est antiautoadjoint.

Exercice 6 On fixe $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit X le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$ défini par

$$X(x,y) = (y,-x) + (x^2+y^2-1)(1+\lambda x^2)(x,y)\,.$$

Montrer que $\phi_X^t(x,y)$ est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$ si $x^2+y^2 \leq 1$.

Exercice 7 Soit $L = \begin{pmatrix} ia & 0 \\ 0 & ib \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Soit $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Décrire l'orbite $\mathcal{O}(z)$ de z par le flot φ_t donné par l'équation $x' = Lx$. Plus précisément, montrer que, soit $\mathcal{O}(z)$ est périodique (à quelle condition ?), soit elle ne l'est pas et il existe deux cercles S_1 et S_2 de $\mathbb{C}$, que l'on indiquera, tels que $\overline{\mathcal{O}(z)} = S_1 \times S_2$. Décrire l'ensemble ω-limite $\omega(z) = \cap_{T \geqslant 0} \overline{\{\varphi_t(z); t \geqslant T\}}$ de z.

Exercice 8 Pour les quatre fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes, dire s'il y a, ou pas, existence et unicité (locale ? globale ?) des solutions de l'équation différentielle $x'(t) = f(x(t))$:

- **(i)** $f : x \mapsto \sqrt[3]{x}$,
- **(ii)** $f : x \mapsto -\sqrt[3]{x}$,
- **(iii)** $f : x \mapsto 1 + \sqrt{|x|}$ si $x \leqslant 0$ et $f \mapsto 1$ si $x > 0$,
- **(iv)** $f \mapsto x \ln|x|$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Exercice 9 Soit $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs C^1. Montrer que si : $\exists a, b \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}^n, \|X(x)\| \leqslant a\|x\| + b$, alors X est complet. Plus généralement, montrer que s'il existe $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ telle que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} = +\infty \quad \text{et :} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \|X(x)\| \leqslant f(\|x\|),$$

alors X est complet. Enfin, montrer que cette condition est optimale, c'est-à-dire que si $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ est telle que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} \quad \text{converge,}$$

alors il existe X non complet tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|X(x)\| \leqslant f(\|x\|)$.