Equations Différentielles. Sous-variétés.

Exercice 1 Soit (E) l'équation différentielle $y'' + ay' + b = 0$ dans I, intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, avec a et b fonctions localement lipschitziennes $I \to \mathbb{R}$. Comment et à quelles conditions peut-on ramener la résolution de (E) à celle d'une équation du type $z'' + cz = 0$ avec c une fonction que l'on précisera ?

Exercice 2 Soit X un champ de vecteurs C^1 jamais nul sur un ouvert $\mathcal{U}$ $\mathbb{R}^n$ et Γ une courbe C^1 partout tangente à X. Montrer que Γ admet un paramétrage $\gamma : I \to \mathcal{U}$ qui est solution de l'équation différentielle associée à X.

Exercice 3 Soit $\mathcal{C}_0 \subset \mathbb{R}^2$ le graphe de $x \mapsto x^3$ et, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{C}_a$ son translaté par le vecteur horizontal $(a, 0) \in \mathbb{R}^2$; $\mathcal{C}_a$ est le graphe de $x \mapsto (x - a)^3$. Existe-t-il un champ de vecteurs C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, jamais nul et partout tangent aux courbes $\mathcal{C}_a$?

Exercice 4 **a.** Soit X un champ C^1 sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ et $x \in C^2(I, \mathcal{U})$ une solution de X. On suppose que x est injective et est d'image fermée. Montrer que x est un plongement *i.e.* est un homéomorphisme sur son image.
Indications : supposons que x est «ouverte en un certain point $t_0 \in I$», c'est-à-dire que si V est voisinage de t_0 dans I, $x(V)$ est voisinage de $x(t_0)$ dans $x(I)$. Utilisez le fait que le flot φ_X de X agit transitivement sur $x(I)$ pour montrer qu'alors, x est ouverte en tous ses points, *i.e.* est ouverte. Enfin, utiliser le théorème de Baire pour montrer qu'en effet, il existe un point $t_0 \in I$ en lequel x est ouverte.

b. Soit $f \in C^2(I, \mathcal{U})$, injective et d'image fermée. Une telle application est-elle nécessairement ouverte ? Dans la négative, peut-elle n'être ouverte «en aucun de ses points», comme défini plus haut ? L'image de f est-elle une sous-variété de $\mathcal{U}$, toujours, parfois ? Dans chacun des éventuels cas de cette dernière question, est-elle une sous-variété de $\mathbb{R}^n$?

c. Soit X un champ C^1 sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$. Déduire de **a.** que toute orbite compacte de X est périodique et que toute orbite fermée, au sens «d'image fermée», est une sous-variété de $\mathcal{U}$.

d. Donner, si c'est possible, des exemples d'orbites de champ C^1 sur $\mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ qui sont :
• compactes et sous-variétés de $\mathcal{U}$,
• compactes et pas sous-variétés de $\mathcal{U}$,
• fermées non compactes et sous-variétés de $\mathcal{U}$,
• fermées non compactes et pas sous-variétés de $\mathcal{U}$,
• non fermées et sous-variétés de $\mathcal{U}$,
• non fermées et pas sous-variétés de $\mathcal{U}$.

Les éventuels cas impossibles peuvent-ils être réalisés comme images d'une immersion $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{U})$? D'une immersion injective $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{U})$?

Exercice 5 Soit X et Y deux champs C^1 sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$, strictement positivement colinéaires, *i.e.* tels que : $\forall x \in \mathcal{U}, \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^* : Y(x) = \lambda X(x)$. Soit $p \in \mathcal{U}$ et soit $x : I_p \to \mathcal{U}$ et $y : I'_p \to \mathcal{U}$ les solutions maximales de X et Y respectivement, telles que $x(0) = y(0) = p$.

Montrer qu'il existe un unique C^1-difféomorphisme $\theta_p : I'_p \to I_p$ tel que $y = x \circ \theta_p$. On pourra montrer qu'il existe une certaine immersion injective $\theta_p : J_p \to I_p$, où J_p est un intervalle inclus dans I'_p, telle que $y_{|J_p} = x \circ \theta_p$, puis que (J_p, θ_p) peut être tel que θ_p est surjective, et qu'alors $J_p = I'_p$. Montrer enfin que l'application $\Theta : (p, t) \mapsto \theta_p(t)$ est définie sur l'ouvert de définition du flot de Y et est de classe C^1.

Exercice 6 Donnez un exemple de champ de vecteurs v sur $\mathbb{R}^n$ de classe C^1, ayant en zéro un équilibre instable au sens de Liapounov, mais dont aucune des valeurs propres de la différentielle en zéro n'a une partie réelle strictement positive.

Exercice 7 Étudiez la stabilité et stabilité asymptotique en zéro, au sens de Liapounov, du champ v défini sur $\mathbb{R}^2$ par $v(x,y) = (y, -x^n)$.

Exercice 8 **a.** Soit M et N deux sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. Leur intersection $M \cap N$ est-elle une sous-variété de $\mathbb{R}^n$?
b. Soit M une sous-variété C^1 de $\mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et g la restriction de f à M. De quel espace vectoriel le graphe de g est-il susceptible d'être une sous-variété ? En est-il une ?

Exercice 9 Pour les différentes valeurs du champ $V \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ ou $V \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{R}^2)$, dire, éventuellement à l'aide de l'application de premier retour de Poincaré P associée, si l'orbite (périodique) du point $(1,0)$ est attractive ou répulsive.
a. $V(x,y) = \begin{pmatrix} (1 - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})x - y \\ (1 - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})y + x \end{pmatrix}$.
b. $V(x,y) = \begin{pmatrix} (ax + x^2)\ln(x^2+y^2) + y \\ (ay + xy)\ln(x^2+y^2) - x \end{pmatrix}$, avec a un réel.
c. $V(x,y) = \begin{pmatrix} (ax + x^2)(\ln(x^2+y^2))^2 - y \\ (ay + xy)(\ln(x^2+y^2))^2 + x \end{pmatrix}$, avec a un réel.

Exercice 10 Soit f une fonction propre et de classe C^2 de $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Soit $a < b$ deux réels. On suppose que $[a,b]$ ne contient pas de valeur critique de f. Montrer que $f^{-1}(a)$ est difféomorphe à $f^{-1}(b)$. On pourra utiliser le champ de vecteurs $\frac{1}{\|\operatorname{grad} f\|} \operatorname{grad} f$.

Exercice 11 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\langle f(x) - f(y), x - y \rangle \geq C\|x-y\|^2$. En utilisant l'équation différentielle $x' = -f(x)$, on va montrer que f est un homéomorphisme.
a. Soit x et y deux solutions. Montrer que $\|x(t) - y(t)\| \leq e^{-Ct}\|x(0) - y(0)\|$. En déduire que $\|x'(t)\| \leq e^{-Ct}\|x'(0)\|$.
b. Montrer que x est définie sur $\mathbb{R}^+$, et qu'elle tend vers une limite l vérifiant $f(l) = 0$.
c. En déduire que f est surjective. Montrer qu'elle est également injective, puis conclure.

Exercice 12 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
a. Soient v et w deux champs de vecteurs définis sur Ω, avec $||v - w|| \leq M$ et v K-lipschitzien. Soient x et y vérifiant $x' = v(x)$, $y' = w(y)$, et $x(0) = y(0)$. Montrer que $||x(t) - y(t)|| \leq \dfrac{M}{K}(e^{Kt} - 1)$.
b. Soit v un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ tel que si $||x|| = 1$, $\langle v(x), x \rangle < 0$. Montrer que si x solution de $x' = v(x)$ part de la boule fermée $\overline{B}(0,1)$, il y reste pour tout $t \geq 0$.
c. Montrer le même rêsultat si $\langle v(x), x \rangle \leq 0$ sur la sphère.