ENS Lyon | **Calcul différentiel 2** | **04/2006**
Département de Mathématiques | **TD 3**
et Informatique

Équations Différentielles.

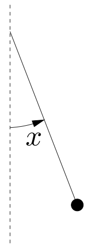
Exercice 1 Conjugaison C^k à un flot linéaire. a. Soit $X \in C^k(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ un champ de vecteurs sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ avec $k \geqslant 1$. On suppose que $X(x_0) = 0$ et $\mathrm{d}X(x_0) = A$ avec A non dégénérée, pour un $x_0 \in \mathcal{U}$. On suppose que h est un difféomorphisme $\mathcal{U} \to h(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$. Montrer que h conjugue le flot φ^t de X à celui de sa partie pie linéaire, i.e. $h(\varphi^t(x)) = e^{tA}.h(x)$ si et seulement si, sur $\mathcal{U}$, $\mathrm{d}h(x).X(x) = A.h(x)$.

b. Cas de la dimension un. On reprend comme en **a.** mais avec $n = 1$. Montrer qu'il existe un difféomorphisme h de classe C^k conjugant φ au flot de la partie linéaire de X.

c. En dimension plus grande, même lorsque A est hyperbolique, il n'y a pas toujours conjugaison C^k au flot linéarisé. En effet, dans $\mathbb{R}^2$, le flot φ^t de $X : (x, y) \mapsto (kx + y^k, y)$ n'est pas C^k conjugué au flot linéarisé. On va le montrer pour $k = 2$. On prend $X : (x, y) \mapsto (2x + y^r, y)$ et φ^t son flot. Supposons que h est un C^2-difféomorphisme réalisant une telle conjugaison. Montrer que $h(0) = 0$ et qu'on peut supposer que $\mathrm{d}h(0) = \mathrm{Id}$. Donner le flot de X, selon la valeur de l'entier $r \geqslant 2$.

Posons (a, b) les deux composantes de h. Écrire le fait que h conjugue φ^t au flot linéarisé. Écrire le développement limité en (x, y), à l'ordre deux en zéro, de cette égalité (en fait, uniquement la 1ère composante). Que se passe-t-il si $r = 2$? Conclure.

Exercice 2 Le pendule, l'équation de van der Pol. a. *Le pendule simple sans frottement.* Rappeler l'équation différentielle $f(x'', x) = 0$ sur l'angle x donnant le mouvement du pendule donné par la figure. Transformer cette équation en une équation d'ordre un à deux variable et tracer son portrait de phases,



en décrivant notamment les équilibres et leur stabilité. Mot-clé : i___´_____ p___`___. Faire le lien avec le mouvement physique du pendule : à quoi correspondent les équilibres et les différents types d'orbites ?

b. *Le pendule amorti.* On ajoute un terme de frottement proportionnel à la vitesse angulaire du pendule : $f(x'', x) + kx' = 0$. Quels sont les équilibres ? Au voisinage desquels d'entre eux le nouveau flot est-il conjugué à celui de sa partie linéaire ? Décrire le comportement du flot au voisinage des équilibres. mot-clé : f___˙___ d_ L________ (pour la trouver : faire un instant de physique). En déduire le portrait de phases —qu'on dessinera en surimpression d'une copie de celui du **a.** et en ayant compris à quoi sert cette consigne. Décrire notamment le comportement des orbites au voisinage des équilibres. Interpréter physiquement le résultat.

c. *L'équation de van der Pol.* Cette équation provient d'un système physique ressemblant à celui du pendule : un circuit électrique oscilant, LC ou RLC, modifié par remplacement de la résistance par un tube à vide. L'équation régissant l'intensité ou la tension aux bornes d'un composant est celle des oscillations harmoniques, $x'' + x = 0$ pour LC, ou des oscillations harmoniques amorties $x'' + kx' + x = 0$ pour RLC. Le terme kx' est le terme résistant. Remarquez que de petites oscillations du pendule de respectivement **a.** et **b.** y ressemblent car $\sin x = x + O(x^3)$. Si on remplace R par un tube à vide, composant à réponse non linéaire, fournissant du courant quand il est soumis à une tension faible et résistant au courant quand il est soumis à une tension forte (si j'ai bien compris), on obtient une équation, dite parfois équation différentielle de Rayleigh, du type :

$$x'' + (x'^2 - 1)x' + x = 0. \tag{1}$$

Le terme $x'^2 - 1$ en facteur de x' est négatif pour $|x'|$ petit et positif pour $|x'|$ grand, ce qui traduit le comportement du tube à vide. *C'est l'équation du devoir.* Comment en interprétez-vous alors physiquement le résultat ? Note : l'équation étudiée par Balthasar van der Pol, Utrecht 1889 −? 1959, est plutôt $z'' + a(z^2/b - 1)z' + \omega z = 0$. On retrouve (1) en posant $x' = z$.

Bonus culture. L'équation de van der Pol, peu d'explications, mais une simulation numérique paramétrable :
`www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Meca/Oscillateurs/vdp_phase.html`
`www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/equadiff/vanderpol.html`

Beaucoup d'équations physiques (dont van der Pol), surtout mécaniques, illustrées interactivement :
`http://www.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/meca/menumeca.html`

Le circuit électrique Tube à vide + C + L :
`http://people.deas.harvard.edu/~jones/ap216/lectures/ls_2/ls2_u6/vanderpol/vanderpol.html`
`http://www.math.duke.edu/education/ccp/materials/diffeq/vander/vand1.html`

Tout sur les tubes à vide :
`http://www.du.edu/~etuttle/electron/elect27.htm`

Exercice 3 Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Rappelons que le gradient ∇f de f est le vecteur tel que $g(\nabla f, \cdot\,) = \mathrm{d}f$, avec g le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit J la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. Le vecteur $J\nabla f$ vérifie une propriété semblable. C'est le vecteur tel que $\omega(J\nabla f, \cdot\,) = \mathrm{d}f$, avec cette fois ω la forme symplectique canonique de $\mathbb{R}^2$ i.e. la forme *antisymétrique* telle que $\omega(e_1, e_2) = 1$ (au signe près, exo-banane).

a. Montrer que $J\nabla f$ possède une intégrale première. Que peut-on donc dire de la stabilité de ses zéros ?

b. En s'inspirant du **a.**, montrer que les zéros de ∇f sont stables. Montrer que tout zéro isolé est asymptotiquement stable. Un zéro non isolé peut-il être asymptotiquement stable ? Soit x un point non critique de f i.e. tel que $\nabla f(x) \neq 0$, et φ^t le flot de ∇f. Montrer que, quand t tend vers la borne supérieure de l'intervalle maximal de définition de $t \mapsto \varphi^t(x)$, alors soit $f(\varphi^t(x)) \to +\infty$, soit $\varphi^t(x) \to x_0$ avec $\nabla f(x_0) = 0$.

c. Que sont les flots de ∇f et de $J\nabla f$ pour $f = x^2 + y^2$ le carré de la fonction rayon sur $\mathbb{R}^2$?