Sous-variétés

Exercice 1 Soit $\mathcal{U} = (\mathbb{R}_+^*)^3 \subset \mathbb{R}^3$ et f, g et h dans $C^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ définies par : $f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ et $h(x,y,z) = x - y - z$.
a. Montrer que $M = g^{-1}(0) \cap h^{-1}(0)$ est une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ?
b. Montrer que f admet un unique minimum sur M.

Exercice 2 Surfaces de révolution. a. Soit Γ une courbe tracée dans le plan $P = \{y = 0\} \subset \mathbb{R}^3$, *i.e.* une sous variété de dimension un de P. On suppose que Γ ne rencontre pas $D = \{x = y = 0\}$. On pose G le groupe des rotations d'axe D de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $S = G.\Gamma$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Déterminez par un repère ou une équation ou un paramétrage, le plan tangent à S en un quelconque de ses points.
b. On prend Γ le cercle $\{(x-2)^2 + z^2 = 1\} \subset P$. Donnez un paramétrage de $S = G.\Gamma$, plus précisément une immersion surjective $\mathbb{R}^2 \to S$, fournissant en tout point un «paramétrage local de sous-variété» de S. Donnez une équation de S.

Pour quels points $p \in S = G.\Gamma$ la surface S est-elle située d'un seul côté de son plan tangent T_pS ?

Exercice 3 Soit M une sous-variété différentielle de $\mathbb{R}^n$.
a. Montrer que M est connexe si et seulement si elle est connexe par arcs.
b. Montrer que si $\dim M \leqslant n-2$ alors $\mathbb{R}^n \setminus M$ est connexe.
c. La réciproque de **b.** est-elle vraie ? Montrer qu'elle l'est si M est supposée fermée.

Exercice 4 Soit M et N deux sous-variétés C^k de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ respectivement, $k \geqslant 1$. Montrer que $M \times N$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{m+n}$, dont on précisera la dimension.

Exercice 5 Pour chacun des ensembles suivants, dire si ce sont des sous-variétés C^k de $\mathbb{R}^n$, et pour quel plus grand k. Étudier leur connexité.
a. $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } x^2 + y^2 - x = 0\}$.
b. $M = \varphi(\mathbb{R}_-) \cup \psi(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}^2$ avec $\varphi : t \mapsto (t, t^2) \in \mathbb{R}^2$ et $\psi : t \mapsto (t, -t^2) \in \mathbb{R}^2$.
c. $M = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ B(x,x) = 0\}$ et $N = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ B(x,x) = 1\}$ avec B une forme bilinéaire symétrique.
d. $M = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \ / \ y^2 = \sin^2 x\} \subset \mathbb{R}^2$.
e. $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 = y^3\} \subset \mathbb{R}^2$.
f. $M = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \ / \ x^2 = y^3\} \subset \mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$.
g. $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \ / \ y = \sin \frac{1}{x}\} \subset \mathbb{R}^2$.
h. $M = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ (x \neq 0 \text{ et } y = \sin \frac{1}{x}) \text{ ou } (x = 0)\} \subset \mathbb{R}^2$.
i. $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y^2 + z^2 = x^2\} \subset \mathbb{R}^3$.

Exercice 6 Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donnée par $\varphi(u,v) = (u+v, u-v, 4uv)$. Montrer que $\varphi(\mathbb{R}^2)$ est une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^3$. En déduire que $\{(u \operatorname{ch} v, u \operatorname{sh} v, u^2) \ / \ (u,v) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}\}$ en est une aussi.

Exercice 7 On identifie l'espace $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n à $\mathbb{R}^{n^2}$. Montrer que ses sous-ensembles suivants en sont des sous-variétés C^∞. Donner leur espace tangent en chacun de leurs points.
a. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ \det M \neq 0\}$.
b. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ \det M = 1\}$.
c. $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ {}^tMM = \mathrm{Id}\}$.
d. L'ensemble des matrices de rang $p \leqslant n$.

Exercice 8 Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6$ donnée par $\varphi(x,y,z) = (x^2, t^2, z^2, yz\sqrt{2}, zx\sqrt{2}, xy\sqrt{2})$. Montrer que $M = \varphi(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^6$. En déduire que $M \cap \mathbb{S}^5$ est une sous-variété compacte de $\mathbb{R}^6$. C'est l'image du plongement de Véronèse du plan projectif réel.

Exercice 9 Soit $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ respectivement. Soit $g \in C^k(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, M une sous-variété C^k de $\mathcal{U}$ et N une sous-variété C^k de $\mathcal{V}$.
a. En général, $g^{-1}(N)$ est-elle une sous-variété de $\mathcal{U}$? Sinon, donner une condition simple sur g et N pour qu'elle le soit. Quelle est alors sa dimension ?
b. En général, $f(M)$ est-elle une sous-variété de $\mathcal{V}$? Sinon, donner une condition simple sur f et M pour qu'elle le soit. Quelle est alors sa dimension ?