Master 1, Géométrie septembre 2005
2005/2006 1er semestre

T.D. - feuille 1

Variétés différentielles.

1. Montrez que les ensembles suivants sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^k$ pour un certain k. Donnez leur dimension. Comment peut-on en obtenir un atlas ? (La construction explicite d'un atlas n'est pas demandée).

a) La sphère unité euclidienne $\mathbb{S}^n$ de $\mathbb{R}^{n+1}$.

b) Les groupes linéaires $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

c) Le groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Comme il est une sous-variété de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, ses espaces tangents s'identifient canoniquement à des sous-espaces vectoriels de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. A qui s'identifie $\mathrm{T}_{\mathrm{Id}}\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$? $\mathrm{T}_g\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$?

d) Le groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Même question qu'au c).

e) Le groupe unitaire $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$. Même question qu'au c).

f) Le groupe spécial unitaire $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$. Même question qu'au c).

g) Le groupe des matrices carrées d'ordre n triangulaires supérieures.

2. Montrez que la C^r équivalence sur l'ensemble des atlas d'une variété différentielle M est une relation d'équivalence.

3. Les espaces ci-dessous sont naturellement munis d'une structure de variété différentielle C^∞. Montrez-le en en donnant un atlas.

a) L'espace projectif réel de dimension n, $\mathbb{RP}^n$. C'est l'espace des droites vectorielles de $\mathbb{R}^{n+1}$: $\mathbb{RP}^n = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$, où $x \sim y$ si et seulement si x et y sont colinéaires.

b) $\mathbb{CP}^n$, l'espace projectif complexe de dimension n, par définition espace des droites vectorielles complexes de $\mathbb{C}^{n+1}$.

c) Le tore de dimension n, $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

d) L'ensemble des droites affines du plan $\mathbb{R}^2$. Quelle est sa dimension ?

e) L'ensemble des plans affines de l'espace $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ?

f) L'ensemble des droites affines de l'espace $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ?

g) Le ruban de Möbius $\mathrm{R} = ([0,1] \times \mathbb{R})/\sim$ où la relation $\sim$ identifie les couples $(0,x)$ et $(1,-x)$.

4. a) On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^4$ donnée par : $f(\alpha,\beta) = (\cos\alpha, \sin\alpha, \cos\beta, \sin\beta)$. Prouvez que f fournit un difféomorphisme $\hat{f}$ de $\mathbb{R}^2/(2\pi\mathbb{Z})^2$ sur $f(\mathbb{R}^2)$.

D'autre part, donnez un atlas de variété produit de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Montrez que cette variété est difféomorphe à $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

b) On considère l'application g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par : $g(\alpha,\beta) = ((2+\cos\alpha)\cos\beta, (2+\cos\alpha)\sin\beta, \sin\alpha)$. Prouvez que g fournit un difféomorphisme $\hat{g}$ de $\mathbb{R}^2/(2\pi\mathbb{Z})^2$ sur $g(\mathbb{R}^2)$.

5. Retour sur l'exercice 3.

a) Dans cet exercice, la variété du **3 d)** est difféomorphe à celle d'un autre point. Lequel ? Exhibez un difféomorphisme.

b) L'espace projectif réel $\mathbb{RP}^2$ contient une sous-variété difféomorphe à $\mathbb{S}^1$, qui le sépare en deux ouverts : l'un difféomorphe à $\mathbb{R}^2$, l'autre à la variété dont il est question au **a)** ci-dessus. Exhibez ces objets : la sous-variété, les ouverts, les difféomorphismes. On pourra également faire un dessin. *Remarque :* $\mathbb{RP}^2$ peut aussi être vu comme la sphère $\mathbb{S}^2$ quotientée par antipodie.

c) La droite projective complexe $\mathbb{CP}^1$ est, elle, difféomorphe à $\mathbb{S}^2$. Exhibez un difféomorphisme.

6. **a)** Montrez qu'il n'y a pas d'immersion de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{R}$.

b) Soit f une immersion de M dans N, deux variétés de même dimension. Montrez que f est ouverte. Déduisez-en qu'il n'y a pas d'immersion de $\mathbb{S}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

7. Une immersion $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ est appelée *plongement* si elle est un homéomorphisme sur son image.

a) Montrez que si f est un plongement, $f(\mathrm{M})$ est une sous-variété de N. Ce n'est pas nécessairement le cas si f n'est pas un plongement, donnez un exemple.

b) Prouvez qu'une immersion propre et injective est un plongement.

c) Donnez des exemples de plongements impropres, des exemples d'immersions injectives dont l'image n'est pas une sous-variété, certaines d'image compacte ou dense, et des exemples d'immersions propres dont l'image n'est pas une sous-variété.

8. Encore un retour sur l'exercice 3. Montrez que la variété du **3 d)** admet une structure de fibré vectoriel (en droites) sur le cercle $\mathbb{S}^1$. Montrez que ce fibré n'est pas trivial, c'est-à-dire que la variété n'est pas difféomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.