Master 1, Géométrie octobre 2005
2005/2006 1er semestre

T.D. - feuille 2

Variétés différentielles. Orientation. Revêtements. Fibrés vectoriels.

1. On a vu que l'espace des droites affines de $\mathbb{R}^2$ est difféomorphe au ruban de Möbius. Qu'en est-il de l'espace des droites projectives de $\mathbb{RP}^2$? Plus généralement, des hyperplans projectifs de $\mathbb{RP}^n$? D'autre part, à quoi est difféomorphe l'espace $\mathbb{RP}^n$ privé de l'un de ses hyperplans projectifs ?

2. On dit qu'une variété $\mathcal{M}$ est *orientable* si elle admet un atlas $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ tel que les changements de carte $\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j$ sont de jacobien *positif.* Une *orientation* de $\mathcal{M}$ est alors le choix d'un tel atlas (et de tous les atlas dont la réunion avec le premier garde la même propriété). Une variété orientable admet deux orientations.

a) Montrez que le ruban de Möbius n'est pas orientable.

b) Montrez que $\mathbb{RP}^2$ non plus.

c) Soit $\mathcal{M}$ une variété orientable et $\mathcal{N}$ une sous-variété. On appelle champ de vecteurs le long de $\mathcal{N}$, transverse à $\mathcal{N}$, une application C^∞ de $\mathcal{N}$ dans $\mathrm{T}\mathcal{M}$ qui à chaque élément p de $\mathcal{N}$ associe un vecteur X_p de $\mathrm{T}_p\mathcal{M}$, transverse à $\mathrm{T}_p\mathcal{N}$.

Montrez que si $\mathcal{N}$ est de codimension un et admet un champ de vecteurs transverse, $\mathcal{N}$ est orientable. Est-ce toujours vrai si $\mathcal{M}$ n'est pas orientable ?

d) Si $\mathcal{M}$ est une variété, montrez que la variété $\mathrm{T}\mathcal{M}$ est orientable.

e) Pourquoi le fibré tangent d'une surface (variété de dimension deux) orientable est-il trivial dès qu'il admet *une* section jamais nulle ? Est-ce vrai si la surface n'est pas orientable ?

3. Montrez qu'un fibré vectoriel à fibre de dimension k est trivial *ssi* il admet k sections dont les images dans chaque fibre sont linéairement indépendantes.

4. Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux variétés C^k et f une application C^k de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$.

Définition f est un *revêtement* si f est surjective et si tout y de $\mathcal{N}$ admet un voisinage V t.q. : $f^{-1}(V) = \cup_{i\in I} U_i$ avec pour tout i, $f_{|U_i}$ est un C^k-difféomorphisme de U_i dans V.

a) Montrez que l'application de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ dans l'espace Δ des droites affines de $\mathbb{R}^2$, construite lors des exercices de la feuille 1, est un revêtement. Montrez que la projection canonique $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n/\{\pm \mathrm{Id}\}$ ($\simeq \mathbb{RP}^n$) en est aussi un.

b) Etant donnée une variété $\mathcal{N}$, une manière de construire une variété $\mathcal{M}$ et un revêtement $\mathcal{N} \to \mathcal{M}$ est de considérer la projection canonique $\mathcal{N} \to \mathcal{N}/G$ où G est un groupe convenable de difféomorphismes de $\mathcal{N}$. Identifiez le groupe tel que $\Delta = (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})/G$.

Donnons un sens précis au terme «convenable». Soit G un groupe topologique agissant continûment sur un espace topologique E, c'est-à-dire que l'application $(g, x) \mapsto g.x$ de $G \times E$ dans E est continue. On note e l'élément neutre de G.

Définition Un point de E est dit G-errant s'il admet un voisinage U disjoint de toutes ses images : $(G \setminus \{e\}).U \cap U = \emptyset$.

Si G est un sous-groupe des difféomorphismes d'une variété $\mathcal{N}$, vérifiez que la projection $\mathcal{N} \to \mathcal{N}/G$ est un homéomorphisme local *ssi* tout point de $\mathcal{N}$ est G-errant. Ceci munit $\mathcal{N}/G$ d'une structure de variété topologique (comment ?). Vérifiez que, comme $\mathcal{N}$ est en outre une variété différentielle, $\mathcal{N}/G$ est de surcroît muni d'un atlas de variété différentielle.

c) Quelque chose cloche dans le **b)**, bien que tous les faits montrés soient *vrais*. Montrez quoi en considérant l'exemple $\mathcal{N} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et $G = \{(x, y) \mapsto (2^n x, 2^{-n} y),\ n \in \mathbb{Z}\}$.

d) Soit encore G un groupe topologique agissant continûment sur E espace topologique.

Définition G agit *proprement* si, pour tout compact K de E, $\{g \in G/g.K \cap K \neq \emptyset\}$ est un compact de G.

Montrez que, si G agit proprement, l'espace quotient E/G est séparé.

Montrez que, si l'action de G est errante (je la qualifie ainsi si tous les points de E sont G-errants), alors G agit proprement si et seulement si E/G est séparé.

Ceci amène à introduire les

Définition L'action de G sur E est *proprement discontinue* si, pour tout compact K de E, $\{g \in G/g.K \cap K \neq \emptyset\}$ est une partie finie de G.

Définition L'action de G sur E est *libre* si : $\forall x \in E, \forall g \in G \setminus \{e\}, g.x \neq x$.

Vérifiez que sont alors équivalents :
- l'action est errante et propre,
- l'action est errante et E/G est séparé,
- l'action est errante et pour tous x et y de E avec $y \notin G.x$, il existe un voisinage U de x et un voisinage V de y tels que : $G.U \cap V = \emptyset$,
- l'action est proprement discontinue et libre.

Montrez que si un groupe G de difféomorphismes C^k de $\mathcal{M}$ une variété C^k agit de manière libre et proprement discontinue, alors $\mathcal{M}/G$ admet une et une seule structure de variété C^k telle que la projection $\mathcal{M} \to \mathcal{M}/G$ est un revêtement.

Dernière remarque pour la route On a vu qu'une action propre est à quotient séparé. La réciproque est *fausse*. Regardez l'action du groupe affine $\mathrm{GA}(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}$. En quoi est-elle un contre-exemple ?

5. Sur le principe de la construction fonctorielle générale vue en cours de fibrés associés à un fibré donné, construisons quelques fibrés classiques associés au fibré tangent.

a) Rappelez la définition du fibré tangent : qu'est-il, «ensemblistement», quelle est sa topologie, quel atlas définit sa structure différentielle ? Vérifiez que cet atlas est bien un atlas de fibré vectoriel.

b) Semblablement, définissez le fibré cotangent $\mathrm{T}^*\mathcal{M}$ d'une variété $\mathcal{M}$, c'est-à-dire le fibré dont chaque fibre au-dessus de $p \in \mathcal{M}$ est l'espace des formes linéaires sur $\mathrm{T}_p\mathcal{M}$. C'est le fibré des formes différentielles sur $\mathcal{M}$. Comment agissent les changements de carte sur la partie «fibre» ?

c) Faites semblablement avec le fibré $\mathrm{S}^2\mathrm{T}^*\mathcal{M}$ des formes bilinéaires symétriques sur $\mathcal{M}$ et avec le fibré $\otimes^2\mathrm{T}\mathcal{M}$ des 2-tenseurs sur $\mathrm{T}\mathcal{M}$.

d) Soit une variété $\mathcal{M}$ de dimension n munie d'une métrique riemannienne g et $(U_i, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ un atlas de $\mathcal{M}$. Lue dans la carte induite de $\mathrm{S}^2\mathrm{T}^*\mathcal{M}$, la métrique g est un champ de matrices $(g^\alpha_{i,j})^n_{i,j=1}$ sur $\varphi_\alpha(U_\alpha)$. Que veut dire cette dernière phrase, *i.e.* si $p \in U_\alpha$ et $u, v \in \mathrm{T}_p\mathcal{M}$, quelle est l'expression de $g(u, v)$ à l'aide des $(g^\alpha_{i,j})$?

Les champs de matrices *inverses*, $((g^\alpha_{i,j})^n_{i,j=1})^{-1}$, défini dans chaque carte, définissent-ils un objet sur la variété ? Si oui, lequel ?

6. La sphère euclidienne $\mathbb{S}^3$ peut être vue comme la sphère unité du corps non commutatif des quaternions. Elle est alors un sous-groupe de $\mathbb{H}^*$, comme les complexes de module 1 sont un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$. Quel est alors $\mathrm{T}_1\mathbb{S}^3$? Plus généralement si $z \in \mathbb{S}^3$, $\mathrm{T}_z\mathbb{S}^3$? Déduisez-en que le fibré tangent $\mathrm{T}\mathbb{S}^3$ de $\mathbb{S}^3$ est trivial.