Master 1, Géométrie octobre 2005
2005/2006 1er semestre

T.D. - feuille 3

Encore un peu de fibrés vectoriels. Métriques riemanniennes. Distance associée. Connexions, connexion de Levi-Civita. Géodésiques.

1. Soit $k \geqslant 1$ et soit E et F deux fibrés vectoriels de classe C^k au-dessus d'une variété différentielle M de classe C^k. Sur le modèle de la construction du fibré tangent d'une variété, onstruire le fibré $\mathrm{Hom}(E, F)$.

2. Soit $k \geqslant 1$ et soit E et F deux fibrés vectoriels de classe C^k au-dessus d'une variété différentielle M de classe C^k. Soit $f : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ une application linéaire entre les espaces de sections C^k de E et F. Montrer l'équivalence des deux propriétés :

(i) f est $C^k(M)$-linéaire.

(ii) f est une section de $\mathrm{Hom}(E, F)$.

3. Sur la sphère $\mathbb{S}^n$ munie de la métrique induite par celle de $\mathbb{R}^n$, quelle est la longueur d'un arc de grand cercle d'angle au centre $\alpha \in [0, 2\pi]$?

4. Sur une variété riemannienne $(\mathcal{M}, g)$, la distance $d(p, q)$ de deux points p et q est définie comme la borne inférieure des longueurs des chemins C^1 par morceaux joignant p à q. Cette borne est-elle toujours atteinte ? Toujours localement atteinte (*i.e.* si p et q sont suffisamment proches) ? Pourquoi ?

5. Dans l'espace euclidien de dimension n, quel est le plus court chemin d'un point à un autre ?

6. L'espace projectif $\mathbb{RP}^n$ est muni d'une métrique riemannienne canonique, induite par celle de $\mathbb{S}^n$. Laquelle et pourquoi ?

7. On note dans cet exercice (x, y, z) les coordonnées canoniques de $\mathbb{R}^3$. La surface C engendrée par la rotation autour de l'axe (Oz) de la courbe d'équation $\begin{cases} x = \mathrm{ch}\, z \\ y = 0 \end{cases}$ est appelée *caténoïde*. D'autre part, en notant, pour $t \in \mathbb{R}$, $P(t)$ le point $(\cos t, \sin t, t)$, $Q(t)$ le point $(0, 0, t)$ et $\mathcal{D}(t)$ la droite $(P(t)Q(t))$, la surface : $\cup_{t \in \mathbb{R}} \mathcal{D}(t)$ est appelée *hélicoïde.*

a) Vérifiez que C et H sont deux sous-variétés et donnez-en un paramétrage naturel.

b) Montrez que C et H, munies de leur métrique induite par celle de $\mathbb{R}^3$, sont localement isométriques (on pourra par exemple exprimer ces métriques induites dans le champ de bases de $\mathrm{T}C$ et $\mathrm{T}H$ fourni par les paramétrages). Ces isométries locales peuvent-elles se prolonger, toujours localement, en isométries de $\mathbb{R}^3$? Pourquoi ? Enfin, la caténoïde et l'hélicoïde sont-elles globalement isométriques ?

8. Les tores $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{R}^2/(2\pi\mathbb{Z})^2$ et $\mathbb{R}^2/(\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b)$ où $a = (1, 0)$ et $b = (1, 1)$ sont-ils difféomorphes ? Pourquoi ? Par ailleurs, la métrique euclidienne canonique de $\mathbb{R}^2$ induit une métrique sur chacun de ces tores : comment ? Ces tores sont-ils alors localement isométriques ? isométriques ? Plus précisément, à quelle condition deux tores $\mathbb{R}^2/(\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b)$ et $\mathbb{R}^2/(\mathbb{Z}a' + \mathbb{Z}b')$, où (a, b) et (a', b') sont deux bases de $\mathbb{R}^2$, sont-ils isométriques ?

9. a) L'exercice **4. b)** de la feuille 1 donne un plongement du tore $\mathbb{R}^2/(2\pi\mathbb{Z}^2)$ dans $\mathbb{R}^4$ et un paramétrage

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & & \mathbb{R}^4 \\ (\alpha, \beta) & \mapsto & f(\alpha, \beta) \end{array}$$

de l'image de ce plongement. Notons D la connexion de Levi-Civita de $f(\mathbb{R}^2)$ muni de la métrique induite par la métrique euclidienne canonique de $\mathbb{R}^4$. Calculer $[\frac{\partial}{\partial\alpha}, \frac{\partial}{\partial\beta}]$, $D_{\frac{\partial}{\partial\alpha}} \frac{\partial}{\partial\beta}$, $D_{\frac{\partial}{\partial\beta}} \frac{\partial}{\partial\alpha}$, $D_{\frac{\partial}{\partial\alpha}} \frac{\partial}{\partial\alpha}$ et $D_{\frac{\partial}{\partial\beta}} \frac{\partial}{\partial\beta}$.

b) Le **c)** du même exercice **4** de la feuille 1 donne également un plongement du tore $\mathbb{R}^2/(2\pi\mathbb{Z}^2)$ dans $\mathbb{R}^3$ et un paramétrage

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & & \mathbb{R}^3 \\ (\alpha, \beta) & \mapsto & g(\alpha, \beta) \end{array}$$

de l'image de ce plongement. On peut alors demander le même calcul qu'au **a)** ci-dessus, ce que cet exercice n'hésite pas à faire.

c) Soit D la connexion de Levi-Civita de $\mathbb{R}^2$ muni de sa métrique euclidienne canonique et soit A et B les champs de vecteurs définis sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ par : $A(x, y) = (-y, x)$ et $B(x, y) = \frac{1}{r}(x, y)$ où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Calculez $[A, B]$, $D_A B$, $D_B A$, $D_A A$ et $D_B B$. *Note :* il n'est pas interdit de reconnaître A et B.

10. Vous avez vu que la connexion de Levi-Civita d'une variété riemannienne $(\mathcal{M}, g)$ induit un transport parallèle des vecteurs le long des chemins C^1 par morceaux. Réciproquement, la donnée de ce transport parallèle permet de retrouver la connexion.

Soit en effet deux champs de vecteurs X et Y sur $\mathcal{M}$ et γ une ligne de champ de X, *i.e.* une courbe telle que, pour tout t de son intervalle de définition, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\gamma(s))_{|t} = X(\gamma(t))$. Notons τ_s le transport parallèle le long de $\gamma_{|[t,s]}$, c'est-à-dire l'application de $\mathrm{T}_{\gamma(t)}\mathcal{M}$ dans $\mathrm{T}_{\gamma(s)}\mathcal{M}$ qui a un vecteur V de $\mathrm{T}_{\gamma(t)}\mathcal{M}$ associe $\tau_s(V)$ la valeur en $\gamma(s)$ du transporté parallèle de V le long de γ.

Montrez : $(D_X Y)_{|\gamma(t)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\tau_s^{-1}(Y(\gamma(s)))\right)_{|t}$.

11. a) Si deux sous-variétés $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ d'une variété riemannienne $(\mathcal{M}, g)$, munies de la métrique induite par g, sont tangentes le long d'une courbe γ, que pouvez-vous dire des transports parallèles τ_i dans chaque $\mathcal{N}_i$, le long de γ ?

b) Par un argument géométrique simple, décrivez, sur un cône de révolution de $\mathbb{R}^3$, le transport parallèle le long d'un cercle intersection du cône avec un plan orthogonal à son axe.

c) Décrivez le transport parallèle le long d'un cercle tracé sur $\mathbb{S}^2$ muni de sa métrique canonique ; plus précisément, si p est un point de ce cercle, donnez l'image d'un vecteur de $\mathrm{T}_p\mathbb{S}^1$ «après un tour de transport parallèle» le long du cercle.

12. Que sont les géodésiques de $\mathbb{R}^n$ muni de sa métrique euclidienne canonique ?

13. Soit $\mathcal{N}$ une sous-variété riemannienne d'une variété riemannienne $(\mathcal{M}, g)$. Caractérisez, parmi les courbes tracées sur $\mathcal{N}$, les géodésiques de $\mathcal{N}$, par une condition sur leur accélération.

14. Soit $(\mathcal{M}, g)$ une variété riemannienne. Prouvez que le transport parallèle le long de tout chemin tracé sur $\mathcal{M}$ préserve le produit scalaire ; si $\mathcal{M}$ est de surcroît orientable et orientée, prouvez qu'il préserve l'orientation.

Si $\dim \mathcal{M} = 2$, qu'est le transport parallèle le long des *géodésiques* de $(\mathcal{M}, g)$?

15. Un peu de géométrie hyperbolique : notons $(H, g) = \left(\{z \in \mathbb{C}/\Im z > 0\}, \frac{1}{(\Im z)^2} g_{\text{eucl}}\right)$ le demi-plan de Poincaré muni de sa métrique hyperbolique canonique. Le but de cet exercice est de décrire, par deux méthodes, les géodésiques de (H, g).

a) Montrez le lemme suivant : si une courbe γ tracée sur une variété riemannienne $(\mathcal{M}, g)$ est l'ensemble des points invariants par une isométrie de $(\mathcal{M}, g)$, elle est une géodésique.

D'autre part, que pouvez-vous dire de l'image d'une géodésique par une isométrie ?

b) $GL_2(\mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{C}$ par homographies $G : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ où $G = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Quel sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$ agit isométriquement sur (H, g) ? En remarquant que $z \mapsto -\overline{z}$ est également une isométrie de (H, g) et en utilisant **a)**, dégagez une famille de géodésiques. Pour décrire cette famille, on peut par exemple observer l'action des homographies sur les équations des cercles et des droites. Rappelez vous aussi par exemple que les applications holomorphes sont conformes, *i.e.* que leur différentielle préserve les angles (Pourquoi ?). Par un argument d'unicité, concluez : quels sont les supports des géodésiques de (H, g) ?

c) Allons-y par le calcul. Inconvénient : c'est plus fatigant. Avantage : on obtient les géodésiques *avec leur paramétrage de géodésiques*. Calculez les $D_{e_i} e_j$, où les e_i sont les vecteurs de la base canonique de chaque espace tangent, et les coefficients de Christoffel. Montrez que les courbes $t \mapsto (x, e^{at})$ sont des géodésiques.

d) Quelles sont les géodésiques de $(\mathcal{M}, g)$, avec leur paramétrage ?

16. Soit $(\mathcal{M}, g)$ une surface de révolution de $\mathbb{R}^3$, munie de la métrique induite par la métrique euclidienne canonique de $\mathbb{R}^3$; autrement dit, $\mathcal{M}$ est la surface obtenue par rotation autour de l'axe (Oz) d'une courbe $u \mapsto (r(u), 0, z(u))$, qu'on suppose en outre paramétrée par sa longueur d'arc.

a) Que veut dire «paramétrée par sa longueur d'arc» ? Donnez le paramétrage naturel $(u, \theta) \mapsto f(u, \theta)$ de $\mathcal{M}$ et donnez sa métrique g «exprimée dans ce paramétrage».

b) Montrez que les géodésiques de $(\mathcal{M}, g)$ sont :

(i) les méridiens, *i.e.* les courbes inscrites dans un plan contenant (Oz),

(ii) les parallèles, *i.e.* les courbes de coordonnée z constante, s'ils vérifient $r'(u) = 0$,

(iii) les courbes $(u(t), \theta(t))$ qui, paramétrées par la longueur d'arc, satisfont :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t})^2 + r^2(u(t))(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t})^2 = 1 \\ r^2(u(t))\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = C \end{array} \right. ,$$

où C est une constante.

Comment se comportent les géodésiques de $(\mathcal{M}, g)$?