Master 1, Géométrie
2005/2006

décembre 2005

T.D. - feuille 4

La longue droite.

Le but de cette feuille est de construire (en utilisant l'axiome du choix) une variété différentielle de dimension un *non σ-compacte*, puis de dégager quelques-unes de ses propriétés.

Cette construction repose sur un préliminaire, la définition des ordinaux. Pour être établie correctement —et éviter par exemple le paradoxe de Russel—, cette définition doit l'être dans un cadre propre de théorie des ensembles ; elle est alors une construction simple mais subtile utilisant les quatre premiers axiomes de l'axiomatique de Zermelo-Fraenkel.

La présentation ci-dessous, tirée de J.-L. Krivine, *Théorie axiomatique des ensembles*, est présentée dans une syntaxe plus usuelle et un tout petit peu moins rigoureuse. La construction de la longue droite est ensuite tirée de M. Spivak, *Differential Geometry*, volume un, annexe A.

Relations entre ensembles, relations d'ordre Ce préliminaire a pour seul but de montrer que la notion de relation entre les ensembles se définit sans que le domaine de cette relation soit nécessairement un ensemble.

Les relations, à un nombre quelconque d'arguments (qui sont des ensembles), sont construites à partir des deux relations binaires $=$ et $\in$, par application, un certain nombre de fois, des règles suivantes :

$*$ substitution de constantes à des variables, exemple : si a est un ensemble et $R(x, y, z)$ est une relation (ternaire) en les variables x y et z, $R(a, x, y)$ est une relation (binaire) en les variables x et y,

$*$ répétition de variables, exemple : si $R(x, y, z)$ est une relation (ternaire) en les variables x y et z, $R(x, x, y)$ est une relation (binaire) en les variables x et y,

$*$ négation d'une relation (non R) et relation «R ou R'»

$*$ si R est une relation, création de la relation $\exists y R(\ldots, y, \ldots)$ où $R(\ldots, y, \ldots)$ est la relation R, où y a pris la place d'un des arguments de R.

On définit ensuite par exemple la relation «P et Q» par «non(non P ou non Q)», la relation $P \Rightarrow Q$ (Comment ?)...

Une «collection» est une relation à un argument. Exemples : «il existe une injection de x dans $\mathbb{N}$», collection des ensembles dénombrables, «il existe une injection de x dans l'ensemble x privé d'un de ses éléments», collection des ensembles infinis...

Une relation d'ordre (ici toujours *stricte*) est une relation binaire R sur un domaine (une collection) D vérifiant :
$*$ $R(x, y) \Rightarrow D(x)$ et $D(y)$,
$*$ non $(R(x, y)$ et $R(y, x))$
$*$ $(R(x, y)$ et $R(y, z)) \Rightarrow R(x, z)$
On notera alors $R(a, b)$ sous la forme $a < b$. La relation est dite d'ordre total si de plus : $(x \in D$ et $y \in D) \Rightarrow x < y$ ou $y < x$ ou $x = y$.

Axiomes Rappelons les quatre premiers axiomes de l'axiomatique de Zermelo-Fraenkel.

E − Extensionnalité Si a et b ont mêmes éléments, $a = b$.

U – Réunion Si a est un ensemble, alors «$\cup_{x \in a} x$», la collection des éléments appartenant à l'un des éléments de a, est un ensemble. Attention, il ne s'agit pas de $\cup_{x \in a}\{x\}$, qui est l'ensemble a. Exemple : si $a = \{\{1,2\},\{2\},\{3\},\emptyset\}$, $\cup_{x \in a} x = \{1,2\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \emptyset = \{1,2,3\}$.

P – Puissance Si a est un ensemble, la collection $\mathcal{P}(a)$ des sous-ensembles (parties) de a est un ensemble.

S – Substitution Si $P(x)$ est un énoncé dépendant de la variable x et a un ensemble, la collection des x de a vérifiant $P(x)$ est un ensemble, noté alors $\{x \in a / P(x)\}$. Exemple : cet axiome, avec **U**, permet de définir le produit cartésien de deux ensembles, par : $a \times b = \{x \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b)) / \exists p \in a, \exists q \in b : x = \{\{p\},\{p,q\}\}\}$.

Tout est prêt, on peut y aller !

Définition L'ensemble a est dit *transitif* si : $\forall x \in a, x \subset a$.

Définition Un *ensemble* a est dit *bien ordonné* par une relation d'ordre $<$ si tous les éléments de a sont dans le domaine D de $<$, *i.e.* $x \in a \Rightarrow D(x)$, et si toute partie non vide de $(a, <)$ admet un plus petit élément. *Rq. :* en particulier l'ordre induit sur a est total.

Une *relation d'ordre* $<$ est dite *de bon ordre* si elle est d'ordre total et si pour tout x de son domaine, la collection des y tels que $y < x$ est un ensemble, bien ordonné par $<$.

Remarque Toute sous-collection non vide du domaine D d'une relation de bon ordre admet donc un plus petit élément.

Définition Un *segment initial* d'un ens. ordonné $(a, <)$ est une partie S de a telle que : $(x \in S$ et $y < x) \Rightarrow y \in S$.

Proposition Si$(a, <)$ est bien ordonné, ses segments initiaux sont a et les $S_x = \{y \in a / y < x\}$.

Définition Un ordinal est un ensemble transitif bien ordonné par $\in$ restreinte à lui-même (*i.e.* sur les éléments duquel la relation $\in$ est un bon ordre). *Jeu :* proposez quelques ordinaux simples.

Proposition Soit a un ordinal. Les segments initiaux de a sont a et ses éléments.

Proposition Soit a un ordinal. Si $b \in a$, b est un ordinal.

Proposition Soit a un ordinal. Alors $a \notin a$.

Proposition Soit a et b des ordinaux. Alors $a = b$ ou $b \in a$ ou $a \in b$.

Proposition La relation $\in$ restreinte à la collection des ordinaux est un bon ordre.

Remarque Soit a et b des ordinaux. Notons $a \leq b$ la relation «$a < b$ ou $a = b$». Alors $a \leq b \Leftrightarrow a \subset b$.

Remarque La collection $\mathcal{O}$ des ordinaux *n*'est *pas* un ensemble. Si en effet $\mathcal{O}$ est un ensemble a, alors a est bien ordonné par $\in$. D'autre part : $x \in a \Rightarrow x$ ordinal $\Rightarrow x \subset a$, donc a est transitif. Donc a est un ordinal, donc $a \in a$, donc a n'est pas un ordinal. C'est absurde.

Proposition/Définition Soit a un ordinal. Le plus petit ordinal supérieur à a est : $a \cup \{a\}$. Il est noté $a + 1$ et appelé *successeur* de a.

Remarque/Définition Certains ordinaux non vides ne sont le successeur d'aucun ordinal. On les appelle *ordinaux limite*.

Proposition Soit b un ensemble d'ordinaux. Alors : $\cup_{a \in b} a$ est la borne supérieure de b *i.e.* : $\cup_{a \in b} a$ est un ordinal, le plus petit majorant de b dans $\mathcal{O}$ ordonné par $\in$.

Théorème 1 Soit a et b des ordinaux. S'il existe une bijection croissante, pour $\in$, de a dans b, $a = b$.

Théorème 2 Si $(a, <)$ est un ensemble bien ordonné, il existe un et un seul couple (b, f) où b est un ordinal et f une bijection croissante de $(a, <)$ dans $(b, \in)$.

Proposition Si a est un ordinal limite dénombrable (*i.e.* en bijection avec $\mathbb{N}$), alors il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in a^{\mathbb{N}}$ d'ordinaux appartenant à a et tendant vers a.

Proposition *importante pour la suite.* Soit a un ordinal dénombrable ; on note $<$ l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$. Il existe une partie $(D, <)$ de $(\mathbb{R}, <)$ en bijection croissante avec $(a, \in)$.

Les deux théorèmes et la dernière proposition se démontrent par induction : pour montrer que les éléments x d'un ensemble bien ordonné a vérifient une propriété $P(x)$ telle que : $(\forall y < x,\ P(y)) \Rightarrow P(x)$, on considère le plus petit élément de $\{x \in a / \text{non } P(x)\}$...

Construisons à présent la longue droite. Par l'axiome du choix (version théorème de Zermelo), tout ensemble admet un bon ordre. En particulier, l'ensemble indénombrable $\mathbb{R}$ admet un bon ordre $\ll$. Par le théorème 2, il existe donc un ordinal a en bijection croissante avec $(\mathbb{R}, \ll)$. Cet ordinal est donc indénombrable (*i.e.* au sens propre, l'ensemble a ne peut s'injecter dans $\mathbb{N}$). Il existe donc des ordinaux indénombrables. Comme $\in$ est un bon ordre sur les ordinaux, il existe c le plus petit ordinal indénombrable.

Définition La *longue demi-droite* l' est l'ensemble $c \times [0, 1[$ muni de l'ordre $\prec$, défini par : $(a, x) \prec (b, y)$ *ssi* $a \in b$ ou ($a = b$ et $x < y$), et de la topologie associée.

Définition La *longue droite* l est la réunion disjointe de deux exemplaires de la longue demi-droite, recollés par identification de leur plus petit élément.

La variété construite vérifie alors, par exemple, les

Propriétés
* l est une variété topologique de dim. 1 (*i.e.* localement homéomorphe à $\mathbb{R}$).
* Les compacts de l sont les fermés bornés et sont homéomorphes à ceux de $\mathbb{R}$.
* l n'a pas de base dénombrable d'ouverts.
* $l' \cup \{c + 1\}$, muni de la topologie de l'ordre naturel, est compact.
* l n'est pas σ-compacte — *a fortiori* pas compacte.
* Toute suite d'éléments de l est bornée.
* Toute suite d'éléments de l admet une sous-suite convergente.
* l n'est pas métrisable.
* l n'admet pas de partition de l'unité.
* l n'est pas contractile.

Remarque La longue droite est équipotente à $\mathbb{R}$. Elle est en effet le recollement de deux produits de c, de cardinal inférieur ou égal à celui de $\mathbb{R}$, par $[0, 1[$. En outre, on peut munir l d'un atlas qui en fait une variété différentielle de dimension 1 (là c'est délicat). Le fibré tangent de l est alors *non trivial* : s'il l'était on pourrait munir l d'une métrique riemannienne (pourquoi ?). Pour finir, précisons que les variétés connexes de dimension 1 sont $\mathbb{R}$, $\mathbb{S}^1$ et, avec l'axiome du choix, l et $\{x \in /x > x_0\}$.

Note Sans utiliser l'axiome du choix, on peut également construire des variétés différentielles de dimension deux non σ-compactes (surface de Prüfer par exemple).

Question subsidiaire On peut construire un «vaste cercle» en compactifiant la longue demi-droite par ajout du point à l'infini : $\overline{l'} = l' \cup \{c + 1\}$ comme plus haut, puis en identifiant ce point avec le plus petit élément de $\overline{l'}$. L'ensemble construit est-il une variété topologique ?