Géométrie (Maîtrise) novembre 2004
2004/2005

T.D. - feuille 6

Complétude, compétude géodésique, exponentielle, théorème de Hopf-Rinow, une pincée de champs de Killing.

1. Réfléchissons un peu aux variétés non complètes.

a) On reprend les notations et hypothèses de l'exercice **15** de la feuille 4, en supposant en outre que la courbe $u \mapsto (r(u), 0, z(u))$ est définie pour $u \in [0, T[$, est C^∞, est injective et coupe l'axe (Oz) au paramètre $u = 0$ (et seulement en ce paramètre) : $r(0) = 0$.

A quelle condition la surface de révolution $\mathcal{M}$ obtenue par rotation de cette courbe autour de l'axe (Oz) est-elle une sous-variété de $\mathbb{R}^3$? Pour étudier ce problème, on pourra par exemple passer des coordonnées polaires (u, θ) à des coordonnées cartésiennes.

b) Une variété riemannienne connexe $(\mathcal{M}, g)$ est dite *extensible* si elle est isométrique à un ouvert d'une variété riemannienne connexe $(\mathcal{M}', g')$, distinct de $\mathcal{M}'$.

Une variété riemannienne métriquement complète (et non vide pour les petits malins) peut-elle être extensible ?

Réciproquement, une variété riemannienne métriquement non complète est-elle nécessairement extensible ? Voyez-vous un contre-exemple intuitif élémentaire ? Techniquement, on pourra étudier la métrique d'une surface du type introduit en **a)**, définie pour $u \in]0, T[$ et munie de la métrique induite par celle de $\mathbb{R}^3$, et utiliser les coordonnées cartésiennes.

c) Notons π l'application exponentielle de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$, g_{eucl} la métrique euclidienne canonique de $\mathbb{C}$, restreinte à $\mathbb{C}^*$, et $(\mathcal{M}, g)$ la variété $(\mathbb{C}, \pi^* g)$. Par construction, $(\mathcal{M}, g)$ est plate, c'est-à-dire admet un recouvrement par des ouverts isométriques à des ouverts de $\mathbb{R}^2$ (pourquoi ?). D'autre part $(\mathcal{M}, g)$ est-elle géodésiquement complète ?

d) On va à présent montrer que $(\mathcal{M}, g)$ n'est pas extensible. Supposons qu'elle l'est ; on la voit alors comme un ouvert strict d'une variété $(\mathcal{M}', g')$. Supposons démontré le

Lemme Si $p \in \mathrm{fr}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}'$ et si V est un voisinage convexe de p, alors $V \setminus \{p\} \subset \mathcal{M}$.

Montrez alors que $\pi(V)$ est nécessairement un voisinage pointé de 0. En considérant par exemple les géodésiques issues de p, montrez que l'image du «cercle» de centre p et de rayon r suffisamment petit, tracé dans V, est le cercle de $\mathbb{R}^2$, de centre 0 et de rayon r. Pourquoi est-ce absurde (on peut se souvenir que $\pi = \exp$) ?

e) Montrez le lemme. Pour cela, remarquez que pour tout x de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, il existe une et une seule géodésique issue de x et non complète, c'est-à-dire non définie pour tout t de $\mathbb{R}$. Soit alors x un point de $V \cap \mathcal{M}$ et γ la géodésique reliant x à p (Pourquoi existe-t-elle ?). En utilisant la remarque et la convexité de V, montrez que $(\gamma \cap V) \setminus \{p\} \subset \mathcal{M}$, puis que $V \setminus \{p\} \subset \mathcal{M}$.

f) D'autre part, l'exponentielle en un point x de $\mathcal{M}$ est-elle surjective ?

2. Une variété riemannienne $(\mathcal{M}, g)$ est dite *homogène* si son groupe d'isométries agit transitivement sur elle. Montrez qu'une telle variété est géodésiquement complète.

3. Quelques considérations sur l'exponentielle riemannienne, l'exponentielle des groupes de Lie et le théorème de Hopf-Rinow.

Si G est un groupe de Lie d'élément neutre e, $\mathcal{G} = \mathrm{T}_e G$ est son algèbre de Lie. Si $h \in G$, on note L_h la multiplication à gauche par h sur G et R_h la multiplication à droite. Un champ de vecteurs invariant à gauche sur G est un champ de vecteurs X sur G invariant par multiplication à gauche, c'est-à-dire vérifiant, pour tout h et k de G :

$$\forall h, k \in G,\ (T_h L_k)(X(h)) = X(kh) \quad \text{ou, équivalemment :} \quad \forall h \in G, X(h) = (\mathrm{T}_e L_h)(X(e)).$$

L'exponentielle de $X_e \in \mathcal{G}$ est l'image de e par le flot de X au temps 1, où X est le champ invariant à gauche valant X_e en e.

On rappelle également que G agit sur $\mathcal{G}$ par l'*action adjointe :*

$$\text{Si } h \in G \text{ et } v \in \mathcal{G},\ \mathrm{Ad}(h).v = T_e(R_{h^{-1}} \circ L_h)(v).$$

Remarque : immédiatement, $\mathrm{Ad}(h).v = (T_h R_{h^{-1}}) \circ (T_e L_h)(v) = (T_{h^{-1}} L_h) \circ (T_e R_{h^{-1}})(v)$, pourquoi ?

Enfin, une métrique riemannienne sur G est dite *biinvariante* si elle est invariante par translations à droite et à gauche.

a) Montrez que l'existence d'une métrique biinvariante sur G est équivalente à l'existence d'un produit scalaire invariant par Ad sur $\mathcal{G}$. Pouvez-vous alors proposer une métrique biinvariante sur $O_n(\mathbb{R})$?

On suppose désormais le groupe de Lie G muni d'une métrique biinvariante g. On note i l'inversion dans G : $h \mapsto h^{-1}$.

b) Quelle est la différentielle de l'application $(h, k) \mapsto h.k$ de $G \times G$ dans G ? Pour alléger les notations, si $v \in \mathrm{T}_k G$, notons $hv := (\mathrm{T}_k L_h)(v)$ et $vh := (\mathrm{T}_k R_h)(v)$. Montrez que $T_h i(v) = -h^{-1} v h^{-1}$.

Soit v dans $\mathcal{G}$ et soit c la géodésique maximale issue de v. Montrez que c est définie sur $\mathbb{R}$ entier et que c est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans G.

c) Montrez que les géodésiques de G sont les courbes intégrales des champs invariants à gauche. Qu'en conclure au sujet des deux exponentielles mentionnées au début ?

d) L'exponentielle de matrices de $\mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$ dans $SO_n(\mathbb{R})$ est-elle surjective ? Montrez que l'exponentielle de matrices de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ dans $SL_n(\mathbb{R})$ ne l'est pas (remarque : par exemple, l'exponentielle d'une matrice est toujours un carré...). Existe-t-il des métriques biinvariantes sur $SL_n(\mathbb{R})$?

Par ailleurs, il existe sur $SL_n(\mathbb{R})$ des métriques invariantes à gauche : pourquoi ? L'exponentielle associée est-elle égale à l'exponentielle de groupe de Lie (on pourra utiliser le résultat de l'exercice **2**) ?

e) Enfin, remarquez que $O_{p,q}(\mathbb{R})$ admet une métrique *pseudo*-riemannienne biinvariante : laquelle et pourquoi ? (Et quelle est sa signature, pendant qu'on y est ?) Le **b)** et le **c)** n'ayant nulle part utilisé la définiepositivité (berk) de g, ils sont encore vrais. Le théorème de Hopf-Rinow, lui, n'est *pas vrai* pour les variétés pseudo-riemaniennes. Considérons la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{pmatrix}, \quad \text{où :} \quad M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad \text{avec } a < b < 0.$$

Vérifiez que $A \in SO(q)$ où $q = \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_3 + \mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_4$ et même que $A \in SO^0(q)$, la composante connexe de l'identité de $SO(q)$. D'autre part, A est-elle dans l'image de l'exponentielle ? Quelle affirmation du théorème de Hopf-Rinow est ici mise en défaut ? (et quelle *autre* dans le **1.** du devoir ?) Quel objet joue donc un rôle *indispensable* dans la démonstration de ce théorème ?

4. Les champs de Killing, une application. Sur une variété riemannienne $(\mathcal{M}, g)$, on appelle *champ de Killing* un champ de vecteurs X tel que $L_X g = 0$, c'est-à-dire tel que, si Y et Z sont des champs de vecteurs qui commutent avec X :

$$L_X[g(Y, Z)] = 0.$$

a) Montrez que sont équivalents :

(i) X est de Killing,

(ii) En tout point m, la forme bilinéaire $(DX)^\flat$, définie sur $\mathrm{T}_p\mathcal{M}$ par $(Y, Z) \mapsto g(D_Y X, Z)$, est *antisymétrique* (au fait, pourquoi est-elle bien définie «ponctuellement» sur $\mathrm{T}_p\mathcal{M}$?),

(iii) Le flot ϕ_t^X de X est un groupe à un paramètre d'*isométries.*

b) Sur une surface de révolution comme donnée dans l'exercice **15** de la feuille 4 (encore...), les champs $\frac{\partial}{\partial u}$ et $\frac{\partial}{\partial \theta}$ sont-ils de Killing ?

Soit $c(t) = f(u(t), \theta(t))$ une géodésique de cette surface. En exprimant $r(u(t))^2\theta'(t)$ comme un produit scalaire, retrouvez en une ligne sa constance. (La constante est dite *invariant de Clairaut* de la géodésique.)

Quelles généralisations peut-on faire de ce résultat ?