U.F.R. S.T.M.I.A. — Ecole doctorale IAE+M — D.F.D. de Mathématiques

Sur l'holonomie des variétés pseudo-riemanniennes

THESE

présentée et soutenue publiquement le 3 mai 2000
en salle de conférences de l'Institut Elie Cartan de Nancy

pour obtenir le titre de

Docteur de l'Université Henri Poincaré, Nancy I
en Mathématiques pures

par

Charles Boubel

Composition du jury :

Michel Cahen, Professeur à l'Université Libre de Bruxelles, *Rapporteur, Président.*
Jost Eschenburg, Professeur à l'Université d'Augsburg, *Rapporteur.*
Abdelghani Zeghib, D.R. CNRS à l'Ecole Normale Supérieure de Lyon, *Rapporteur.*
Gérard Besson, D.R. CNRS à l'Université Joseph Fourier de Grenoble, *Examinateur.*
Marc Bourdon, Maître de Conférences à l'Université Henri Poincaré, *Examinateur.*
Lionel Bérard Bergery, Professeur à l'Université Henri Poincaré, *Directeur de thèse.*

A ma famille,

Jean-Claude, Véronique, Juliette, Anne et Noémi.

Remerciements

A l'issue de ce travail, mes remerciements vont en premier lieu à Lionel Bérard Bergery qui a dirigé cette thèse. Merci à lui pour les problématiques qu'il m'a proposées, pour sa grande disponibilité, ses conseils et son accompagnement dans cette première expérience, pour moi, de recherche.

Merci vivement à Michel Cahen, Jost Eschenburg et Ghani Zeghib qui ont tout de suite accepté d'être rapporteurs de cette thèse ; j'en suis très honoré et leur sais gré d'avoir lu ce travail un peu long, parfois aussi un peu embrouillé.

De même, merci à Gérard Besson — qui est notamment, avec Sylvain Gallot, à l'origine de cette thèse à Nancy — et à Marc Bourdon qui me font la joie de faire également partie du jury.

Quelques passages à l'ENS de Lyon vers la fin de cette thèse m'ont permis une ou deux discussions brèves mais fructueuses ; merci donc à Etienne Ghys, à Gilles Carron, à Ghani Zeghib encore une fois, pour leur écoute. Merci également à Simone Gutt et Michel Cahen pour leur invitation à venir parler à Bruxelles ; à Hermann Karcher et à Aziz Ikemakhen, avec qui encore une fois j'ai pu discuter lors de leurs passages à Nancy.

Je tiens également à remercier l'institution universitaire dans son ensemble, pour ces études qu'elle a permises, la recherche qu'elle m'a appris à pratiquer et les personnes qu'elle m'a donné de rencontrer. C'est une grande chance.

Je ne peux finir sans rappeler que cette thèse a commencé de façon assez comique. Merci de tout cœur à tous ceux et celles qui m'ont permis d'en vivre la première année, ainsi que la suite : mes parents et mes petites sœurs, de précieux amis, notamment de l'ENS Lyon, mes coéquipiers en G.F.U. et Jean-Sébastien Bach. Merci ici aussi à Lionel Bérard Bergery pour son attitude appropriée. J'aurai beaucoup appris au cours de cette thèse, même si pas forcément ce que j'attendais ni surtout comme je l'attendais.

Table des matières

Préambule

L'holonomie est un invariant sur les variétés munies d'une connexion affine, introduit pour la première fois explicitement par Elie Cartan au début du vingtième siècle. Il a essentiellement été étudié, cependant, depuis la seconde moitié du siècle et surtout, mais pas exclusivement, dans le cas riemannien. Citons notamment quatre théorèmes essentiels : celui de Borel-Lichnérowicz (1952), celui de de Rham (1952) et celui d'Ambrose-Singer (1953), ainsi que la classification par Berger des holonomies possibles dans le cas irréductible (1955). On pourra consulter par exemple le chapitre 10 de l'ouvrage d'Arthur Besse sur les variétés d'Einstein [Bes87] et, pour les développements plus récents, l'article de Bryant dans les *Actes de la Table Ronde de géométrie différentielle en l'honneur de Marcel Berger* [Bes96].

Si l'holonomie des variétés riemanniennes est aujourd'hui assez bien connue et s'est révélée un outil fécond, celle des variétés pseudo-riemanniennes représente encore un vaste champ de recherche ouvert. Cet état de fait, ainsi que l'attrait du monde pseudo-riemannien, si semblable en apparence au riemannien et au comportement pourtant parfois très différent, son possible intérêt en physique également, incitent à s'intéresser au cas pseudo-riemannien.

* * *

C'est à quelques aspects de cette étude que se consacre cette thèse. Il s'agira déjà partout d'holonomie *restreinte*, c'est-à-dire de l'holonomie engendrée par le transport parallèle le long de lacets homotopes à l'identité uniquement. Ainsi, tous les résultats présentés ici sont locaux, voire purement algébriques, c'est-à-dire ponctuels ; d'éventuels problèmes globaux à aborder ne seront le cas échéant que suggérés par les résultats locaux obtenus.

Les trois chapitres constituent en fait trois parties largement indépendantes ainsi que de style et de propos assez différents. Un objet les réunit cependant, typique du monde pseudo-riemannien : les sous-espaces totalement isotropes d'un espace vectoriel (E,g) pseudo-euclidien, stables sous l'action d'un certain sous-groupe de $O(E,g)$.

* * *

Le premier chapitre dégage une classification locale des variétés pseudo-riemanniennes dont la courbure de Ricci est parallèle. Pour ce faire, il utilise comme outils certains sous-espaces totalement isotropes comme décrits ci-dessus. Plus précisément, il utilise les propriétés de l'holonomie locale vis-à-vis de certains sous-espaces totalement isotropes qu'elle laisse stables. Il propose en outre, comme corollaire, un résultat du même type sur les variétés symplectiques munies d'une connexion affine compatible.

Le deuxième chapitre est l'étude d'un problème d'algèbre linéaire en dimension finie : cette étude a été suggérée par le premier chapitre qui en utilise un des résultats. Il s'agit du problème suivant : si a et b sont deux formes bilinéaires symétriques sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, quelle est la structure de la représentation dans E de $O(a) \cap O(b)$? Là encore, le problème «riemannien», c'est-à-dire ici euclidien, est connu : si $\mathbb{K}$ est le corps $\mathbb{R}$ et a définie positive, b est diagonalisable dans une base a-orthonormée, ce qui permet de répondre facilement à la question. Wilhelm Klingenberg avait déjà étudié le cas général au début des années cinquante (voir [Kli54] et fourni une famille de «bases privilégiées» généralisant les bases codiagonalisantes. C'est en dégageant ici certains espaces $[O(a) \cap O(b)]$-stables, a-isotropes, canoniques, formant un double drapeau, qu'on décomposera l'action de $O(a) \cap O(b)$ sur E. On effectue en outre le même travail quand a et/ou b est antisymétrique, mais toujours en supposant non dégénérée une des deux formes.

La situation est malheureusement très touffue ; le fruit le plus utilisable de ce chapitre est sans doute les tables dressées en annexe, récapitulant les formes matricielles relatives de a et b dans les différents cas possibles.

Le troisième chapitre enfin, beaucoup plus analytique que les deux autres, s'intéresse directement aux sous-espaces totalement isotropes stables par holonomie et aux feuilletages et fibrés locaux associés. Ces sous-espaces sont en effet une des nouveautés du cas pseudo-riemannien par rapport au monde riemannien, et une nouveauté encore très mal connue. Pour dire les choses très brièvement, les variétés riemanniennes voient leurs espaces tangents se décomposer en somme directe orthogonale sous l'action de l'holonomie, par exemple :

$$\mathrm{T}_m\mathcal{M} = E_1 \overset{\perp}{\oplus} E_1^{\perp}.$$

D'après le théorème d'Ambrose-Singer, il correspond alors à cette décomposition, une décomposition de la variété en produit riemannien :

$$\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_1'.$$

L'holonomie d'une variété pseudo-riemannienne pourra, elle, stabiliser par exemple seulement un *drapeau* dans les espaces tangents :

$$\{0\} \subset E_1 \subset E_1^{\perp} \subset \mathrm{T}_m\mathcal{M}, \quad \text{où } E_1 \text{ est totalement isotrope.}$$

A quelle structure géométrique correspond alors cette décomposition du fibré tangent? Ce n'est plus un produit riemannien.

De plus en général, c'est un treillis possiblement très compliqué de sous-espaces tous dégénérés de $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$ que stabilise l'holonomie restreinte d'une variété pseudo-riemannienne qui ne se décompose pas en produit riemannien.

C'est par la construction de **coordonnées locales** «privilégiées» que nous tentons ici d'apporter une réponse à cette question.

Si, à notre connaissance, ce problème de géométrie analytique locale n'a pas encore été traité, il existe déjà quelques résultats algébriques ponctuels sur les candidats-groupes d'holonomie possibles, stabilisant un drapeau comme indiqué plus haut. Ainsi, Aziz Ikemakhen et Lionel Bérard Bergery ont-ils [BBI93] démontré que les groupes d'holonomie agissant de façon indécomposable mais réductible se répartissent en quatre types possibles, dans le cas des variétés lorentziennes, c'est-à-dire pseudo-riemanniennes de signature $(1,d-1)$. C'est aussi avec le projet de proposer une compréhension locale de ces variétés que nous avons entrepris cette construction de coordonnées. De fait, ces dernières permettent de vérifier que les quatre types d'holonomies possibles se réalisent effectivement comme holonomie de variétés lorentziennes ; elles permettent en outre alors de les classifier.

Ce dernier chapitre constitue essentiellement une première approche, locale, des variétés pseudo-riemanniennes «réductibles, indécomposables». En apportant quelques réponses, il ouvre essentiellement plutôt quantité de questions. Pour cette raison, la rédaction, le système de notations introduit, la présentation des choses ne sont sûrement pas optimaux ; nous espérons surtout proposer ici un premier débroussaillage de la situation. Nous espérons également qu'une présentation plus synthétique et dégageant mieux l'essentiel en viendra, quand elle sera mieux comprise. Nous prions donc le lecteur d'excuser le caractère parfois pénible des constructions effectuées.

* * *

Chapitre 1

Les variétés pseudo-riemanniennes et symplectiques connectées dont la courbure de Ricci est parallèle

Introduction

Ce chapitre classifie les différents types possibles de variétés pseudo-riemanniennes et de variétés symplectiques munies d'une connexion symplectique, dont la courbure de Ricci est parallèle. Le cas pseudo-riemannien est traité dans un article soumis à une revue et joint en annexe page 3 ; les motivations, le résulat et quelques commentaires sont repris ici. Le cas symplectique connecté apparaît comme corollaire du premier cas et n'est, lui, traité que dans la thèse.

Les variétés riemanniennes Ricci-parallèles ont une courbure de Ricci diagonalisable et sont par conséquent isométriques à un produit de variétés d'Einstein, au moins localement. Ce n'est plus vrai pour les variétés pseudo-riemanniennes ou pour les variétés symplectiques connectées. Cependant, en exploitant les propriétés de leur holonomie et notamment de leurs éventuels sous-espaces totalement isotropes stables par holonomie, on aboutit à un résultat proche. Il permet alors une classification locale de ces variétés ; à côté des produits (locaux) de variétés d'Einstein, quelques autres types apparaissent.

La démonstration repose sur deux théorèmes : d'une part un résultat d'algèbre portant sur les paires de formes bilinéaires et dû à W.Klingenberg [Kli54], d'autre part un résultat classique de de Rham et Wu sur l'holonomie (voir [Wu67]).

Les deux premières sections reprennent la teneur de l'article porté en annexe ; la première rappelle les motivations de la démarche et la deuxième traite le cas pseudo-riemannien. La troisième section propose, comme corollaire du théorème pseudo-riemannien, un théorème correspondant sur les variétés symplectiques connectées.

Rappel sur les variétés symplectiques. Une connection symplectique sur une variété symplectique $(\mathcal{M},\omega)$ est une connexion D pour laquelle la forme symplectique est parallèle, c'est-à-dire telle qu'en tout point p de $(\mathcal{M},\omega)$ et pour tous champs de vecteurs A et B au voisinage de p : $\forall V \in \mathrm{T}_p\mathcal{M}, L_V\omega(A,B) = \omega(D_V A,B) + \omega(A,D_V B)$. Contrairement aux connections riemannienne ou pseudo-riemannienne, elle n'est pas déterminée de façon unique sur $\mathcal{M}$ par cette condition.

Notations. Dans tout le chapitre, on notera $(\mathcal{M},g)$ une variété riemannienne ou pseudo-riemannienne, en notant parfois $<\cdot,\cdot>$ la métrique g ; $(\mathcal{M},\omega)$ désignera une variété symplectique. La forme $(u,v) \mapsto \operatorname{tr} R(u,\cdot)v$ est une forme bilinéaire symétrique sur les variétés connectées ; c'est leur courbure de Ricci, notée ric. On notera Ric l'endomorphisme respectivement g-autoadjoint ou ω-antiautoadjoint associé à ric : $\mathrm{ric}(\cdot,\cdot) = g(\mathrm{Ric}\,\cdot,\cdot)$ ou $\mathrm{ric}(\cdot,\cdot) = \omega(\mathrm{Ric}\,\cdot,\cdot)$. On notera H le groupe d'holonomie restreint de $\mathcal{M}$ et les algèbres de Lie par des minuscules gothiques : $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{so}$ ...

1 Motivation : quelques mots sur le cas riemannien

Comme dit plus haut, une base de ce travail est un théorème de de Rham sur l'holonomie riemannienne, généralisé au cas pseudo-riemannien par Wu. Citons-en l'essentiel.

Théorème (de Rham, Wu) *Soit $(\mathcal{M},g)$ une variété riemannienne ou pseudo-riemannienne complète, simplement connexe et $m \in \mathcal{M}$. Si l'espace tangent en m à $\mathcal{M}$ admet une décomposition orthogonale stable par holonomie :*

$$\mathrm{T}_m\mathcal{M} = E_1 \overset{\perp}{\oplus} E_2,$$

alors il existe un unique couple $((\mathcal{M}_1,g_{|\mathcal{M}_1}),(\mathcal{M}_2,g_{|\mathcal{M}_2}))$ *de sous-variétés de* $\mathcal{M}$ *contenant* m *et une unique isométrie* f *tels que :*

- $\mathrm{T}_m\mathcal{M}_1 = E_1$ *et* $\mathrm{T}_m\mathcal{M}_2 = E_2$,
- $f\ :\ \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}$,
- $f_{|\mathcal{M}_1\times\{m\}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_1}$ *et* $f_{|\mathcal{M}_2\times\{m\}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_2}$.

où $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ *désigne le produit riemannien de* $\mathcal{M}_1$ *et* $\mathcal{M}_2$.

Pour une variété riemannienne ou pseudo-riemannienne quelconque, le même résultat est vérifié seulement avec une isométrie locale.

Le théorème complet précise de plus dans quelle mesure le triplet $((\mathcal{M}_1,g_{|\mathcal{M}_1}),(\mathcal{M}_2,g_{|\mathcal{M}_2}),$ $f)$ est unique, une fois supprimées les conditions $\mathrm{T}_m\mathcal{M}_1 = E_1$, $\mathrm{T}_m\mathcal{M}_2 = E_2$, $f_{|\mathcal{M}_1\times\{m\}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_1}$ et $f_{|\mathcal{M}_2\times\{m\}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_2}$.

Les sous-espaces E_1 et E_2 de $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$ sont stables par holonomie ; ils se prolongent donc dans $\mathrm{T}\mathcal{M}$ en distributions parallèles. Les sous-variétés $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont en fait les feuilles intégrales issues de m de ces distributions.

Le résultat annoncé en introduction sur les variétés riemanniennes Ricci-parallèles est une conséquence immédiate de ce théorème.

Corollaire riemannien *Soit* $(\mathcal{M},g)$ *une variété riemannienne complète, simplement connexe, dont la courbure de Ricci est parallèle. Elle est alors canoniquement isométrique à un produit riemannien de variétés d'Einstein. Plus précisément, il existe une unique suite* $(\lambda_i)_{i=1}^n$ *de réels, une unique suite de variétés d'Einstein* $((\mathcal{M}_i)_{i=1}^n,g_i)$, *telles que* $\mathrm{ric}_i = \lambda_i g_i$ *sur chaque* $\mathcal{M}_i$, *et une isométrie* f *de* $\mathcal{M}$ *sur le produit riemannien* $\prod_i \mathcal{M}_i$. *L'isométrie* f *est unique à composition près avec un produit d'isométries de chaque facteur* $\mathcal{M}_i$. *Si* $\mathcal{M}$ *n'est pas complète et simplement connexe,* f *n'est en général qu'une isométrie locale.*

Démonstration. Elle est classique, et rappelée dans l'article en annexe. Donnons ici sa substance. L'endomorphisme Ric est autoadjoint pour la forme g, bilinéaire *symétrique définie positive*. Il est donc diagonalisable et en tout point p, $\mathrm{T}_p\mathcal{M}$ est somme directe orthogonale de ses sous-espaces propres, on note $(\lambda_i)_{i=1}^n$ ses valeurs propres. Comme de plus Ric est supposé parallèle, ces sous-espaces propres sont stables par holonomie ; le théorème de de Rham fait le reste.

Remarque. Ce corollaire n'est pas vrai pour une variété pseudo-riemannienne $(\mathcal{M},g)$ ou symplectique connectée $(\mathcal{M},\omega,D)$, car, respectivement, g n'est pas définie ou ω n'est pas symétrique. L'endomorphisme Ric n'a donc plus de raison d'être diagonalisable et $\mathcal{M}$, plus de raison d'être produit de variétés d'Einstein. Cependant, dans le cas pseudo-riemannien, certaines propriétés de l'holonomie et le travail de Klingenberg [Kli54] permettent de montrer que Ric, bien que non nécessairement diagonalisable, ne peut être «trop compliqué» : son polynôme minimal, bien que non nécessairement scindé sur $\mathbb{R}$, n'a que peu d'autres formes possibles. A son tour, ce résultat pseudo-riemannien permet de montrer un résultat du même genre pour les variétés symplectiques connectées. Des remarques préliminaires plus fournies sont données dans la section 1 de l'article.

2 Le cas pseudo-riemannien

2.1 Le théorème et le principe de sa démonstration

Théorème 1 *Soit* $(\mathcal{M},g)$ *une variété pseudo-riemannienne dont la courbure de Ricci est parallèle et soit* μ *le polynôme minimal de* Ric*. Alors :*

(i) $\mu = \prod_i P_i$ *où :*

- $\forall i \neq j, P_i \wedge P_j = 1,$
- $\forall i, P_i$ *est irréductible ou* $P_i = X^2$*.*

(ii) *Il existe une unique famille* $(\mathcal{M}_i)_i$ *de variétés pseudo-riemanniennes telles que le polynôme minimal de* $\mathrm{Ric}_i = \mathrm{Ric}_{\mathcal{M}_i}$ *sur chaque* $\mathcal{M}_i$ *est* P_i *et une isométrie locale du produit riemannien* $\prod_i \mathcal{M}_i$ *sur* $\mathcal{M}$*. Cette isométrie* f *est unique à composition près avec un produit d'isométries de chaque facteur* $\mathcal{M}_i$*. Si* $\mathcal{M}$ *est complète et simplement connexe et* Ric *globalement parallèle sur* $\mathcal{M}$*,* f *est une isométrie globale.*

Localement, la variété $\mathcal{M}$ se décompose donc canoniquement en un produit riemannien, dont les facteurs $\mathcal{M}_i$ sont d'un des quatre types suivants :

- soit $P_i = X - \alpha_i$, $\alpha_i \neq 0$ *i.e.* $\mathrm{Ric}_i = \alpha_i g$ et $\mathcal{M}_i$ est d'Einstein, non Ricci-plate,
- soit $P = X^k$, $k \in \{1,2\}$:
  - si $k = 1$, $\mathcal{M}_i$ est Ricci-plate, donc en particulier est d'Einstein,
  - si $k = 2$, Ric est nilpotent d'indice 2 ; cette possibilité est nouvelle par rapport au cas riemannien,
- soit P est un polynôme irréductible de degré deux : Ric est alors semi-simple mais non diagonalisable sur $\mathbb{R}$. On montre alors que $\mathcal{M}_i$ est une variété complexe, d'Einstein pour cette structure. Cette possibilité est également nouvelle par rapport au cas riemannien.

Démonstration. Elle comporte deux grandes étapes. Notons $\mu = \prod_i P_i^{n_i}$ la décomposition du polynôme minimal de Ric en produit de puissances de polynômes irréductibles premiers entre eux : $\forall (i,j), i \neq j \Rightarrow P_i \wedge P_j = 1$. Résumons brièvement ces étapes.

Déjà, on montre que les sous-espaces caractéristiques de Ric dans l'espace tangent $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$ à $\mathcal{M}$ en un point m, c'est-à-dire les noyaux des $P_i^{n_i}(\mathrm{Ric})$, sont orthogonaux. Leur somme directe forme $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$ par définition du polynôme minimal et d'autre part ils sont stables par holonomie car Ric est supposé parallèle. Il correspond donc à cette décomposition de $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$, par le théorème de de Rham-Wu, une décomposition de $\mathcal{M}$ en produit riemannien local au voisinage de m. A chaque $P_i^{n_i}$ correspond une des variétés en facteur dans le produit riemannien ; sur chacune de ces variétés, le polynôme minimal de Ric est alors ce facteur $P_i^{n_i}$. C'est le point **(ii)** du théorème. On restreint désormais l'étude à chaque facteur, c'est-à-dire aux variétés pseudo-riemanniennes Ricci-parallèles dont le polynôme minimal de Ric est une puissance d'un irréductible. Reste à montrer le **(i)**, c'est-à-dire dresser la liste de ces polynomes minimaux possibles.

Remarque. Dans le cas riemannien, les sous-espaces caractéristiques sont de plus des sous-espaces propres : sur chaque variété facteur, Ric est donc proportionnel à la métrique. Chacune de ces variétés est d'Einstein ; on retrouve le corollaire riemannien.

Techniquement, la deuxième étape procède elle-même par étapes. On note P^n le polynôme minimal de Ric, où P est irréductible. Il est successivement montré que $n > 1 \Rightarrow$

$P = X$, que $P = X \Rightarrow n \leq 3$ et enfin que $P = X \Rightarrow n \neq 3$. La démonstration du premier point repose sur deux faits.

• D'une part, un résultat formel sur un espace $(E,< \cdot\,, \cdot >)$ muni d'un tenseur R vérifiant les propriétés algébriques d'un tenseur de courbure riemannien, notamment la première identité de Bianchi. Si un tel espace admet un sous-espace D totalement isotrope stable par tous les $R(x,y)$, alors la valeur de $\mathrm{ric}(d, \cdot)$, pour $d \in D$, s'exprime en partie comme la trace de $R(\,\cdot\,,d)$.

• D'autre part, le sous-espace $D = \mathrm{Im}(P^{n-1}(\mathrm{Ric}))$ de $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$ est totalement isotrope pour g, stable par holonomie car Ric est parallèle, donc stable par tous les $R(x,y)$. Il est également muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée canonique, construite à partir de g et $P(\mathrm{Ric})$. En particulier, tous les $R(x,y)_{|D}$ pour $x,y \in \mathrm{T}_m\mathcal{M}$ sont antiautoadjoints pour cette forme, donc de trace nulle.

Ces deux éléments combinés donnent que $D \subset \ker \mathrm{Ric}$. Si $n > 1$, $D \neq \{0\}$ et donc $\ker \mathrm{Ric} \neq \{0\}$. Le polynôme minimal de Ric étant une puissance d'un irréductible, ce dernier ne peut donc être que X.

Le deuxième point est très semblable. Le troisième en revanche, s'il repose encore sur le même principe, est un peu plus compliqué et utilise le résultat algébrique de Klingenberg [Kli54]. Celui-ci donne l'existence d'une certaine famille de bases «adaptées», en un sens qu'il définit, à la donnée de deux formes bilinéaires symétriques a et b non dégénérées sur un espace vectoriel de dimension finie. Il revient à mieux comprendre la structure du groupe de Lie $O(a) \cap O(b)$. On l'applique aux deux formes g et ric sur $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$.

Remarque importante. Cette démonstration prouve un peu plus que l'énoncé donné plus haut, car elle n'utilise que les propriétés algébriques ponctuelles en m des tenseurs R et ric. On a en fait prouvé que :

• si (E,g,R) est un espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire symétrique g non dégénérée et d'un (3,1)-tenseur R vérifiant les propriétés algébriques ponctuelles d'un tenseur de courbure riemannien, *i.e.* l'identité de Bianchi et : $\forall x,y \in E, R(x,y) = -R(y,x)$ et encore : $g(R(x,y)\ \cdot\ , \cdot\,) = -g(\,\cdot\,,R(x,y)\,\cdot\,)$,

• si les sous-espaces caractéristiques du tenseur de Ricci formellement associé à R (*i.e.* de la 2-forme $(x,y \mapsto \mathrm{tr}(R(x,\cdot\,)y))$ sont stables par les $R(x,y)$,

alors le polynôme minimal de Ric peut s'écrire $\mu = \prod_i P_i$ où :

• $\forall i \neq j, P_i \wedge P_j = 1$,

• $\forall i, P_i$ est irréductible ou $P_i = X^2$.

Cette remarque est essentielle pour aborder le cas symplectique connecté.

2.2 Commentaires et compléments du résultat pseudo-riemannien

On renvoie ici à l'article en annexe. Contentons-nous de lister les résultats complémentaires apportés.

• Le cas où le polynôme minimal P de Ric est irréductible de degré deux ressemble en un sens au cas riemannien. Comme annoncé plus haut, on montre qu'alors la variété $\mathcal{M}$ admet une structure riemannienne complexe, *i.e.* un champ parallèle d'endomorphismes J t.q. $J^2 = -\mathrm{Id}$, et une forme bilinéaire symétrique complexe h dont D est la connexion de Levi-Civita. La métrique réelle g est en outre la partie réelle de cette forme h. La variété *complexe* $(\mathcal{M},h)$ est alors d'Einstein, de facteur $\frac{1}{2}\alpha$ où α est une racine complexe de P. Il y a proportionnalité complexe non réelle entre h et $\mathrm{ric}_{\mathbb{C}}$.

• En dimension inférieure ou égale à trois, ric détermine toute la courbure. Les variétés Ricci-parallèles (complexe ou réelles) d'une telle dimension sont donc à courbure constante, si ric est non dégénéré.

• Il convient de distinguer la décomposition, canonique, de $\mathcal{M}$ en produit riemannien construite ici quand ric est parallèle, de la décomposition maximale, plus fine et non unique en général, donnée par le théorème de de Rham-Wu.

• Enfin, le cas dégénéré : $\mathrm{Ric}^2 = 0$ est à distinguer des autres. Si Ric n'est pas dégénéré, seule une famille à un paramètre de métriques — les $\lambda\,\mathrm{ric}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, dans le cas Einstein —, ou à deux paramètres — les $\lambda\,\mathrm{ric} + \nu g$, dans le cas «Einstein complexe non réel» cité plus haut —, admettent sur $\mathcal{M}$ Ricci-parallèle indécomposable la même connexion de Levi-Civita D. Ce n'est plus le cas si Ric est nul ou nilpotent d'indice 2. L'article fournit des exemples symétriques classiques de telles variétés, notamment à courbure de Ricci nilpotente d'indice deux : il en existe donc. Les variétés de ce dernier type sont, elles, loin d'être comprises et classifiées. Au moins sait-on que l'indice de nilpotence de Ricci ne peut excéder deux. Un outil possible pour les étudier pourrait être les coordonnées locales du type proposé au chapitre trois, par exemple en les adaptant au drapeau $\{0\} \subset (\ker \mathrm{Ric} \cap \mathrm{Im}\,\mathrm{Ric}) \subset \ker \mathrm{Ric} \subset \mathrm{T}_m\mathcal{M}$.

3 Le cas symplectique connecté

Un résultat similaire, bien que plus faible, portant sur les variétés symplectiques munies d'une connexion symplectique, découle du théorème pseudo-riemannien 1 page 19 et de la «remarque importante» page 20. Deux propriétés du cas riemannien font ici cette fois défaut :

• Ric n'est pas nécessairement diagonalisable.

• Le théorème de de Rham-Wu ne s'applique plus ; à une décomposition de $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$ en somme directe ω-orthogonale stable par holonomie ne correspond pas nécessairement de décomposition locale de $\mathcal{M}$ en produit «riemannien», *i.e.* ici en produit pour ω doublé d'un produit affine pour D.

Le théorème obtenu est le suivant.

Théorème 2 *Soit* $(\mathcal{M},\omega,D)$ *une variété symplectique munie d'une connection symplectique* D *dont la courbure de Ricci est parallèle et soit* μ *le polynôme minimal de* Ric. *Alors* $\mu = \prod_i P_i$ *où :*

- $\forall i \neq j, P_i \wedge P_j = 1,$
- $\forall i, P_i$ *est irréductible ou* $P_i = X^2$ *ou* $P_i = X^3$.

Remarque. Quitte à renuméroter les facteurs de μ qui apparaissent dans l'énoncé, notons P_0 l'éventuel facteur X^p de μ et P_i avec $i \geq 1$ les autres, prenons m un point de $\mathcal{M}$ et notons $M_i = \ker P_i(\mathrm{Ric}_{|m}) \subset \mathrm{T}_m\mathcal{M}$. La décomposition :

$$\mathrm{T}_m\mathcal{M} = \overset{\perp}{\oplus}_i M_i$$

est stable par holonomie, il lui correspond donc une famille de distributions parallèles de $\mathrm{T}\mathcal{M}$. On note alors, pour tout i, $\mathcal{F}_i$ le feuilletage intégral de la distribution M_i et $\mathcal{M}_i$ la feuille de $\mathcal{F}_i$ issue de m. Les feuilletages $\mathcal{F}_i$ sont supplémentaires, il existe donc un difféomorphisme local canonique au voisinage de m

$$\varphi\ : \mathcal{M} \to \prod_i \mathcal{M}_i.$$

(φ provient d'une carte au voisinage de m d'un atlas de fibré de $\mathcal{M}$, vue comme fibré en les $\mathcal{F}_i$.) La forme symplectique ω est parallèle car D est une connexion symplectique. Par conséquent, φ envoie ω sur la forme symplectique produit $\otimes_i \omega_i$ de $\prod_i(\mathcal{M}_i,\omega_{|\mathcal{M}_i})$:

$$\varphi\ : (\mathcal{M},\omega) \to \prod_i (\mathcal{M}_i,\omega_{|\mathcal{M}_i}).$$

Cependant, l'isomorphisme avec la variété produit s'arrête là ; le théorème de de Rham-Wu ne s'applique pas et, en général :

$$\varphi\ : (\mathcal{M},\omega,D) \not\to \prod_i (\mathcal{M}_i,\omega_{|\mathcal{M}_i},D_{\mathcal{M}_i}).$$

En effet, la connexion $D_{|\mathcal{F}_i}$ n'est pas nécessairement parallèle le long des feuilles des $\mathcal{F}_j$ pour $j \neq i$. Ce parallélisme est vérifié par $\omega_{|\mathcal{F}_i}$ mais, contrairement aux formes riemanniennes ou pseuso-riemanniennes, cette forme symplectique *ne* détermine *pas* une unique connexion symplectique $D_{|\mathcal{F}_i}$. Ainsi, tout en restant une connection symplectique pour $\omega_{|\mathcal{F}_i}$, la connexion $D_{|\mathcal{F}_i}$ peut varier d'une feuille de $\mathcal{F}_i$ à une autre, c'est-à-dire ne pas être le prolongement par transport parallèle de la connexion $D_{|\mathcal{M}_i}$ de la sous-variété $\mathcal{M}_i$.

Toutefois, dans le cas précis étudié ici d'une variété Ricci-parallèle, le théorème de de Rham-Wu s'applique partiellement. En effet, la forme de Ricci de la variété quotient $\mathcal{M}/\mathcal{F}_0$ est parallèle, non dégénérée, elle en constitue donc une métrique pseudo-riemannienne, dont $D_{\mathcal{M}/\mathcal{F}_0}$ est la connexion de Levi-Civita. Notons π la projection canonique $\mathcal{M} \to \mathcal{M}/\mathcal{F}_0$, alors, par le théorème de de Rham-Wu, $\pi(\mathcal{M}, \mathrm{ric})$ est isomorphe au produit riemannien $\prod_{i\geq 1} \pi(\mathcal{M}_i, \mathrm{ric}_i)$. Dans $\mathcal{M}$, ceci revient à dire les $D_{|\mathcal{F}_i}$ pour $i \neq 0$ *sont parallèles* le long des feuilles de $\mathcal{F}_j$ pour $j \neq i$. Seule la restriction $D_{|\mathcal{F}_0}$ de D peut ne pas être parallèle le long des feuilles des $\mathcal{F}_i$, $i \neq 0$.

Démonstration du théorème. En quotientant par $\ker \mathrm{ric}$, on se ramène en un sens au cas pseudo-riemannien. On utilisera le résultat préliminaire suivant :

Affirmation 1. Le tenseur :

$$\overline{R} = [(a,b) \mapsto R(\mathrm{Ric}\, a, \mathrm{Ric}\, b)] \in (\otimes^3(\mathrm{T}\mathcal{M}/\ker \mathrm{Ric})) \otimes (\mathrm{T}\mathcal{M}/\ker \mathrm{Ric})^*$$

est bien défini et a en tout point les propriétés algébriques ponctuelles d'un tenseur de courbure. De plus, la 2-forme ric passe au quotient sur $\mathrm{T}\mathcal{M}/\ker \mathrm{ric}$ en une forme non-dégénérée, parallèle, qu'on notera g. Les $\overline{R}(a,b)$ sont g-antiautoadjoints. Le triplet $(\mathrm{T}\mathcal{M}/\ker \mathrm{ric}\, ,g,\overline{R})$ a donc, en chaque point p de $\mathcal{M}$, les propriétés algébriques ponctuelles d'un triplet ($\mathrm{T}_p\mathcal{M}$, métrique, courbure).

Vérifions les propriétés annoncées de $\overline{R}$.

- Comme $\ker \mathrm{Ric}$ est stable par holonomie, pour tous a,b : $R(a,b)$, passe au quotient en un endomorphisme de $\mathrm{End}(\mathrm{T}_p\mathcal{M}/\ker \mathrm{Ric})$. Il en est donc ainsi pour les $R(\mathrm{Ric}\, a, \mathrm{Ric}\, b)$ et $\overline{R}$

est donc bien défini.

• $\overline{R}$ est antisymétrique en a et b.

• pour tous a et b, $R(\operatorname{Ric} a, \operatorname{Ric} b)$ est ric-antiautoadjoint donc $\overline{R}(a,b)$ est g-antiautoadjoint.

• Vérifions que $\overline{R}$ satisfait l'identité de Bianchi : $\forall a,b,c, \overline{R}(a,b)c+\overline{R}(b,c)a+\overline{R}(c,a)b = 0$. Comme $\overline{R}$ est défini dans $(\otimes^3(\mathrm{T}\mathcal{M}/\ker \operatorname{Ric})) \otimes (\mathrm{T}\mathcal{M}/\ker \operatorname{Ric})^*$, il suffit de vérifier que: $\forall a,b,c,d$, $\operatorname{ric}(\overline{R}(a,b)c + \overline{R}(b,c)a + \overline{R}(c,a)b,d) = 0$; soient donc a,b,c,d quatre vecteurs quelconques de $\mathrm{T}_p\mathcal{M}$. Rappelons que Ric, parallèle, commute avec l'algèbre d'holonomie donc en particulier avec tous les $R(x,y)$.

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ric}(\overline{R}(a,b)c + \overline{R}(b,c)a + \overline{R}(c,a)b,d)\\
&= \omega(\operatorname{Ric}(R(\operatorname{Ric} a, \operatorname{Ric} b)c + R(\operatorname{Ric} b, \operatorname{Ric} c)a + R(\operatorname{Ric} c, \operatorname{Ric} a)b),d)\\
&= \omega(\operatorname{Ric}(R(\operatorname{Ric} a, \operatorname{Ric} b) \operatorname{Ric} c + R(\operatorname{Ric} b, \operatorname{Ric} c) \operatorname{Ric} a + R(\operatorname{Ric} c, \operatorname{Ric} a) \operatorname{Ric} b),d)\\
&= 0 \qquad \text{par l'identité de Bianchi sur } R.
\end{aligned}$$

D'où le résultat préliminaire. Ajoutons une remarque :

Affirmation 2. Le tenseur de Ricci formel $\overline{\operatorname{ric}}(a,b) = \operatorname{tr} \overline{R}(a,\cdot\,)\, b$ associé au tenseur $\overline{R}$ vérifie alors : $\overline{\operatorname{ric}}(\,\cdot\,,\cdot\,) = g(-\operatorname{Ric}^2\cdot\,,\cdot\,)$, où Ric est ici vu comme endomorphisme de $\mathrm{T}_p\mathcal{M}/\ker \operatorname{Ric}$.

Vérifions-le. Soient a,b dans $\mathrm{T}_p\mathcal{M}$ et $(e_i)_{i=1}^k$ une base g-pseudo-orthonormée de $\mathrm{T}_p\mathcal{M}/\ker \operatorname{ric}$: $g(e_i,e_j) = \varepsilon_i\delta_{i,j}$, avec $\varepsilon_i = \pm 1$; soient $(\hat{e}_i)_{i=1}^k$ des relevés des e_i dans $\mathrm{T}_p\mathcal{M}$.

$$\begin{aligned}
\overline{\operatorname{ric}}(a,b) \;&=\; \operatorname{tr}_{\mathrm{T}_p\mathcal{M}/\ker \operatorname{ric}}(R(\operatorname{Ric} a, \operatorname{Ric}\cdot\,)b)\\
&\qquad \text{(ici } R(\operatorname{Ric} a, \operatorname{Ric}\cdot\,)b \text{ est vu comme un endomorphisme de } \mathrm{T}_p\mathcal{M}/\ker \operatorname{ric}\text{)}\\
&=\; \sum_i \varepsilon_i g(R(\operatorname{Ric} a, \operatorname{Ric} e_i)b,e_i)\\
&=\; \sum_i \varepsilon_i \operatorname{ric}(R(\operatorname{Ric} a, \operatorname{Ric} \hat{e}_i)b,\hat{e}_i)\\
&=\; \sum_i \varepsilon_i \operatorname{ric}(R(b,\hat{e}_i) \operatorname{Ric} a, \operatorname{Ric} \hat{e}_i)\\
&=\; -\sum_i \varepsilon_i \operatorname{ric}(\operatorname{Ric} R(b,\hat{e}_i) \operatorname{Ric} a,\hat{e}_i) \text{ car Ric est ric-antiautoadjoint}\\
&=\; -\sum_i \varepsilon_i \operatorname{ric}(R(b,\hat{e}_i) \operatorname{Ric}^2 a,\hat{e}_i)\\
&=\; -\Big[\operatorname{tr}[R(b,\cdot\,) \operatorname{Ric}^2 a] - \operatorname{tr}[(R(b,\cdot\,) \operatorname{Ric}^2 a)_{|\ker \operatorname{Ric}}]\Big].
\end{aligned}$$

Or, $(R(b,\cdot\,) \operatorname{Ric}^2 a)_{|\ker \operatorname{Ric}} = 0$. Soit en effet $c \in \ker \operatorname{Ric}$, $d \in \mathrm{T}_p\mathcal{M}$:

$$\begin{aligned}
\omega(R(b,c) \operatorname{Ric}^2 a,d) \;&=\; \omega(\operatorname{Ric}^2 R(b,c)a,d)\\
&=\; -\omega(\operatorname{Ric} R(b,c)a, \operatorname{Ric} d)\\
&\qquad \text{car Ric est } \omega-\text{antiautoadjoint}\\
&=\; -\operatorname{ric}(R(b,c)a, \operatorname{Ric} d)\\
&=\; -\operatorname{ric}(R(a, \operatorname{Ric} d)b,c)\\
&=\; 0 \quad \text{car } c \in \ker \operatorname{ric}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\overline{\mathrm{ric}}(a,b) = -\operatorname{tr}(R(b,\cdot)\operatorname{Ric}^2 a) = -\operatorname{ric}(b,\operatorname{Ric}^2 a)$ par définition de ric. Enfin $-\operatorname{ric}(b,\operatorname{Ric}^2 a) = -\operatorname{ric}(\operatorname{Ric}^2 b,a)$ car Ric est ric-antiautoadjoint. La remarque annoncée suit.

Soit maintenant $\mu = \prod_i P_i^{n_i}$ la décomposition de μ en produit de puissances de polynômes irréductibles, deux à deux premiers entre eux. Quitte à permuter les indices, on suppose que $P_0 = X$, avec éventuellement $n_0 = 0$. Soit $\mathbf{F}_i = \ker P_i(\mathrm{Ric})$, c'est une distribution parallèle, car Ric est supposé parallèle, on considère alors pour chaque i, $\mathcal{M}_i$ une feuille intégrale de cette distribution. Les $\mathcal{M}_i$ sont des sous-variétés totalement géodésiques de $\mathcal{M}$. En particulier, leur tenseur de Ricci propre Ric_i est la restriction de tenseur Ric de $\mathcal{M}$ à $\mathrm{T}\mathcal{M}_i$, de même pour R_i, restriction de R à $(\otimes^3(\mathrm{T}\mathcal{M}_i)) \otimes (\mathrm{T}^*\mathcal{M}_i)$.

Par conséquent, pour tout $i \geq 1$, ric_i est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée ; $\overline{R}_i$ est donc défini comme R_i sur $(\otimes^3(\mathrm{T}_p\mathcal{M}_i)) \otimes (\mathrm{T}_p^*\mathcal{M}_i)$. Vis-à vis de la métrique g_i, il satisfait les propriétés algébriques ponctuelles d'un tenseur de courbure sur $\mathcal{M}_i$ et pour tous a et b, $\overline{R}(a,b)$ est dans l'algèbre d'holonomie. Cela suffit pour appliquer le théorème 1 page 19 au triplet $(\mathrm{T}_p\mathcal{M}_i,g_i,\overline{R}_i)$. Comme $\overline{\mathrm{ric}}_i(\cdot,\cdot) = g_i(\cdot, -\mathrm{Ric}_i^2\,\cdot)$ et comme Ric_i^2 est non dégénéré, on obtient : Ric_i^2 est semi-simple. Ric_i l'est donc aussi, *i.e.* $n_i = 1$.

Traitons le cas $i = 0$. On applique cette fois le théorème 1 à $(\mathrm{T}_p\mathcal{M}_0/\ker \mathrm{ric}_0, g_0, \overline{R}_0)$, qui vérifie de même les hypothèses nécessaires. Comme $\overline{\mathrm{ric}}_0(\cdot,\cdot) = g_0(\cdot, -\mathrm{Ric}_0^2\,\cdot)$ et que Ric_0^2 est nilpotent, on obtient : $(\mathrm{Ric}_0^2)^2 = 0$, *i.e.* $\mathrm{Ric}_0^4 = 0$ **où $\mathbf{Ric_0}$ est compris comme endomorphisme de $\mathbf{T_p\mathcal{M}_0/\ker ric}$**, c'est-à-dire en fait, dans $\mathrm{T}_p\mathcal{M}_0$: $\mathrm{Ric}_0^5 = 0$.

On peut cependant obtenir un peu mieux. Montrons que $\overline{\mathrm{ric}}_0 = 0$, donc que $\mathrm{Ric}_0^2 = 0$, vu comme élément de $\mathrm{End}(\mathrm{T}_p\mathcal{M}_0/\ker \mathrm{ric})$. L'endomorphisme Ric de $\mathrm{T}_p\mathcal{M}$ vérifie alors : $\mathrm{Ric}_0^3 = 0$, ce qui est le résultat annoncé.

$\mathrm{T}_p\mathcal{M}/\ker \mathrm{ric}$ est muni de la forme bilinéaire symétrique non dégénérée g_0 et de l'endomorphisme g_0-autoadjoint Ric^2. Nécessairement $(\mathrm{Ric}^2)^2 = 0$, supposons que : $\mathrm{Ric}^2 \neq 0$; le travail de Klingenberg [Kli54] ou le chapitre 2 de cette these (voir le théorème 2 page 62 ou bien la table récapitulative en fin de chapitre, cas a et b symétriques) donne alors l'existence d'une base β simultanément :

- de Jordan pour Ric^2, *i.e.* : $\mathrm{Mat}_\beta(\mathrm{Ric}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overbrace{}^{E_2} & \overbrace{}^{\mathrm{Ric}^2(E_1)} & \overbrace{}^{E_1} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{n_2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$

- «canonique» pour g, en ce sens : $\mathrm{Mat}_\beta(g) = \left(\begin{array}{c|cc} I_{r_2,s_2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{r_1,s_1} \\ 0 & I_{r_1,s_1} & 0 \end{array}\right)$

avec $n_1 = \dim E_1 = \dim \operatorname{Im} \mathrm{Ric}^2$,
$n_2 = \dim E_2 = \dim\,[\ker \mathrm{Ric}^2/(\ker \mathrm{Ric}^2 \cap \operatorname{Im} \mathrm{Ric}^2)]$ et :

$I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$, les r_i et s_i étant des entiers satisfaisant : $r_i + s_i = n_i$.

Notons $\beta = ((e_i^2)_{i=1}^{n_2},(\mathrm{Ric}^2(e_i^1))_{i=1}^{n_1},(e_i^1)_{i=1}^{n_1})$. Alors, pour tout $i \in [\![1,n_1]\!]$:

$$\begin{aligned}
\pm 1 &= g(\mathrm{Ric}^2 e_i^1,e_i^1) = \overline{\mathrm{ric}}(e_i^1,e_i^1)\\
&= \sum_{j=1}^{n_2} \pm \underbrace{g(\overline{R}(e_i^1,e_j^2)e_i^1,e_j^2)}_{A_{i,j}} + \sum_{j=1}^{n_1} \pm \underbrace{g(\overline{R}(e_i^1,e_j^1)e_i^1, \mathrm{Ric}^2 e_j^1)}_{B_{i,j}} + \sum_{j=1}^{n_1} \pm \underbrace{g(\overline{R}(e_i^1, \mathrm{Ric}^2 e_j^1)e_i^1,e_j^1)}_{C_{i,j}}.
\end{aligned}$$

Comme dans la démonstration du théorème 1, il apparaît que tous les termes sont nuls.

- $$\begin{aligned}
A_{i,j} &= g(\overline{R}(e_i^1,e_j^2)e_i^1,e_j^2)\\
&= g(R(\mathrm{Ric}\, e_i^1, \mathrm{Ric}\, e_j^2)e_i^1,e_j^2)\\
&= g(R(e_i^1,e_j^2)\,\mathrm{Ric}\, e_i^1, \mathrm{Ric}\, e_j^2)\\
&= g(\mathrm{Ric}\, R(e_i^1,e_j^2)e_i^1, \mathrm{Ric}\, e_j^2)\\
&= -g(R(e_i^1,e_j^2)e_i^1, \mathrm{Ric}^2\, e_j^2)\\
&= -g(R(e_i^1,e_j^2)e_i^1,0) = 0
\end{aligned}$$
- $B_{i,j} = C_{i,j}$ et :

$$\begin{aligned}
C_{i,j} &= g(R(\mathrm{Ric}\, e_i^1, \mathrm{Ric}(\mathrm{Ric}^2\, e_j^1))e_i^1,e_j^1)\\
&= g(R(e_i^1,e_j^1)\,\mathrm{Ric}\, e_i^1, \mathrm{Ric}^3\, e_j^1))\\
&= g(\mathrm{Ric}\, R(e_i^1,e_j^1)e_i^1, \mathrm{Ric}^3\, e_j^1))\\
&= -g(R(e_i^1,e_j^1)e_i^1, \mathrm{Ric}^4\, e_j^1))\\
&= 0
\end{aligned}$$

D'où contradiction. Par conséquent, $\mathrm{Ric}^2 = 0$ dans $\mathrm{End}(\mathrm{T}_p\mathcal{M}_0/\ker \mathrm{ric}_0)$ *i.e.* $\mathrm{Ric}^3 = 0$. □

Remarque. Une démonstration directe, n'utilisant pas le résultat pseudo-riemannien qui précède, est sans doute possible. Nous n'en avons cependant pas trouvé. Elle ne peut notamment pas résulter d'un simple aménagement de la preuve pseudo-riemannienne, celle-ci reposant profondément sur une propriété du tenseur R qui n'a pas d'équivalent symplectique :

$$\forall a,b,c,d,\, g(R(a,b).c,d) = g(R(c,d).a,b).$$

Annexe : l'article sur les variétés pseudo-riemanniennes Ricci-parallèles

On the pseudo-Riemannian manifolds whose Ricci tensor is parallel

Charles BOUBEL, Lionel BÉRARD BERGERY

Nancy, April 9th, 1999
Revised December 16th, 1999

Abstract: Ricci-parallel Riemannian manifolds have a diagonal Ricci endomorphism Ric and are therefore, at least locally, a product of Einstein manifolds. This fails in the pseudo-Riemannian case. Using, on the one side, a general result in linear algebra due to Klingenberg (see [Kli54]) and on the other side, a theorem on the holonomy of pseudo-Riemannian manifolds (see [Wu67]), this work classifies the different types of pseudo-Riemannian manifolds whose Ricci tensor is parallel.

Mathematics Subject classification (1991): 53 B 30, 53 C 50.
Keywords: pseudo-Riemannian manifolds, Ricci curvature, holonomy group.

Foreword: The first section discusses de Rham – Wu's theorem, its consequences in our problem, and the reasons why the pseudo-Riemannian case allows specific phenomena. The main theorem, that classifies these phenomena, is stated in section 2 and is proven in sections 3 and 4. Section 5 considers the complex case, i.e. complex manifolds with a complex Riemannian structure, which appears as a special case of the main theorem. Finally, section 6 gives some details on certain low-dimensional cases, on the holonomy decomposition as compared with the Ricci-decomposition, on the number of (linearly independant) metrics with the same connection (hence the same Ricci curvature), together with some symmetric examples.

The authors want to thank the referees for their (very) careful reading of the manuscript and helpful suggestions to improve it.

Notations: If (M,g) is a Riemannian or pseudo-Riemannian manifold, R is its (3,1)-curvature tensor and ric its Ricci tensor, *i.e.* ric is a bilinear symmetric form on each tangent space defined by ric : $u,v \mapsto \operatorname{tr} R(u,.)v$. We will also denote by $< .,. >$ the metric g, and by Ric the g-selfadjoint endomorphism induced by ric, *i.e.* the endomorphism such that $\mathrm{ric}(.,.) =< \mathrm{Ric}\,.,. >$. We denote by H the restricted holonomy group of M, simply called "holonomy group" here, and classical Lie algebras by old german letters: $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{so}$.

1 Motivation : a look at the Riemannian case

The main tool of this work is a theorem by Wu, linking decomposition of the holonomy and Riemannian products (see [Wu67]). This is a generalization to pseudo-Riemannian geometry of a well-known theorem due to de Rham. We give in this section only a part of the result (existence theorem), and postpone to section 6.2 all questions about uniqueness.

Theorem (de Rham – Wu) *Let (M,g) be a complete, simply connected pseudo-Riemannian manifold and $x \in M$. Suppose that $T_xM = E_1 \overset{\perp}{\oplus} E_2$ is a holonomy stable decomposition of T_xM. Then there is a unique couple $((M_1,g_{|M_1}),(M_2,g_{|M_2}))$ of submanifolds of M containing x and a unique isometry f such that:*

- $T_xM_1 = E_1$ *and* $T_xM_2 = E_2$,
- $M_1 \times M_2 \xrightarrow{f} M$,
- $f_{|M_1\times\{x\}} = \mathrm{Id}_{M_1}$ *and* $f_{|\{x\}\times M_2} = \mathrm{Id}_{M_2}$.

Remarks: 1) Here " $M_1 \times M_2$ " stands for the Riemannian product of M_1 and M_2.
2) By hypothesis, E_1 and E_2 are holonomy-stable, mutually orthogonal. So there exist Σ_1 and Σ_2 two mutually orthogonal parallel distributions equal to E_1 and E_2 at x, respectively. M_1 and M_2 are the maximal integral manifolds of Σ_1 and Σ_2, containing x. They are g-non-degenerate. The other maximal integral manifolds of Σ_1 and Σ_2 are isometric to M_1 and M_2, so M_1 and M_2 do not depend of the choice of x, up to isometry.
3) Without requiring the completeness and the simple connectedness, the same result holds with a local isometry.

Corollary *If (M,g) is a complete, simply connected Riemannian manifold with a parallel Ricci tensor* ric, *then M splits canonically into a Riemannian product of Einstein manifolds. That is to say, there is a unique sequence of reals $(\lambda_i)_{i=1}^n$, a unique sequence of Riemannian Einstein manifolds $(M_i)_{i=1}^n$, [such that $\mathrm{ric} = \lambda_i g$ on each M_i], and an isometry f mapping the Riemannian product $\prod_{i=1}^n M_i$ onto M. That isometry f is unique up to composition with a product of isometries of each factor M_i.*

In particular, simply connected Riemannian symmetric spaces are all a canonical product of Einstein factors. Once again, without completeness and simple connectedness, these results hold locally.

The above corollary is a classical and immediate consequence of de Rham – Wu's theorem. Nevertheless, in view of future comparison, we recall the

Proof of the corollary: Ric is g-selfadjoint and g is positive definite, so Ric is diagonalizable. Let us denote by $E_{i,x} = \ker(\mathrm{Ric} - \lambda_i \mathrm{Id})$ the eigenspaces of Ric at a point x, then we have an orthogonal product:

$$T_xM = \overset{\perp}{\underset{i}{\oplus}} E_{i,x}.$$

By assumption now, ric is parallel, g too, and thus Ric and the $E_{i,x}$ are parallel. The decomposition of each T_xM is thus holonomy-stable. As it is also orthogonal, de Rham – Wu theorem gives an isometry $f : M \to \prod_i M_i$, where the M_i are maximal integral submanifolds of the parallel distributions generated by the $E_{i,x}$. $\mathrm{Ric}_{|M_i}$ has the only eigenvalue λ_i, and is diagonalizable, thus $\mathrm{ric}_{|M_i} = \lambda . g_{|M_i}$, *i.e.* the M_i are Einstein. The decomposition $T_xM = \oplus E_{i,x}$ is canonical, so the corresponding values of λ_i and the associated M_i too (up to isometry).

The uniqueness of f is not a deep result here but requires a few technical lines. Let us suppose f and h are two isometries mapping $\prod_i M_i$ onto M; let us denote by a the n-uple

$(a_i)_{i=1}^n = f^{-1}(x)$ and by b the n-uple $(b_i)_{i=1}^n = h^{-1}(x)$. By definition, $T_a(\prod_i M_i) = \oplus_i T_{a_i} M_i$ is the decomposition of $T_a(\prod_i M_i)$ into the eigenspaces of its Ricci operator. And similarly with h and b. So, necessarily: $\forall i, df(T_{a_i} M_i) = E_{i,x}$ and $\forall i, dh(T_{b_i} M_i) = E_{i,x}$. Now, for each i:

- $\{a_1\} \times \ldots \times \{a_{i-1}\} \times M_i \times \{a_{i+1}\} \times \ldots \times \{a_n\}$ is by definition the maximal integral submanifold of the parallel distributions generated by $T_{a_i} M_i$,
- M_i is by definition the maximal integral manifold of the parallel distribution generated by $E_{i,x}$.

Since f is an isometry, necessarily, $f(\{a_1\} \times \ldots \times \{a_{i-1}\} \times M_i \times \{a_{i+1}\} \times \ldots \times \{a_n\}) = M_i$, and similarly with h: $h(\{b_1\} \times \ldots \times \{b_{i-1}\} \times M_i \times \{b_{i+1}\} \times \ldots \times \{b_n\}) = M_i$. So, in restriction to the factor M_i, $h^{-1} \circ f$ is an isometry ϕ_i of this factor (mapping b_i on a_i). Finally, $f = h \circ (\phi_1, \ldots, \phi_n)$. □

Notice that the above corollary is not true in the pseudo-Riemannian case.

Indeed, Ric is still a g-selfadjoint operator, but g is no longer positive definite, so Ric is no longer necessarily diagonalizable. In particular, it may have pairs of non-real complex conjugate eigenvalues and it may have a non-trivial nilpotent part. Now [Kli54], [this thesis, next chapter] or [BBB] gives a complete description of what may be an endomorphism S of a vector space [on any field], when S is selfadjoint with respect to a non-degenerate bilinear form h. It gives a normal form for such an S, which is a particular Jordan form. When the field is $\mathbb{R}$, the signature of h and the nilpotence index of the nilpotent part of S are linked, but both obstructions for S to be diagonalizable may occur: non-real eigenvalues and a non-trivial nilpotent part. So a Ricci-parallel pseudo-Riemannian manifold is *a priori* quite different from a product of Einstein manifolds. For example, there exists some pseudo-Riemannian symmetric spaces with a Ricci endomorphism satisfying $\mathrm{Ric} \neq 0$, $\mathrm{Ric}^2 = 0$.

However, some properties of the holonomy group and some consequences of [Kli54] prevent Ric from being too complicated. A good part of the Riemannian result holds again: Einstein factors appear in the Riemannian product, and two other new types of factors. The main theorem below explains it in terms of (conditions on) the minimal polynomial of the operator Ric. We recall that the minimal polynomial is the unique unitary polynomial generating the ideal of all polynomials which annihilates the operator Ric. Notice that in the Riemannian case, Ric is diagonalizable, so in these terms, the corollary above is the geometric counterpart of the fact that the minimal polynomial of Ric is a product of mutually prime polynomials which are irreducible of degree one. In the pseudo-Riemannian case, the minimal polynomial of Ric may have irreducible factors of degree two and also there may be one irreducible factor to the power two. After the proof of the theorem, we will give in section 5 a few more explanations of one of the new factor types and make a few remarks on the low-dimensional cases in section 6.

2 The main result in the pseudo-Riemannian case

The Main Theorem *Let (M,g) be a pseudo-Riemannian manifold with a parallel Ricci tensor* ric, *and let μ be the minimal polynomial of* Ric. *Then:*

(i) $\mu = \prod_i P_i$ *where:*

- $\forall i \neq j, P_i \wedge P_j = 1$, *[i.e. P_i and P_j are mutually prime],*
- $\forall i, P_i$ *is irreducible or* $P_i = X^2$.

(ii) *There is a canonical family $(M_i)_i$ of pseudo-Riemannian manifolds such that the minimal polynomial of* $\mathrm{Ric}_i = \mathrm{Ric}_{M_i}$ *on each M_i is P_i, and a local isometry f mapping the Riemannian product $\prod_i M_i$ onto M. f is unique up to composition with a product of isometries of each factor M_i. If M is complete and simply connected, f is an isometry.*

That is to say, M splits canonically into a Riemannian product, with factors M_i of one of the four following types — we denote by P_i the minimal polynomial of Ric_i, the Ricci endomorphism of M_i—:

- if $P_i = (X - \alpha_i)^k$ ($\alpha_i \neq 0$), then $k = 1$, *i.e.* M_i is Einstein,
- if $P_i = X^k$, then $k \leq 2$, so
  - ⋆ either $k = 1$, *i.e.* M_i is Ricci-flat, [which is a particular case of Einstein],
  - ⋆ or Ric_i is nilpotent of index 2,
- if $P_i = (X^2 + p_iX + q_i)^k$ (power of an irreducible), then $k = 1$, so Ric_i has no nilpotent part but is not diagonalizable on $\mathbb{R}$. We will see in section 5 that M_i is then a complex Riemannian manifold, which is Einstein for this structure.

The last two types do not appear in the Riemannian case.

Warning: the obtained decomposition is not the holonomy decomposition (see section 6.2).

3 Two algebraic lemmas

Lemma 1 *Let E be a real or complex vector space endowed with a non-degenerate bilinear form $g =< .,. >$. Let D be a totally isotropic subspace of E. Let R be a (3,1)-tensor with the algebraic properties of a curvature tensor,* i.e. *:*

- $R(x,y) = -R(y,x)$
- $R(x,y).z + R(y,z).x + R(z,x).y = 0$ *("Bianchi identity"),*
- $< R(x,y).z,t >=< R(z,t).x,y >$ *(which follows from the first two relations).*

By definition, $\mathrm{ric}(u,v) = \mathrm{tr}(x \mapsto R(u,x).v)$*, and* Ric *is the g-selfadjoint associated endomorphism,* i.e. *the endomorphism such that* $< \mathrm{Ric}\, .,. >= \mathrm{ric}(.,.)$.
We assume that, for each couple (x,y) in E^2, the endomorphism $R(x,y)$ preserves D.
Then we have:

(i) $\forall x \in D, \forall y \in D^\perp, R(x,y) = 0$
(this is true in particular for x and y in D because $D \subset D^\perp$),

(ii) Ric *preserves D (i.e.* $\mathrm{ric}(D,D^\perp) = \{0\}$*),*

(iii) *If $\beta = (e_i)_{i=1}^p$ is a basis of D and $(e'_i)_{i=1}^p$ a family such that: $\forall i,j$, $< e_i,e'_j >= \delta_{i,j}$ and $< e'_i,e'_j >= 0$),*
then ric$(e_i,e'_j) = \mathrm{tr}(R(e'_j,e_i)_{|D})$.

Proof: (i) Let us take $x \in D$, $y \in D^\perp$ and $z,t \in E$. Then $< R(x,y).z,t >=< R(z,t).x,y >$. By assumption, $R(z,t).x \in D$, thus both terms are zero and **(i)** follows.
(ii) Let us take $(e_i)_{i=1}^p$ a basis of D and $(e'_i)_{i=1}^p$ a "dual" family of $(e_i)_{i=1}^p$ as defined in **(iii)**. Let D' be the vector space generated by the e_i and the e'_i, and $(f_i)_{i=1}^q$ a pseudo-orthonormal basis of $D'^\perp$, *i.e.* such that $\forall i,j$, $< f_i,f_j >= \varepsilon_i\delta_{i,j}$, with $\varepsilon_i = \pm 1$. Then, for $i,j \in \{1,..,p\}$,

point **(i)** of the Lemma implies:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ric}(e_i,e_j) &= \sum_{k=1}^{p} < R(e_i,e_k).e_j,e'_k > + \sum_{k=1}^{q} \varepsilon_k < R(e_i,f_k).e_j,f_k > + \sum_{k=1}^{p} < R(e_i,e'_k).e_j,e_k > \\
&= \sum_{k=1}^{p} < 0.e_j,e'_k > + \sum_{k=1}^{q} \varepsilon_k < 0.e_j,f_k > + \sum_{k=1}^{p} < R(e_j,e_k).e_i,e'_k > \\
&= 0 + 0 + \sum_{k=1}^{p} < 0.e_i,e'_k > = 0
\end{aligned}$$

and for $i \in \{1,..,p\}$ and $j \in \{1,..,q\}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ric}(e_i,f_j) &= \sum_{k=1}^{p} < R(e_i,e_k).f_j,e'_k > + \sum_{k=1}^{q} \varepsilon_k < R(e_i,f_k).f_j,f_k > + \sum_{k=1}^{p} < R(e_i,e'_k).f_j,e_k > \\
&= \sum_{k=1}^{p} < 0.f_j,e'_k > + \sum_{k=1}^{q} \varepsilon_k < 0.f_j,f_k > + \sum_{k=1}^{p} < R(f_j,e_k).e_i,e'_k > \\
&= 0 + 0 + \sum_{k=1}^{p} < 0.e_i,e'_k > = 0
\end{aligned}$$

For **(iii)**, we will show a little more.

Claim: $\forall i,j,k,l \in \{1,..,p\}, \ < R(e'_i,e_j).e'_k,e_l > = < R(e'_k,e_j).e'_i,e_l >$.

Using again **(i)**, this implies:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ric}(e_i,e'_j) &= \sum_{k=1}^{p} < R(e_i,e_k).e'_j,e'_k > + \sum_{k=1}^{q} \varepsilon_k < R(e_i,f_k).e'_j,f_k > + \sum_{k=1}^{p} < R(e_i,e'_k).e'_j,e_k > \\
&= 0 + 0 - \sum_{k=1}^{p} < R(e'_k,e_i).e'_j,e_k > \\
&= -\sum_{k=1}^{p} < R(e'_j,e_i).e'_k,e_k > \ = \sum_{k=1}^{p} < R(e'_j,e_i).e_k,e'_k > \\
&= \mathrm{tr}\, R(e'_j,e_i)_{|D}
\end{aligned}$$

The initial claim follows from Bianchi identity:

$$\begin{aligned}
< R(e'_i,e_j).e'_k,e_l > &= - < R(e_j,e'_k).e'_i,e_l > - < R(e'_k,e'_i).e_j,e_l > \\
&= < R(e'_k,e_j).e'_i,e_l > - < R(e_j,e_l).e'_k,e'_i > \\
&= < R(e'_k,e_j).e'_i,e_l > - < 0.e'_k,e'_i > \\
&= < R(e'_k,e_j).e'_i,e_l > .
\end{aligned}$$

$\square$

Lemma 2 *Let (E,g) be a vector space endowed with a non-degenerate symmetric bilinear form $g = < .,. >$, let h be another symmetric bilinear form and let S be the g-selfadjoint endomorphism induced by h: i.e. $h(.,.) = < S.,. >$.*

Let P be the minimal polynomial of S and $\prod_i P_i^{n_i}$ its decomposition into a product of powers of prime polynomials P_i and let $E_i = \ker P_i^{n_i}(S)$ be the characteristic subspaces of S. Then the E_i are both g- and h-orthogonal.

Proof: Let us take $x \in E_i$, $y \in E_j$ $(i \neq j)$, U and V in $\mathbb{R}[X]$ such that: $UP_i^{n_i} + VP_j^{n_j} = 1$.

$$\begin{aligned}
\text{Then: } g(x,y) &= g((UP_i^{n_i} + VP_j^{n_j})(S).x,y) \\
&= g(U(S)P_i^{n_i}(S).x,y) + g(x,V(S)P_j^{n_j}(S).y) \\
&= g(0,y) + g(x,0) \ = \ 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{and: } h(x,y) &= g((UP_i^{n_i} + VP_j^{n_j})(S).Sx,y) \\
&= g(SU(S)P_i^{n_i}(S).x,y) + g(x,SV(S)P_j^{n_j}(S).y) \\
&= g(0,y) + g(x,0) \ = \ 0.
\end{aligned}$$

□

4 Proof of the theorem

4.1 First part

We will first prove the following

<u>Claim</u>: Let $\mu = \prod_i P_i^{n_i}$ be the decomposition of μ into a product of powers of mutually prime irreducible polynomials. Then M is locally isometric to a canonical Riemannian product $\prod_i M_i$, where the minimal polynomial of each Ric_{M_i} is $P_i^{n_i}$. This isometry is global if M is moreover complete, simply connected.

Let us apply Lemma 2 to the tangent space (T_xM,g) at each point x of M, with $h = \mathrm{ric}$. It splits T_xM into a g-orthogonal sum of canonical subspaces: $T_xM = \overset{\perp}{\underset{i}{\oplus}} E_{x,i}$, where the $E_{x,i} = \ker P_i^{n_i}$ are now the characteristic subspaces of Ric at the point x. By assumption, ric is moreover parallel, and therefore Ric and the $E_{x,i}$ too. Thus the obtained decomposition of T_xM is holonomy-stable. By de Rham – Wu theorem, M is locally isometric to the Riemannian product $\prod_i M_i$, where the M_i are submanifolds such that: $\forall x \in M_i, T_xM_i = E_{x,i}$ (the M_i are integral submanifolds of the parallel distributions $E_{x,i}$).

By definition of the $E_{x,i}$, $\mathrm{Ric}_i = \mathrm{Ric}_{|M_i} = \mathrm{Ric}_{|E_i}$ has a minimal polynomial of the form $P_i^{n_i}$, P_i prime. The uniqueness of the local isometry $M \simeq \prod_i M_i$ follows from that of the decomposition of $T_xM = \oplus_i E_{x,i}$ and from the explanations detailed in the proof of the corollary of section 1. So the first part is proved.

In the following, we will deal with one of the $(M_i,g_{|M_i})$ and forget the index i. That is to say, we deal with a manifold (M,g), the Ricci endomorphism Ric of which has a minimal polynomial of the form P^n, where P is irreducible.

4.2 Second part

We will prove here that $n = 1$, except possibly if $P = X$, in which case $n \leq 2$. Points (i) and (ii) of the theorem follow. Let us begin with a few notations.

• If $\deg P = 1$, *i.e.* $P(X) = (X - \alpha)$, let E be the tangent space T_xM of M at a certain point x, and $T = P(\mathrm{Ric})$. Remark: T is a nilpotent endomorphism.

• If $\deg P = 2$, *i.e.* $P(X) = (X - \alpha)(X - \overline{\alpha})$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, let F be the complexified space of T_xM. Let us denote again by g, R, ric, and Ric the complexified tensors. We take $E = \ker(\mathrm{Ric} - \alpha \mathrm{Id}_F)^n \subset F$ and $T = \mathrm{Ric} - \alpha \mathrm{Id}_E$ on E. T is nilpotent.

Notice that by Lemma 2, $E^\perp = \ker(\mathrm{Ric} - \overline{\alpha}\mathrm{Id})^n$.

<u>*First Claim:* if $n > 1$, then $\alpha = 0$.</u> [In particular, if $n > 1$, $\deg P = 1$.]

Let us suppose $n > 1$. Let $D = \mathrm{Im}\, T^{n-1}$. D is totally isotropic: let $x = T^{n-1}u \in D$, $y = T^{n-1}v \in D$, we have $< x,y > = < T^{n-1}u, T^{n-1}v > = < T^{2n-2}u, v > = < 0, v > = 0$. Indeed, $n > 1$, so $2n - 2 \geq n =$ nilpotence index of T. Let $d = \dim D$, $(e_i)_{i=1}^d$ a basis of D, $(e'_i)_{i=1}^d$ a dual family of $(e_i)_{i=1}^d$ [in the sense of lemma 1 (iii)]. Applying Lemma 1, (iii) with E, D and R:

$$\mathrm{ric}(e_i, e'_j) = \mathrm{tr}(R(e'_j, e_i)_{|D})$$

But D is endowed with a non-degenerate bilinear form: let $g_1 : (x,y) \mapsto < T^{n-1}x, y >$; $\ker g_1 = \ker T^{n-1}$, so g_1 is well defined, non-degenerate on the quotient space $E/\ker T^{n-1}$. Now, $T^{n-1} : E/\ker T^{n-1} \to D = \mathrm{Im}\, T^{n-1}$ is an isomorphism, and so the following formula:

$$g'_1(T^{n-1}\ \cdot\ , T^{n-1}\ \cdot) = g_1(\,\cdot\,,\cdot\,)$$

defines a non-degenerate symmetric bilinear form g'_1 on D. Now g_1 is holonomy stable, and ric is parallel by hypothesis. As a consequence, all the $R(x,y)$ are g_1- and ric-antiselfadjoint, whether we are dealing with the complexified version of R or not. And so the same statement holds for g'_1 on D. Therefore $\forall x,y \in E, R(x,y)_{|D} \in \mathfrak{o}(g'_1)$. But as g'_1 is non-degenerate, the elements of $\mathfrak{o}(g'_1)$ are trace free. So, $\forall x,y \in E, \mathrm{tr}(R(x,y)_{|D}) = 0$.

Now, from lemma 1,(ii), it follows that: $\forall x \in D, \forall y \in D^\perp, \mathrm{ric}(x,y) = 0$. Summing up the results,

- $\forall i \in \{1,..,d\}, \forall y \in D^\perp$, $\mathrm{ric}(e_i, y) = 0$
- $\forall i \in \{1,..,d\}, \forall j \in \{1,..,d\}$, $\mathrm{ric}(e_i, e'_j) = 0$

But $\mathrm{codim}\, D^\perp = \dim D = d$, so we have reached: $\forall i \in \{1,..,d\}, \forall x \in E$, $\mathrm{ric}(e_i, x) = 0$. That is to say, $\{0\} \subsetneq D \subset \ker(\mathrm{ric})$. So ric is degenerate, and $\alpha = 0$.

<u>*Second Claim:* If $\alpha = 0$, that is if $P = X^n$, then $n \leq 2$.</u>

Here $T = \mathrm{Ric}$. We cut again the proof into two steps: $n \leq 3$, and then $n \neq 3$.

<u>$n \leq 3$:</u> Let us suppose $n \geq 4$, and take $D = \mathrm{Im}\,\mathrm{Ric}^{n-2}$. We use exactly the same arguments. D is totally isotropic: let $x = \mathrm{Ric}^{n-2}\, u \in D, y = \mathrm{Ric}^{n-2}\, v \in D$, we have:

$$< x,y > \ = \ < \mathrm{Ric}^{n-2}\, u, \mathrm{Ric}^{n-2}\, v > \ = \ < \mathrm{Ric}^{2n-4}\, u, v > \ = \ < 0, v > = 0.$$

Indeed, $n \geq 4$, so $2n - 4 \geq n =$ nilpotence index of T. Let us define g_2 by the formula: $g_2(x,y) \ = \ < \mathrm{Ric}^{n-2}\, x, y >$. Then g_2 is well defined, non-degenerate on $E/\ker \mathrm{Ric}^{n-2}$. As above, $\mathrm{Ric}^{n-2} : E/\ker\mathrm{Ric}^{n-2} \to D = \mathrm{Im}\,\mathrm{Ric}^{n-2}$ is an isomorphism, and so the following formula:

$$g'_2(\mathrm{Ric}^{n-2}\ \cdot\,, \mathrm{Ric}^{n-2}\ \cdot) = g_2(\,\cdot\,,\cdot\,)$$

defines a non-degenerate symmetric bilinear form g'_2 on D. By the same way: $\forall x,y \in E, R(x,y)_{|D} \in \mathfrak{o}(g'_2)$, g'_2 is non-degenerate on D, and so the $R(x,y)$ are tracefree.

By lemma one and the same remarks, this implies that D is Ricci-flat, *i.e.* that $\mathrm{Im}\,\mathrm{Ric}^{n-1} = \mathrm{Ric}(D) = \{0\}$. But the nilpotence index of Ric is n, so it is impossible. So $n \leq 3$.

$\underline{n \neq 3}$: Let us now suppose $n = 3$. $\operatorname{Im}\mathrm{Ric}^{n-2}$ is no longer totally isotropic. Let us now take $D = \operatorname{Im}\mathrm{Ric} \cap \ker \mathrm{Ric}$, which is totally isotropic.

Now is involved the purely algebraic result which was told about at the beginning. In our case, [Kli54], [this thesis, next chapter] or [BBB] give the existence of some canonical basis β which is both:
(1) Jordan for Ric, i.e.:

$$\mathrm{Mat}_\beta(\mathrm{Ric}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \overbrace{\quad}^{E_3} & \overbrace{\qquad}^{\mathrm{Ric}(E_2)} & \overbrace{\quad}^{E_2} & \overbrace{\qquad}^{\mathrm{Ric}^2(E_1)} & \overbrace{\qquad}^{\mathrm{Ric}(E_1)} & \overbrace{\quad}^{E_1} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|cc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{n_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

where $n_1 = \dim E_1 = \dim\,[\ker \mathrm{Ric} \cap \operatorname{Im}\mathrm{Ric}^2]$,
$n_2 = \dim E_2 = \dim\,[(\ker \mathrm{Ric} \cap \operatorname{Im}\mathrm{Ric})/(\ker \mathrm{Ric}\ \cap \operatorname{Im}\mathrm{Ric}^2)]$ and
$n_3 = \dim E_3 = \dim\,[\ker \mathrm{Ric}\,/(\ker \mathrm{Ric} \cap \operatorname{Im}\mathrm{Ric})]$.

(2) "canonical" for g, in the following sense:

$$\mathrm{Mat}_\beta(g) = \left(\begin{array}{c|cc|ccc} I_{r_3,s_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{r_2,s_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{r_2,s_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{r_1,s_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{r_1,s_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{r_1,s_1} & 0 & 0 \end{array}\right)$$

where $I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$ and the r_i and s_i are some integers satisfying $r_i + s_i = n_i$. We do not need more here, but to be more precise, the three couples (r_i,n_i) characterize the couple (g, ric) of bilinear forms on E, up to pull back by a isomorphism U of E: $g \rightsquigarrow g(U.,U.)$, $\mathrm{ric} \rightsquigarrow \mathrm{ric}(U.,U.)$.

Remark: To avoid a misunderstanding, it is important to note that the subspaces E_1, E_2 and E_3 are **not** canonical — but however, are not **any** Jordan subspaces.

Let us denote by $(e_i^k)_{i=1}^{n_k}$ the vectors of β which generate each E_k, $k = 1,2$ or 3. So $\beta = ((e_i^3)_{i=1}^{n_3},(\mathrm{Ric}\, e_i^2)_{i=1}^{n_2},(e_i^2)_{i=1}^{n_2},\ (\mathrm{Ric}^2\, e_i^1)_{i=1}^{n_1},(\mathrm{Ric}\, e_i^1)_{i=1}^{n_1},(e_i^1)_{i=1}^{n_1})$. Then:

$$\pm 1 = <\operatorname{Ric}^2 e_i^1, e_i^1> = \operatorname{ric}(\operatorname{Ric} e_i^1, e_i^1) = \operatorname{tr}(v \mapsto R(\operatorname{Ric} e_i^1, v).e_i^1) =$$

$$\sum_{j=1}^{n_1} \pm \underbrace{< R(\operatorname{Ric} e_i^1, \operatorname{Ric}^2 e_j^1).e_i^1, e_j^1 >}_{A_{i,j}} + \sum_{j=1}^{n_1} \pm \underbrace{< R(\operatorname{Ric} e_i^1, \operatorname{Ric} e_j^1).e_i^1, \operatorname{Ric} e_j^1 >}_{B_{i,j}}$$

$$+ \sum_{j=1}^{n_1} \pm \underbrace{< R(\operatorname{Ric} e_i^1, e_j^1).e_i^1, \operatorname{Ric}^2 e_j^1 >}_{C_{i,j}} + \sum_{j=1}^{n_2} \pm \underbrace{< R(\operatorname{Ric} e_i^1, \operatorname{Ric} e_j^2).e_i^1, e_j^2 >}_{D_{i,j}}$$

$$+ \sum_{j=1}^{n_2} \pm \underbrace{< R(\operatorname{Ric} e_i^1, e_j^2).e_i^1, \operatorname{Ric} e_j^2 >}_{E_{i,j}} + \sum_{j=1}^{n_3} \pm \underbrace{< R(\operatorname{Ric} e_i^1, e_j^3).e_i^1, e_j^3 >}_{F_{i,j}}.$$

But all terms are zero. Indeed:

- From Lemma 1, **(i)**:
  - $\forall i,j \leq n_1$, $\operatorname{Ric}^2 e_j^1 \in D$ and $\operatorname{Ric} e_i^1 \in D^\perp$, so $R(\operatorname{Ric} e_i^1, \operatorname{Ric}^2 e_j^1) = 0$,
  - $\forall i \leq n_1, \forall j \leq n_2$, $\operatorname{Ric} e_j^2 \in D$ and $\operatorname{Ric} e_i^1 \in D^\perp$, so $R(\operatorname{Ric} e_i^1, \operatorname{Ric} e_j^2) = 0$
  - $\forall i \leq n_1, \forall j \leq n_3, R(\operatorname{Ric} e_i^1, e_j^3) = 0$,

  thus all the $A_{i,j}$, $D_{i,j}$ and $E_{i,j}$ are zero.
- Using Bianchi identity:

$$\begin{aligned} C_{i,j} &=< R(\operatorname{Ric} e_i^1, e_j^1).e_i^1, \operatorname{Ric}^2 e_j^1 > \\ &= - < R(e_j^1, e_i^1). \operatorname{Ric} e_i^1, \operatorname{Ric}^2 e_j^1 > - < R(e_i^1, \operatorname{Ric} e_i^1).e_j^1, \operatorname{Ric}^2 e_j^1 > \\ &= - < \underbrace{R(\operatorname{Ric} e_i^1, \operatorname{Ric}^2 e_j^1)}_{=0 \text{ by lemma 1, } \mathbf{(i)}}.e_j^1, e_i^1 > + < R(e_i^1, \operatorname{Ric} e_i^1). \operatorname{Ric}^2 e_j^1, e_j^1 > \\ &=< R(e_i^1, \operatorname{Ric} e_i^1). \operatorname{Ric}^2 e_j^1, e_j^1 > \end{aligned}$$

  As ric is parallel we have: $\forall x,y$, $\operatorname{ric}(R(x,y)\,.\,,.\,) = -\operatorname{ric}(\,.\,,R(x,y)\,.\,)$, and thus its g-selfadjoint associated endomorphism Ric commutes with all the $R(x,y)$. So:

$$\begin{aligned} C_{i,j} &=< R(e_i^1, \operatorname{Ric} e_i^1). \operatorname{Ric}^2 e_j^1, e_j^1 > \\ &=< \operatorname{Ric}^2 R(e_i^1, \operatorname{Ric} e_i^1).e_j^1, e_j^1 > \\ &=< R(e_i^1, \operatorname{Ric} e_i^1).e_j^1, \operatorname{Ric}^2 e_j^1 > \\ &= - < e_j^1, R(e_i^1, \operatorname{Ric} e_i^1). \operatorname{Ric}^2 e_j^1 > \\ &= -C_{i,j} \end{aligned}$$

  and $\forall i,j, C_{i,j} = 0$
- With the previous remark on the commutation of Ric:

$$\begin{aligned} F_{i,j} &=< R(\operatorname{Ric} e_i^1, e_j^3).e_i^1, e_j^3 > \\ &=< R(e_i^1, e_j^3). \operatorname{Ric} e_i^1, e_j^3 > \\ &=< \operatorname{Ric}(R(e_i^1, e_j^3).e_i^1), e_j^3 > \\ &=< R(e_i^1, e_j^3).e_i^1, \operatorname{Ric} e_j^3 > \\ &=< R(e_i^1, e_j^3).e_i^1, 0 > = 0. \end{aligned}$$

- With the same remark, <u>and commuting this time the role of i and j</u>:

$$\begin{aligned}B_{i,j} &=< R(\operatorname{Ric} e_i^1, \operatorname{Ric} e_j^1).e_i^1, \operatorname{Ric} e_j^1 > \\ &=< R(e_i^1, \operatorname{Ric} e_j^1). \operatorname{Ric} e_i^1, \operatorname{Ric} e_j^1 > \\ &=< R(e_i^1, \operatorname{Ric} e_j^1). \operatorname{Ric}^2 e_i^1, e_j^1 > \\ &= C_{j,i} = 0\end{aligned}$$

Thus the case $n = 3$ is impossible, which completes the proof. □

5 The case where Ric has two complex conjugate eigenvalues

This part is devoted to the fourth case announced in section 2: the case where the minimal polynomial P of Ric is irreducible of degree 2. So, Ric has no nilpotent part but is not diagonalizable on $\mathbb{R}$.

Proposition 1 *Let (M,g) be a pseudo-Riemannian manifold whose Ricci tensor is parallel and such that the minimal polynomial of* Ric *is of the form: $[(X-\alpha)(X-\overline{\alpha})]^k$, $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Let us denote by D the Levi-Civita connection of M. Then $k = 1$, and M, endowed with the same connection D, admits a complex Riemannian structure, the real part of which is the original metric. That is to say, M admits:*
- *For each $x \in M$, an endomorphism $J \in End(T_xM)$, such that $J^2 = -\operatorname{Id}$, integrable,*
- *h a complex non-degenerate bilinear symmetric form (warning: not a hermitian product) such that D is its Levi-Civita connection (*i.e. $Dh = 0$*), and such that $g = \Re h$.*

Moreover, $(M_{\mathbb{C}},h)$ is Einstein with factor $\frac{\alpha}{2}$ (or $\frac{\overline{\alpha}}{2}$, it depends on the choice of h), i.e. $\operatorname{ric}_{\mathbb{C}} = \frac{\alpha}{2}h$. *Finally, $\Re(\alpha h) = \operatorname{ric}_{\mathbb{R}}$, so M is Einstein for this —real— metric $\Re(\alpha h)$, that admits the same connection D, so the same R and the same* ric, *as g.*

Remark: With such a minimal polynomial for Ric, M is of even dimension $2n$ and any real metric giving this ric has signature (n,n).

Proof: Let $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ be such that $\alpha = \lambda + i\mu$. $\alpha \notin \mathbb{R}$, so $\mu \neq 0$. Let $J = \frac{1}{\mu}(\operatorname{Ric} - \lambda \operatorname{Id})$. Then:

$$\begin{aligned}J^2 &= \frac{1}{\mu^2}((\operatorname{Ric} - \alpha \operatorname{Id}) + i\mu \operatorname{Id})((\operatorname{Ric} - \overline{\alpha} \operatorname{Id}) - i\mu \operatorname{Id}) \\ &= \frac{1}{\mu^2}((\operatorname{Ric} - \alpha \operatorname{Id})(\operatorname{Ric} - \overline{\alpha}\operatorname{Id}) + i\mu\alpha \operatorname{Id} - i\mu\overline{\alpha}\operatorname{Id} + \mu^2 \operatorname{Id}) \\ &= \frac{1}{\mu^2}(0 + 2\Re(i\mu\alpha)\operatorname{Id} + \mu^2 \operatorname{Id}) \\ &= \frac{1}{\mu^2}(-\mu^2 \operatorname{Id}) \\ &= -\operatorname{Id}.\end{aligned}$$

Since Ric is parallel and J is a polynomial in Ric, J is parallel. By Newlander and Nirenberg theorem [NN57], the almost-complex structure induced by J is thus complex.

Let now x be a point in M, let us define on T_xM the following complex bilinear form: $h : u,v \mapsto h(u,v) = g(u,v) - ig(u,J.v)$. J is g-selfadjoint, so $h(u,v) = h(v,u)$. One easily verifies that: $\forall \gamma,\delta \in \mathbb{R}, h((\gamma + i\delta)u,v) = \gamma h(u,v) + i\delta h(u,v)$. g is non-degenerate, thus so is h; J being parallel, $Dh = 0$, so D is the Levi-Civita connection of h. By definition, $g = \Re h$.

Useful remark: If $A \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(T_xM)$ commutes with J, *i.e.* is in $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(T_xM)$ too, then:

$$\mathrm{tr}_{\mathbb{C}}\, A = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}_{\mathbb{R}}\, A - i\, \mathrm{tr}_{\mathbb{R}}(J.A)).$$

As a consequence, $\mathrm{ric}_{\mathbb{C}}(u,v) = \mathrm{tr}_{\mathbb{C}}\, R(u,.)v = \frac{1}{2}[\mathrm{tr}_{\mathbb{R}}\, R(u,.)v - i\, \mathrm{tr}_{\mathbb{R}}(J.R(u,.)v)]$. J is parallel, so commutes with all the $R(a,b)$, and so $\mathrm{tr}_{\mathbb{R}}(J.R(u,.)v) = \mathrm{tr}_{\mathbb{R}}(R(u,.)Jv)$. Finally,

$$\mathrm{ric}_{\mathbb{C}}(u,v) = \frac{1}{2}(\mathrm{ric}_{\mathbb{R}}(u,v) - i\, \mathrm{ric}_{\mathbb{R}}(u,J.v)).$$

¿From the main theorem one knows that $k = 1$ so Ric is semi-simple and one may find a real basis $\beta = (e_1,e'_1,\dots,e_n,e'_n)$ of T_xM such that:

$$\mathrm{Mat}_\beta(\mathrm{Ric}) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}, \mathrm{Mat}_\beta(g) = \begin{pmatrix} K_2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & K_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{and thus } \mathrm{Mat}_\beta(\mathrm{ric}) = \begin{pmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A' \end{pmatrix},$$

where $K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$ and $A' = \begin{pmatrix} -\mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$.

Remark: with that basis, $\mathrm{Mat}_\beta(J) = \begin{pmatrix} J_2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J_2 \end{pmatrix}$, where $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Let $\widetilde{\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}((e_1 + e'_1),\dots,(e_n + e'_n))$. That $\widetilde{\beta}$ is a basis of T_xM as $\mathbb{C}$-vectorspace and, using the formula linking $\mathrm{ric}_{\mathbb{C}}$ and $\mathrm{ric}_{\mathbb{R}}$: $\mathrm{Mat}_{\widetilde{\beta}}(\mathrm{ric}_{\mathbb{C}}) = \frac{\alpha}{2}\,\mathrm{Id}$. As $\mathrm{Mat}_{\widetilde{\beta}}(h) = \mathrm{Id}$, it follows: $\mathrm{ric}_{\mathbb{C}} = \frac{\alpha}{2}h$. Thus, $(M_{\mathbb{C}},h)$ is Einstein.

Now, if we let $g' = \Re(\alpha h)$, $\mathrm{ric}_{\mathbb{R}} = 2\Re\,\mathrm{ric}_{\mathbb{C}} = 2\Re(\frac{\alpha}{2}h) = g'$, so (M,g') is Einstein. Indeed, g' induces the same connection D as g, so the same Ricci tensor. □

6 Further remarks

6.1 A few words about low dimensions

In low dimensions, we have more precise results.

Proposition 2 *Let (M,g) be an indecomposable pseudo-Riemannian manifold of dimension n whose Ricci tensor is parallel.*

- *If $n \leq 3$, then M has constant curvature.*
- *If $n \leq 6$, and if the minimal polynomial of* Ric *is a power of an irreducible polynomial of degree 2, then M is complex, locally symmetric. As complex manifold, it has constant curvature.*

Proof: This result is only a technical remark, short to explain with the following tools, which are classical and can be found in for example in [Bes87], pp.47 and 49:

Definition *If a and b are two symmetric bilinear forms, their Kulkarni-Nomizu product is the following 4-tensor:*

$$(a \owedge b)(x,y,z,t) = a(x,z)b(y,t) + a(y,t)b(x,z) - a(x,t)b(y,z) - a(y,z)b(x,t).$$

Lemma 3 *Let (M,g) be a Riemannian, pseudo-Riemannian or complex Riemannian manifold with dimension n. Let us denote by $s = \operatorname{tr}\operatorname{Ric}$ its scalar curvature. As in [Bes87], let us denote (in this lemma) by R the (4,0) tensor associated to the curvature.*
If $n = 2$, then $R = \frac{s}{4} g \owedge g$ and $\operatorname{ric} = \frac{s}{2} g$.
If $n = 3$, then $R = \frac{s}{12} g \owedge g + (\operatorname{ric} - \frac{s}{3} g) \owedge g$.

The first point of the proposition follows directly from the lemma: if $n \leq 3$, M is Ricci-parallel $\Leftrightarrow D\operatorname{ric} = 0 \Rightarrow DR = 0 \Leftrightarrow M$ is locally symmetric. M is irreducible, it has then moreover constant curvature. In the case of the third point, proposition 1 and the previous point imply that M is a complex manifold of dimension $p = 2$ or $p = 3$ ($n = 2p$), with a complex Riemannian structure h. Applying again lemma 3, we conclude that M is locally symmetric and that, as complex manifold, it has constant curvature. By proposition 1, the real manifold M is moreover Einstein for a well-chosen metric. □

Examples All Ricci-parallel pseudo-Riemannian manifolds of dimension 6 or less, such that Ric is non-degenerate and non-diagonalizable over $\mathbb{R}$, are complex symmetric spaces. So Berger's classification of the irreducible symmetric spaces (see [Ber57]) give them; they are:

$$SL_2(\mathbb{C}), \text{ of complex dimension 3,}$$

$$SL_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^\star, \text{ of complex dimension 2.}$$

As complex manifolds, they are Einstein for their "natural" metric, respectively h and $\widetilde{h}$. Here h is given by the complex Killing form of $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ [up to some scaling] and $\widetilde{h}$ is deduced from h on the quotient $SL_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^\star$. As real manifolds, they are Einstein for the real metrics $g = \Re h$ and $\widetilde{g} = \Re\widetilde{h}$ respectively, and not Einstein for the $g_\alpha = \Re(\alpha h)$ and $\widetilde{g}_\alpha = \Re(\alpha\widetilde{h})$ respectively, when $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

6.2 Ricci decomposition and holonomy decomposition

The (local or global) product decomposition in Main Theorem is unique, but it may be pursued. More precisely, each factor may be a (local or global) Riemannian product of pseudo-Riemannian manifolds, and decomposing in that way, we get at the end only indecomposable factors. This final decomposition is the holonomy decomposition, and it is not unique in general, as indicated in Wu's paper (see [Wu67], theorem 5 in Appendix I, p.390).

On each factor on which Ric is non-degenerate, the decomposition is unique up to ordering of the factors (one may switch isometric factors).

Now, the factor M^0 on which $\operatorname{Ric}^2 = 0$ may have a further holonomy decomposition too: $M^0 = M^0_0 \times \prod_{i\in I} M^0_i \times \prod_{j\in J} M^0_j$, with a flat M^0_0, irreducible M^0_i and indecomposable-reducible M^0_j. Then, if M^0_0 is non-trivial and if J is not empty, the way in which the factor M^0_0 may be inbedded in M^0 is not unique. On the other hand, if M^0_0 is only a point or if J is empty (i.e. there is no indecomposable reducible factor), then the holonomy decomposition is unique up to ordering.

6.3 Families of metrics with the same connection

Proposition 3 *Let M be an indecomposable pseudo-Riemannian manifold with a parallel, non-degenerate Ricci tensor, and* D *its covariant derivative. Then, the metrics over M associated to the same* D *are:*

- *either* $\{\lambda \operatorname{ric} / \lambda \in \mathbb{R}^*\}$,
- *or* $\{\lambda \operatorname{ric} + \mu g / (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)\}$, *where g is a metric such that the minimal polynomial of* Ric_g *is irreducible of degree 2 (and then M admits a unique complex structure, corresponding to this family of real metrics).*

Proof: By hypothesis, g and ric are D-parallel, and D is torsion-free, so D is the Levi-Civita connection of any non-degenerate pseudo-Riemannian metric $\lambda \operatorname{ric} + \mu g$.

Conversely, let g be a metric on (M,g) inducing the same covariant derivative D. M is irreducible and Ricci is non-degenerate, so, either $\operatorname{Ric} = \lambda \operatorname{Id}$ and g is type 1 or $(\operatorname{Ric} - \alpha \operatorname{Id})(\operatorname{Ric} - \overline{\alpha} \operatorname{Id}) = 0$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ and g is type 2. Then:

- If all such metrics are of type 1, we are in the first case of the proposition. Then, M does not admit a parallel J with $J^2 = -\operatorname{Id}$, else $h : u,v \mapsto g(u,v) - ig(u,J.v)$ is a complex Riemannian structure of M and all the $g_\beta = \Re(\beta h)$ for $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ are real metrics of type 2.
- If there exists two metrics g and g' of type 2 (with corresponding α, Ric, J, α', Ric' and J'), they both belong to the family $\{\lambda \operatorname{ric} + \mu g\}$ and $J = J'$. Indeed, g and g' give as in Proposition 1 complex Riemannian metrics h and h'. But $\Re(\alpha h) = \Re(\alpha' h') = \operatorname{ric}$, so $\alpha h = \alpha' h'$ and $g' = \Re(\frac{\alpha}{\alpha'} h) = \Re((\mu + \lambda\alpha)h)$ for some real numbers λ and μ, what gives the result. Furthermore, $\forall u,v, h(u,J.v) = ih(u,v) = i\frac{\alpha'}{\alpha} h'(u,v) = \frac{\alpha'}{\alpha} h'(u,J'.v) = h(u,J'.v)$, so $J = J'$. If M admits another J'', it induces other metrics of type 2, which are then in the family below, and $J'' = J$. □

Remark: *The assumption "*Ric *is non-degenerate" shall not be omitted. Indeed, there exist indecomposable Ricci-parallel manifolds M that admit any number of linear independant metrics associated to the same connection. For those cases,* Ric *is nilpotent. Such M may even be choosen symmetric.*

6.4 Some examples

A family of symmetric spaces due to Cahen and Wallach (*cf.* [CW70]) may be used here as example.

As explained in [CP70], a simply connected pseudo-Riemannian symmetric space is associated to each pseudo-Riemannian symmetric triple $(\mathcal{G},\sigma,< \, , \, >)$. Such a triple consists of a finite dimensional Lie algebra $\mathcal{G}$, a non-degenerate symmetric bilinear form $< \, , \, >$ on $\mathcal{G}$, invariant by $\mathcal{G}$, and an involutive automorphism σ of $\mathcal{G}$, orthogonal for $< \, , \, >$, satisfying the following property: $[\mathcal{Q},\mathcal{Q}] = \mathcal{H}$, where $\mathcal{H} = \ker(\sigma - \operatorname{Id})$ and $\mathcal{Q} = \ker(\sigma + \operatorname{Id})$. The associated symmetric space M is a submanifold of the simply connected Lie group G associated to $\mathcal{G}$. Its tangent space at the point 0 is $T_0 M = \mathcal{Q}$ and its holonomy algebra is $\mathcal{H}$, acting by Ad on $\mathcal{Q}$.

The announced examples are provided by a family of pseudo-Riemannian symmetric triples characterized as follows: $\dim \mathcal{G} = 2n+2$, $\dim \mathcal{H} = n$ and $\dim \mathcal{Q} = n+2 =$ dimension of the obtained symmetric space M. There is a basis $(U_i)_{i=1}^n$ of H, and a basis $(Y^*,(X_i)_{i=1}^n,Y)$ of $\mathcal{Q}$ such that, if the basis $(Y^*,(U_i)_{i=1}^n,(X_i)_{i=1}^n,Y)$ is denoted by β:

- Y^* is central,
- $$\mathrm{Mat}_\beta(\mathrm{Ad}\,Y) = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & & \lambda_1 & & & 0 \\ \vdots & & 0 & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & & & \lambda_n & 0 \\ \hline 0 & -\lambda_1 & & & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & 0 & & \vdots \\ 0 & & & -\lambda_n & & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right), \quad (\lambda_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^{*n}$$
  (remark: turning some X_i into $-X_i$, one may then require: $(\lambda_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}_+^{*n}$),
- $\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}, [U_i,X_j] = < [Y,U_i],X > Y^*$,
- $\mathrm{vect}\{U_i\}$ and $\mathrm{vect}\{X_j\}$ are abelian subalgebras,
- $\mathcal{H} \perp \mathcal{Q}$ for $< \ , \ >$,
- $< Y,Y^* >= 1$, $< Y,Y >=< Y^*,Y^* >= 0$,
- $\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}$, $< U_i,U_j >=< X_i,X_j >= \delta_{i,j}$ and $< X_i,Y >=< X_i,Y^* >= 0$.

It is easy to check that:

- $\forall V,W \in \mathcal{G}, \sigma([V,W]) = [\sigma(V),\sigma(W)]$
- σ is $< \ , \ >$-orthogonal and: $\forall V \in \mathcal{G}$, $\mathrm{Ad}\,V$ is $< \ , \ >$-skew symmetric,
- $[\mathcal{Q},\mathcal{Q}] = \mathcal{H}$.

Therefore, $(\mathcal{G},\sigma,< \ , \ >)$ is a pseudo-Riemannian (here Lorentzian) symmetric triple. Let $(M,<,>)$ be its associated pseudo-Riemannian symmetric space. $\mathcal{H}$ is the holonomy algebra of M, acting on $\mathcal{Q} \simeq T_0M$ by Ad. Therefore, by this representation, H is identified with the (abelian) subalgebra of $\mathfrak{so}(\mathcal{Q},< \ , \ >)$ consisting of the matrices of the form:

$$\begin{pmatrix} 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & -{}^tX \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{where } X = (x_1,\dots,x_n) \text{ is some element of } \mathbb{R}^n,$$

in the basis $(Y^*,(X_i)_{i=1}^n,Y)$. Here M is indecomposable, non-irreducible, the only eigenvalue of Ric is 0, and Ric is nilpotent of order 2. More precisely, $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, we have $\mathrm{Ric}(X_i) = \mathrm{Ric}(Y^*) = 0$ and $\mathrm{Ric}(Y) = (\sum \lambda_i^2)Y^*$.

Now, $(\mathrm{Ad}\,Y)^2$ is diagonalizable in a $< \ , \ >$-pseudo-orthonormal basis, with the eigenvalues $\{0,-\lambda_1^2,\dots,-\lambda_n^2\}$. Each eigenspace E_λ associated to one of the λ_i^2 is of even dimension $2d_\lambda$ where: $d_\lambda = \sharp\{i/\lambda_i = \lambda\}$). $E_\lambda = (E_\lambda \cap \mathcal{H}) \oplus (E_\lambda \cap \mathcal{Q})$, each term being of dimension d_λ. Then, on each E_λ, $< \ , \ >$ may be replaced by every scalar product $< \ , \ >'$:

- preserving the relation $\mathcal{H} \perp \mathcal{Q}$,
- such that $\mathrm{Ad}\,Y$ remains skew-symmetric, *i.e.* such that: $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$, $< U_i,U_j >'=< X_i,X_j >'$;

and $(\mathcal{G},\sigma,< \ , \ >')$ remains a pseudo-Riemannian symmetric triple, with the <u>same</u> brackets. Actually, one reaches here all the scalar products satisfying this property. In the basis of

E_λ built with the U_i and the X_i, the matrix of $<\ ,\ >'$ is:

$$\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}, \text{ where } S \text{ is some symmetric matric of } M_{d_\lambda}(\mathbb{R}).$$

So, each E_λ may be equipped of $\frac{d_\lambda(d_\lambda+1)}{2}$ linearly independant metrics, letting the brakets unchanged, and thus the covariant derivative of the associated manifold M.

Notes: 1) These examples may be adapted to provide similar pseudo-Riemannian manifolds of every signature $(p+1,q+1)$. One take $n = p+q$, $< X_i,X_j >= \delta_{i,j}$ if $i \leq p$, else $< X_i,X_j >= -\delta_{i,j}$; $[Y,U_i] = -\lambda_i X_i$ if $i \leq p$, else $[Y,U_i] = \lambda_i X_i$. The other data are the same. $(\mathrm{Ad}\, Y)^2$ is diagonalizable, with the eigenvalues $\{0, -\lambda_1^2, \ldots, -\lambda_p^2, \lambda_{p+1}^2, \ldots, \lambda_n^2\}$. On the $E_\lambda^+ = \ker[(\mathrm{Ad}\, Y)^2 + \lambda^2 \,\mathrm{Id}]$ (for one of the λ_i, $i \leq p$), the phenomenon is the same; whereas on the $E_\lambda^- = \ker[(\mathrm{Ad}\, Y)^2 - \lambda^2 \,\mathrm{Id}]$ (for one of the other λ_i), the matrix of the other possible $<\ ,\ >'$ are:

$$\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & -S \end{pmatrix}, \text{ where } S \text{ is some symmetric matric of } M_{d_\lambda}(\mathbb{R}).$$

2) This provides a family of symmetric spaces such that $\mathrm{Ric} \neq 0$ and $\mathrm{Ric}^2 = 0$. Another such family is constructed in [CP70], pp.40 *sq.* See [CP80] too.

INSTITUT ELIE CARTAN, UNITÉ MIXTE DE RECHERCHE 7502 U.H.P., C.N.R.S., I.N.R.I.A.
UNIVERSITÉ HENRI POINCARÉ – NANCY I
B.P.239, 54506 VANDŒUVRE-LES-NANCY CEDEX, FRANCE.

Chapitre 2

Réduction simultanée de deux formes bilinéaires, symétriques ou antisymétriques, dont l'une est non dégénérée

Introduction

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie d, et a et b deux formes bilinéaires symétriques sur E, a étant définie positive. Il existe des bases β a-orthonormées, diagonalisant la forme b, *i.e.* telles que : $\mathrm{Mat}_\beta(a) = I_d$, $\mathrm{Mat}_\beta(b)$ est diagonale. On en déduit la structure de $\Omega = O(a) \cap O(b) \subset GL(E)$. Soit en effet B l'endomorphisme a-autoadjoint tel que : $b(\cdot\,,\cdot) = a(\cdot\,,B\,\cdot)$ et $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathcal{L}}$ ses sous-espaces propres, alors :

$$\begin{cases} E = \oplus_\lambda E_\lambda \text{ et les } E_\lambda \text{ sont mutuellement } a\text{- et } b\text{-orthogonaux} \\ \Omega = \prod_\lambda O(a_{|E_\lambda}) \simeq \prod_\lambda O_{\dim E_\lambda}(\mathbb{R}) \end{cases}$$

En particulier, les $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathcal{L}}$ et leurs sommes sont les seuls sous-espaces stables par Ω, ce sont donc les seuls sous-espaces intrinsèquement associés à $\{a,b\}$. D'autre part, Ω agit simplement transitivement sur l'ensemble des bases du type de β.

Qu'en est-il sur un corps plus général et avec a et b symétriques ou antisymétriques quelconques? Y a-t-il des bases privilégiées, et lesquelles? Quelles sont la structure de Ω et les objets intrinsèquement associés à $\{a,b\}$? Une motivation géométrique est ici à l'origine de cette question : le problème traité par le premier chapitre, qui étudie des variétés connectées admettant deux formes bilinéaires parallèles — en l'occurence une métrique pseudo-riemannienne ou une forme symplectique, et la courbure de Ricci.

Un article de Wilhelm Klingenberg de 1954 [Kli54] résoud partiellement ce problème algébrique, notamment exhibe des bases privilégiées. Il ne semble pas cependant exister d'exposé systématique de référence sur le sujet, dans l'esprit des questions énumérées plus haut. Aussi, dépassant la motivation de départ, essayons-nous ici d'en proposer un, en reprenant et prolongeant, avec un autre point de vue, les idées de Klingenberg. L'exposé se restreint cependant au cas où a ou b est non dégénérée, *i.e.* où il existe une forme non dégénérée dans le faisceau engendré par $\{a,b\}$.

Voilà pourquoi ce chapitre, sur cette question d'algèbre linéaire élémentaire. L'exposé est long, parfois fastidieux. Deux raisons à cela : la situation, touffue, se décompose en un grand nombre de cas et par ailleurs nous avons voulu un exposé systématique, consultable et le plus pédagogique possible. On y trouvera aussi quelques invariants inattendus, comme certaines familles de signatures secondaires. Enfin, nous tenterons surtout tout au long de ce travail de dégager les invariants géométriques des situations envisagées, la signification géométrique des objets introduits.

* * *

Soient donc E un espace vectoriel de dimension finie d sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2, et a et b deux formes réflexives, c'est-à-dire bilinéaires symétriques, bilinéaires antisymétriques ou sesquilinéaires. L'objet du chapitre est en effet les couples de formes (anti)-symétriques, mais on aura besoin pour cela de l'étude des paires de formes sesquilinéaires. Les formes réflexives sont exactement les 2-formes pour lesquelles la notion d'orthogonal est bien définie, par coïncidence des notions d'orthogonal à droite et à gauche. Une forme sesquilinéaire est une forme a telle qu'il existe un automorphisme de corps involutif $\lambda \mapsto \overline{\lambda}$ de $\mathbb{K}$ tel que :

$*$ $\forall x,y \in E, a(x,y) = \overline{a(y,x)}$ et :

* a est linéaire en x, semilinéaire en y : $\forall x,y,y' \in E, \forall\lambda \in \mathbb{K}, a(x,\lambda y + y') = \overline{\lambda}a(x,y) + a(x,y')$.

On supposera toujours une des deux formes non dégénérée. Parfois a sera notée $< \cdot,\cdot >$.

Soit B l'endomorphisme a-(anti)autoadjoint associé à b, *i.e.* tel que : $b(\cdot,\cdot) = a(\cdot,B\cdot)$. Matriciellement :

$$\mathrm{Mat}(B) = \mathrm{Mat}(a)^{-1}\mathrm{Mat}(b).$$

Si a et b sont de même nature, B est a-autoadjoint :

$${}^t(\mathrm{Mat}(B))\mathrm{Mat}(a) = \mathrm{Mat}(a)\mathrm{Mat}(B), \quad {}^t(\mathrm{Mat}(B)) = \mathrm{Mat}(a)\mathrm{Mat}(B)\mathrm{Mat}(a)^{-1}.$$

Si a et b sont, l'une symétrique, l'autre antisymétrique, B est a antiautoadjoint :

$${}^t(\mathrm{Mat}(B))\mathrm{Mat}(a) = -\mathrm{Mat}(a)\mathrm{Mat}(B), \quad {}^t(\mathrm{Mat}(B)) = -\mathrm{Mat}(a)\mathrm{Mat}(B)\mathrm{Mat}(a)^{-1}.$$

On note $\mu = \Pi_{i=1}^k P_i^{n_i}$ le polynôme minimal de B (P_i irréductibles, premiers entre eux deux à deux).

On note enfin $\Omega = \mathrm{Stab}(a) \cap \mathrm{Stab}(b)$ l'intersection des sous-groupes de Lie de $GL(E)$ préservant respectivement a et b, c'est-à-dire des groupes orthogonaux, symplectiques ou unitaires selon le cas, associés à a et b. On note ω son algèbre de Lie.

* * *

La partie I pose les bases de l'étude. Tout d'abord, dans le cas où a et b sont toutes deux symétriques ou toutes deux antisymétriques, Wilhelm Klingenberg propose un ensemble de bases :

- où $\mathrm{Mat}(a)$ et $\mathrm{Mat}(b)$ ont une forme canonique,
- sur lequel Ω agit simplement transitivement.

Nous le présentons brièvement dans une première section. Les deux suivantes ouvrent notre travail proprement dit : elles introduisent les principaux objets attachés à une forme réflexive et à un sous-espace, ou à une paire de formes réflexives ; ces objets sont à la base de toute la suite.

La partie II, comme Klingenberg, traite le cas où a et b sont de même nature et la partie III celui, assez différent, où l'une est symétrique, l'autre antisymétrique.

I Préliminaires

I.1 Reprise d'un travail de Klingenberg

— Attention, ici a et b sont de même nature —

Ici sont présentés, sans démonstration — sauf pour le premier lemme, qu'on utilisera par la suite —, les résultats de Klingenberg. Sont ajoutées également des remarques sur le cas réel.

I.1.1 Un lemme préliminaire

On rappelle que $\mu = \Pi_{i=1}^{k} P_i^{n_i}$ désigne le polynôme minimal de B (P_i irréductibles, premiers entre eux deux à deux). Un premier lemme scinde E en une somme directe canonique :

Proposition 1 *Les sous-espaces caractéristiques E_i de B sont a- et b-orthogonaux*

Démonstration : Il suffit de le vérifier. Prenons x dans $\ker P_i^{n_i}(B)$, y dans $\ker P_j^{n_j}(B)$ $(i \neq j)$, U et V dans $\mathbb{K}[X]$ t.q. : $UP_i^{n_i} + VP_j^{n_j} = 1$. a et b sont de même nature, donc B est a-autoadjoint. Alors :

$$\begin{aligned} a(x,y) &= a((UP_i^{n_i} + VP_j^{n_j})(B).x,y) \\ &= a(UP_i^{n_i}(B).x,y) + a(x,VP_j^{n_j}(B).y) \\ &= a(0,y) + a(x,0) \\ &= 0 \quad \text{et :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(x,y) &= b((UP_i^{n_i} + VP_j^{n_j})(B).Bx,y) \\ &= b(B(UP_i^{n_i}(B).x),y) + a(x,B(VP_j^{n_j}(B).y)) \\ &= a(0,y) + a(x,0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Comme de plus ces E_i sont stables par Ω, on déduit facilement que Ω est isomorphe au produit direct des $\mathrm{Stab}(a_{|E_i}) \cap \mathrm{Stab}(b_{|E_i})$. De la même façon, une «bonne base» sera la somme de «bonnes bases» de chacun de ces E_i.

Désormais, on se restreint donc à un tel sous-espace canonique, noté simplement E ; on a alors $\mu = P_1^{n_1} = P^n$. Posons $T = P(B)$, endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence n.

I.1.2 Cas où a et b sont symétriques

L'ensemble des «bonnes bases» de E au sens de Klingenberg est l'ensemble, non vide (et assez naturel), des bases :

- de Jordan pour T
- dont les «blocs de Jordan» sont a-orthogonaux,

- et telles que sur chaque bloc, A est de la forme λK_p, où$\lambda \neq 0$, où :

$$K_p = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \cdot & \\ & \cdot & & \\ \cdot & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K}),$$

et où λ peut être choisi à multiplication près par un carré. Dans $\mathbb{R}$, on peut se ramener à $\lambda = \pm 1$, dans un corps algébriquement clos comme $\mathbb{C}$, à $\lambda = 1$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dans une telle base :

$$\mathrm{Mat}(a) = \begin{pmatrix} \pm K_{p_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \pm K_{p_k} \end{pmatrix} \quad \text{et : } \quad \mathrm{Mat}(T) = \begin{pmatrix} N_{p_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & N_{p_k} \end{pmatrix}$$

où k est un certain entier et où les p_i sont des entiers décroissants avec $p_1 = n$, indice de nilpotence de T. Les N_{p_i} sont les blocs de Jordan de T, matrice nilpotente, c'est-à-dire :

$$N_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_j(\mathbb{R}).$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la situation est la même, avec des K_{p_i} au lieu des $\pm K_{p_i}$.

Remarque : Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si a est définie, tous les entiers p_i sont nécessairement égaux à 1 (il n'y a pas de vecteur isotrope). De plus P est nécessairement de degré 1 ($P = X - \alpha$), sinon apparaissent des vecteurs isotropes. Les «bonnes bases» obtenues sont donc les bases codiagonalisantes habituelles, avec une seule valeur propre à cause de la décomposition préalablement effectuée par la proposition 1 : $\mathrm{Mat}(a) = I_d$, $T = 0$, $B = \alpha \,\mathrm{Id}_E$ *i.e.* $b = \alpha a$. $\Omega = O_d(\mathbb{R})$ agit simplement transitivement sur elles.

Un cas particulier : Si P est de degré 1 ($P = X - \alpha$), la base de Jordan pour T l'est aussi pour B, et b est alors de la forme :

$$\mathrm{Mat}(b) = \begin{pmatrix} \pm B'_{p_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \pm B'_{p_k} \end{pmatrix} \text{ où } B'_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \cdot & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_p(\mathbb{R}),$$

les B'_{p_i} étant affectées du même signe que K_{p_i}.

Le cas réel : Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, P est de degré un ou deux. Le premier cas est traité par la remarque ci-dessus ; si P est de degré deux, P se scinde sur $\mathbb{C}$. La remarque et quelques manipulations fournissent une base de Jordan réelle de B, où $\mathrm{Mat}(a)$ se décompose en blocs «type $K_p(I_2)$» : des blocs I_2 remplaçent les scalaires λ du bloc λK_p.

Lien avec la suite. Obtenues et ordonnées différemment, ces mêmes bases et les matrices de a et B dans ces bases, sont présentées dans le cas réel, pages 64 ($\deg P = 1$) et 65 ($\deg P = 2$). Ces matrices se trouvent aussi dans la table récapitulative, en annexe page 96, cas «a et b symétriques, $\deg P = 1$». La structure de Ω est donnée par le théorème 2 page 62.

I.1.3 Cas où a et b sont antisymétriques

L'ensemble des «bonnes bases» de E au sens de Klingenberg est cette fois l'ensemble non vide des bases :

- de Jordan pour T
- dont les «blocs de Jordan» sont a-totalement isotropes et s'apparient par paires $F \oplus F'$, paires mutuellement a-orthogonales,
- et telles que sur chaque paire $F \oplus F'$, A est de la forme :

$$K'_p = \begin{pmatrix} 0 & K_p \\ -K_p & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2p}(\mathbb{K}).$$

Autrement dit, dans une telle base :

$$\mathrm{Mat}(a) = \begin{pmatrix} K'_{p_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & K'_{p_k} \end{pmatrix} \quad \text{et :} \quad \mathrm{Mat}(T) = \begin{pmatrix} \widetilde{N}_{p_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{N}_{p_k} \end{pmatrix}, \text{ où } \widetilde{N}_p = \begin{pmatrix} N_p & 0 \\ 0 & N_p \end{pmatrix},$$

où k est un certain entier et où les p_i sont des entiers décroissants avec $p_1 = n$, indice de nilpotence de T. Les N_{p_i} sont les blocs de Jordan de T comme définis au paragraphe précédent.

Un cas particulier : Encore une fois, si P est de degré 1 ($P = X - \alpha$), la base de Jordan pour T l'est aussi pour B, et b est alors de la forme :

$$\mathrm{Mat}(b) = \begin{pmatrix} B''_{p_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & B''_{p_k} \end{pmatrix} \text{ où } B''_p = \begin{pmatrix} 0 & B'_p \\ -B'_p & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{c} \text{avec } B'_i \text{ définie} \\ \text{au paragraphe précédent.} \end{array}$$

Le cas réel : Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ que P est de degré deux, P se scinde sur $\mathbb{C}$; la remarque précédente et quelques manipulations fournissent alors encore une base de Jordan réelle de B, dans laquelle a a la forme annoncée en début de paragraphe, des blocs I_2 remplaçant les scalaires 1.

Lien avec la suite. Obtenues et ordonnées différemment, ces mêmes bases et les matrices de a et B dans ces bases, sont présentées pages 66 et suivantes (corps quelconque et $\deg P = 1$, puis $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Ces matrices se trouvent aussi dans la table récapitulative, en annexe page 96, cas «a et b antisymétriques, $\deg P = 1$». La structure de Ω est donnée par le théorème 3 page 66.

I.2 Préliminaire : objets associés à une forme réflexive et à un endomorphisme nilpotent autoadjoint ou antiautoadjoint

Dans la suite, on ramènera toujours l'étude de l'espace E muni d'un couple (a,b) de formes réflexives :

- soit au cas où B, l'endomorphisme a-autoadjoint ou a-antiautoadjoint tel que $b(\cdot,\cdot) = a(\cdot,B\cdot)$, est nilpotent — on le note alors T —,
- soit à l'étude d'un espace E seulement muni d'un endomorphisme T nilpotent.

L'énoncé des théorèmes nécessitera alors l'introduction de quelques objets canoniquement associés à un tel couple (a,T) ou à un tel endomorphisme T. C'est l'objet de cette section.

On considère donc ici, soit un endomorphisme nilpotent T, soit une forme réflexive non dégénérée $< \cdot,\cdot >$ et un endomorphisme nilpotent T, autoadjoint ou antiautoadjoint par rapport à $< \cdot,\cdot >$, *i.e.* tel que : $< T\cdot\ ,\cdot >= \pm < \cdot,T\cdot >$. Sous ces hypothèses, la notion d'orthogonalité pour les formes du type $< T^k\cdot\ ,\cdot >$ ou $< \cdot,T^k\cdot >$, $k\in\mathbb{N}$, est bien définie car les orthogonalités à droite et à gauche coïncident.

On introduit alors quelques objets associés à T ou $(< \cdot,\cdot >,T)$ et notamment, dans le deuxième cas, une famille de sous-espaces de E stables par tout endomorphisme de E commutant avec T et laissant $< \cdot,\cdot >$ invariante, c'est-à-dire stables par tout endomorphisme de $\Omega = \mathrm{Stab}(< \cdot,\cdot >) \cap \mathrm{Stab}(< \cdot,T\cdot >)$. Cette famille est en fait remarquable : elle engendre, par somme, tous les sous-espaces stables par Ω ; cela apparaîtra comme corollaire des théorèmes principaux de ce chapitre.

Introduisons les objets annoncés.

I.2.1 Une famille de drapeaux

Les $\mathbf{Im}\,\boldsymbol{T^{n-p}} \cap \mathbf{ker}\,\boldsymbol{T^q}$ sont une famille canonique de sous-espaces associés à T, on les notera $\boldsymbol{E_{p,q}}$. Ils vérifient entre eux plusieurs relations :

- $q \geq p \Rightarrow E_{p,q} = E_{p,p}$
- bien sûr, $\forall k, E_{n,k} = \ker T^k$ et : $\forall k, E_{k,k} = \mathrm{Im}\,T^{n-k}$
- $p \leq p'$ et $q \leq q' \;\Rightarrow\; E_{p,q} \subset E_{p',q'}$
- $T(E_{p,q}) = E_{p-1,q-1}$

Les $E_{p,q}$ s'ordonnent donc par inclusion dans le tableau :

$$\begin{array}{ccccccccc}
E_{1,1} & = \mathrm{Im}\,T^{n-1} & & & & & & & \\
\cap & & & & & & & & \\
E_{2,1} & \subset & E_{2,2} & = \mathrm{Im}\,T^{n-2} & & & & & \\
\cap & & \cap & & & & & & \\
E_{3,1} & \subset & E_{3,2} & \subset & E_{3,3} & = \mathrm{Im}\,T^{n-3} & & & \\
\cap & & \cap & & & & & & \\
\vdots & & \vdots & & & \ddots & & & \\
\cap & & \cap & & & & & & \\
E_{n,1} & \subset & E_{n,2} & \subset & \cdots & \subset & E_{n,n} & = \mathrm{Im}\,T^0 = E & \\
\| & & \| & & & & \| & & \\
\ker T & & \ker T^2 & & & & \ker T^n & &
\end{array}$$

De plus, dans le cas où T est $< \cdot,\cdot >$-autoadjoint ou antiautoadjoint :

$$\forall p,q,\, E_{p,q}^{\perp} = \operatorname{Im} T^q + \ker T^{n-p} = E_{n-q,n-q} + E_{n,n-p}.$$

En effet, si $v = T^q w \in \operatorname{Im} T^q$ et $u \in \ker T^q$, alors : $< v,u > = < T^q w,u > = \pm < w,T^q u > = 0$ donc $\operatorname{Im} T^q \subset (\ker T^q)^{\perp}$. Par égalité des dimensions : $\operatorname{Im} T^q = (\ker T^q)^{\perp}$ et donc :
$E_{p,q}^{\perp} = (\ker T^q \cap \operatorname{Im} T^{n-p})^{\perp} = (\ker T^q)^{\perp} + (\operatorname{Im} T^{n-p})^{\perp} = \operatorname{Im} T^q + \ker T^{n-p}$ comme annoncé.

Les sous-espaces du type : $+_{p,q\in\mathcal{E}} E_{p,q}$ où : $\mathcal{E} \subset \{(p,q) \in [\![1,n]\!]^2 \,/\, p \geq q\}$ forment donc une famille stable par T et par passage à l'orthogonal. Comme annoncé, ce sont les seuls espaces «intrinsèques» de la situation, au sens suivant :

Proposition 2 *Soit F un sous-espace de E. Sont équivalents :*

1. *F est intrinsèquement associé à $(T,< \cdot,\cdot >)$* i.e. *est stable par tout endomorphisme de* Stab$(< \cdot,\cdot >)$ *commutant avec T,*

2. *F est intrinsèquement associé à T* i.e. *est stable par le centralisateur de T,*

3. *F est de la forme : $F = +_{p,q\in\mathcal{E}} E_{p,q}$ où : $\mathcal{E} \subset \{(p,q) \in [\![1,n]\!]^2 \,/\, p \geq q\}$.*

Cette proposition est un corollaire des théorèmes principaux, 1 et 5 pages 56 et 80. Sa démonstration vient en fin de section II.2.

I.2.2 Des formes bilinéaires sur E et sur certains quotients

Dans la situation $(E,< \cdot,\cdot >,T)$, on définit :

• Les formes $\boldsymbol{b_k = < .,. >_k = < .,T^k. >}$. Par définition, $b_0 = < \cdot,\cdot > = a$ est non dégénérée ; toutes les autres sont dégénérées. Il faut noter que, loin de se ressembler, ces formes sont linéairement indépendantes.

• La forme non dégénérée $\boldsymbol{b^k}$, sur chaque $E/\ker T^k$: b^k est définie par passage au quotient de b_k. Comme $\ker T^k = \ker b_k$, chaque forme b^k est bien définie, non dégénérée.

• les $\boldsymbol{(\breve{E}_k,\breve{b}^k)_{k=0}^{n-1}}$, famille de quotients, munis chacun d'une forme non dégénérée. Les $\breve{E}_k$ sont les $E_{n,k+1}/(E_{n,k}+E_{n-1,k+1})$ et $\breve{b}^k$ provient de b^k : b^k est définie sur $E/\ker T^k$ donc en particulier sur $E_{n,k+1}/\ker T^k$. De plus : $\ker\left(b^k_{|E_{n,k+1}/\ker T^k}\right) = E_{n-1,k+1}/(\ker T^k \cap E_{n-1,k+1})$. En conséquence, $b^k_{|E_{n,k+1}/\ker T^k}$ passe au quotient en une forme non dégénérée sur :

$$\left[E_{n,k+1}/\ker T^k\right] \Big/ \left[E_{n-1,k+1}/(\ker T^k \cap E_{n-1,k+1})\right] \simeq E_{n,k+1}/(E_{n,k} + E_{n-1,k+1}) \quad \text{noté } \breve{E}_k.$$

La situation est récapitulée dans le diagramme 1 page suivante.

I.2.3 Les décompositions de E «adaptées» à T ou à $(< \cdot,\cdot >,T)$

Introduisons un type particulier de décompositions de E :

Définition 1 *Soit (E,T) un espace muni d'un endomorphisme nilpotent T ou $(E,< \cdot,\cdot >,T)$ un espace muni d'une forme bilinéaire $< \cdot,\cdot >$ et d'un endomorphisme T, comme décrits en début de section. Une décomposition D de E de la forme : $E = \overset{n}{\underset{p=1}{\oplus}} (\overset{p}{\underset{q=1}{\oplus}} D_{p,q})$ est*

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
E_{1,1} & & & & & & & & [E_{n,k+1}]\rightarrow & & & & \\
\cap & & & & & & [E_{n,k}+E_{n-1,k+1}]\rightarrow & & & & & & \\
E_{2,1} & \subset & E_{2,2} & & & & & & & & & & \\
\cap & & \cap & & \ddots & & & & & & & & \\
\vdots & & \vdots & & & & E_{k,k} & & & & & & \\
\vdots & & \vdots & & & & \cap & & & & & & \\
\vdots & & \vdots & & & & E_{k+1,k} & \subset & E_{k+1,k+1} & & & & \\
\vdots & & \vdots & & & & \cap & & \cap & & & & \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \\
\cap & & \cap & & & & \cap & & \cap & & & & \\
E_{n,1} & \subset & E_{n,2} & \subset & \cdots & \subset & E_{n,k} & \subset & \boxed{E_{n,k+1}} & \subset & \cdots & \subset & E_{n,n} \\
 & & & & & & & & \downarrow & & & & \\
 & & & & & & & & \breve{E}_k & & & &
\end{array}
$$

Diagramme 1 – les quotients $\breve{E}_k$

dite **adaptée** *à T si elle vérifie les deux premières des propriétés suivantes et* **adaptée** *à $(<\cdot,\cdot>,T)$ si elle vérifie les trois (on utilise les notations déjà introduites) :*

- *elle respecte les inclusions des $E_{p,q}$,* i.e. *chaque $D_{p,q}$ est un relevé de $E_{p,q}/(E_{p-1,q}+E_{p,q-1})$ dans $E_{p,q}$,*
- $\forall p \leq n, \forall q \leq p, D_{p,q} = T^{n-p}(D_{n,q+(n-p)})$,
- $E = \left(\overset{\perp}{\underset{p+q\leq n}{\bigoplus}} \left(\underbrace{D_{p,q}}_{\text{tot. isotrope}} \oplus \underbrace{D_{n+1-q,n+1-p}}_{\text{tot. isotrope}} \right) \right) \overset{\perp}{\oplus} \left(\overset{\perp}{\underset{p<1+n/2}{\bigoplus}} \underbrace{D_{p,n+1-p}}_{\text{non dégénéré}} \right)$.

On notera $\mathcal{D}$ l'ensemble des décompositions adaptées de E.

Dans le cas $(E,<\cdot,\cdot>,T)$, on a le diagramme 2 suivant :

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
D_{1,1} & & & & & & & & & & & & & & \\
\oplus & & & & & & & & & & & & & & \\
D_{2,1} & \oplus & D_{2,2} & & & & & & & & & & & & \\
\oplus & & \oplus & & & & & & & & & & & & \\
D_{3,1} & \oplus & D_{3,2} & \oplus & D_{3,3} & & & & & & & & & & \\
\oplus & & \oplus & & \oplus & & & & & & & & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & & & & & & & \\
\oplus & & \oplus & & \oplus & & & & & & & & & & \\
D_{n-2,1} & \oplus & D_{n-2,2} & \oplus & \boxed{D_{n-2,3}} & \oplus & \cdots & \oplus & D_{n-2,n-2} & & & & & & \\
\oplus & & \oplus & & \oplus & & & & & & & & & & \\
D_{n-1,1} & \oplus & \boxed{D_{n-1,2}} & \oplus & D_{n-1,3} & \oplus & \cdots & \oplus & D_{n-1,n-2} & \oplus & D_{n-1,n-1} & & & & \\
\oplus & & \oplus & & \oplus & & & & \oplus & & \oplus & & & & \\
\boxed{D_{n,1}} & \oplus & D_{n,2} & \oplus & D_{n,3} & \oplus & \cdots & \oplus & D_{n,n-2} & \oplus & D_{n,n-1} & \oplus & D_{n,n} = E & &
\end{array}
$$

Diagramme 2 – *une «décomposition adaptée»* $(D_{p,q})_{1\leq q\leq p\leq n}$

ou, écrit autrement :

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
T^{n-1}(D_{n,n}) & & & & & & & & & & \\
\oplus & & & & & & & & & & \\
T^{n-2}(D_{n,n-1}) & \oplus & T^{n-2}(D_{n,n}) & & & & & & & & \\
\oplus & & \oplus & & & & & & & & \\
T^{n-3}(D_{n,n-2}) & \oplus & T^{n-3}(D_{n,n-1}) & \oplus & T^{n-3}(D_{n,n}) & & & & & & \\
\oplus & & \oplus & & \oplus & & & & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & & & & & \\
\oplus & & \oplus & & \oplus & & & & & & \\
T^2(D_{n,3}) & \oplus & T^2(D_{n,4}) & \oplus & \boxed{T^2(D_{n,5})} & \oplus \cdots \oplus & T^2(D_{n,n}) & & & & \\
\oplus & & \oplus & & \oplus & & & & & & \\
T(D_{n,2}) & \oplus & \boxed{T(D_{n,3})} & \oplus & T(D_{n,4}) & \oplus \cdots \oplus & T(D_{n,n-1}) & \oplus & T(D_{n,n}) & & \\
\oplus & & \oplus & & \oplus & & \oplus & & \oplus & & \\
\boxed{D_{n,1}} & \oplus & D_{n,2} & \oplus & D_{n,3} & \oplus \cdots \oplus & D_{n,n-2} & \oplus & D_{n,n-1} & \oplus & D_{n,n} = E
\end{array}
$$

DIAGRAMME 3 – *une « décomposition adaptée »* $(D_{p,q})_{1\leq q\leq p\leq n}$*, autre présentation*

où :

- chaque terme de la grande diagonale — les termes encadrés — est non-dégénéré, orthogonal à tout autre terme,
- tous les autres termes sont totalement isotropes,
- chaque somme de deux termes en position symétrique par rapport à la grande diagonale — par exemple $D_{3,2} \oplus D_{n-1,n-2} = T^{n-3}(D_{n,n-1}) \oplus T(D_{n,n-1})$ — est non dégénérée, orthogonale à tout autre terme.

Le troisième point de la définition peut également être formulé ainsi : pour tout $(q_1,q_2) \in [\![1,n]\!]^2$ et tout $(k,l) \in [\![0,n-1]\!]^2$, $T^k(D_{n,q_1})$ et $T^l(D_{n,q_2})$ sont de somme non dégénérée si $q_1 = q_2 = l + k + 1$, et orthogonaux sinon. L'existence de telles décompositions découle de la proposition 3 donnée page 57 en section II.2. .

Remarque Les décompositions de E adaptées à T nilpotent existent : c'est le théorème de Jordan. Les décompositions adaptés à (a,T) existent également, on le montre dans la proposition 3 page 57.

On peut à présent énoncer le théorème 1.

II Cas a et b de même nature

II.1 Structure et action de Ω quand a et b sont de même nature

Ici a et b sont deux formes réflexives de même nature et a est non dégénérée. On pose B l'endomorphisme a-autoadjoint tel que $b(\cdot\,,\cdot) = a(\cdot\,,B\cdot)$. D'après la proposition 1 page 49, on peut supposer B de polynôme minimal P^n, P irréductible. On note S la partie semi-simple de B et T sa partie nilpotente : $B = T + S$, $TS = ST$. On note n l'indice de nilpotence de T. Comme polynômes en B, S et T sont également a-autoadjoints.

Attention, il ne s'agit pas ici tout à fait de l'endomorphisme nilpotent $T = P(B)$ introduit par Klingenberg et présenté dans la section I.1, bien que ce qui suit soit également vérifié avec $T = P(B)$.

Remarque : une telle décomposition $B = T + S$ n'existe que si P a toutes ses racines séparables. C'est le cas pour tout endomorphisme de E *ssi* $\mathbb{K}$ est parfait (en particulier donc si $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle).

En pratique cependant, le problème ne se pose pas : la suite ne considère que le cas où P est de degré un — c'est-à-dire notamment le cas où $\mathbb{K}$ est algébriquement clos —, sauf si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ où tous les cas sont traités. Cela suffit en un sens : si $\deg P > 1$ et $\mathbb{K}$ quelconque, on considère B comme endomorphisme de $E \otimes_{\mathbb{K}} \overline{\mathbb{K}}$ avec $\overline{\mathbb{K}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{K}$; le théorème explicite alors l'action de Ω sur l'espace $E \otimes_{\mathbb{K}} \overline{\mathbb{K}}$.

Dans le cas des corps parfaits, un théorème explicitant l'action de Ω sur E lui-même, quel que soit le degré de P, serait donc possible sur le même modèle.

II.1.1 Le théorème

Théorème 1 *Si $\deg P = 1$, Ω agit simplement transitivement sur $\mathcal{D} \times \prod_{k=0}^{n-1} \mathrm{Stab}(\check{E}_k,\check{b}_k)$, où $\mathcal{D}$ est l'ensemble des décompositions de E adaptées à (a,T). Plus précisément, Ω est isomorphe à un produit semi-direct $N \rtimes R$, où :*

- $N = \{\gamma \in \Omega \ /$ l'action induite par γ sur chaque $\check{E}_k$ est triviale $\}$. *C'est un sous-groupe distingué de Ω, nilpotent d'indice $\leq 2n-1$, qui agit simplement transitivement sur $\mathcal{D}$,*
- *$R = \Omega/N$ agit simplement transitivement sur $\prod_{k=0}^{n-1} \mathrm{Stab}(\check{E}_k,\check{b}_k)$ — en particulier $R \simeq \prod_{k=0}^{n-1} \mathrm{Stab}(\check{E}_k,\check{b}_k)$. R est réductif.*

Ce théorème est décliné dans les trois cas possibles — symétrique, antisymétrique, sesquilinéaire — au cours des sections II.3 page 62, II.4 page 66 et II.5 page 68.

II.1.2 Une construction de Ω par récurrence

On peut dans une certaine mesure dégager, par récurrence et à titre de corollaire, la structure de Ω. Cela nécessite cependant l'introduction d'objets supplémentaires à ceux définis en section I.2 et nettement moins essentiels. On les introduit ici, par une notation et une définition.

Notation : on note $E^k = E/\ker T^k$. En particulier, $E^0 = E$, $E^n = \{0\}$. Pour tous $p,q \leq n$, on note $E^k_{p,q}$ l'image de $E_{p,q}$ par la projection canonique $\pi^k \ : \ E \to E^k$. On rappelle que chaque E^k est muni de la forme réflexive non dégénérée b^k et d'un endomorphisme b^k-(anti)autoadjoint obtenu par l'action quotient de T, et qu'on note encore T. Les $E^k_{p,q}$ s'ordonnent par inclusion comme les $E_{p,q}$:

$$\begin{array}{ccccccc}
E^k_{k+1,k+1} = \pi^k(\operatorname{Im} T^{n-(k+1)}) & & & & & & \\
\cap & & & & & & \\
E^k_{k+2,k+1} & \subset & E^k_{k+2,k+2} = \pi^k(\operatorname{Im} T^{n-(k+2)}) & & & & \\
\cap & & \cap & & & & \\
E^k_{k+3,k+1} & \subset & E^k_{k+3,k+2} & \subset & E^k_{k+3,k+3} & & \\
\cap & & \cap & & & & \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \\
E^k_{n,k+1} & \subset & E^k_{n,k+2} & \subset & \cdots & \subset & E^k_{n,n} = E^k \\
\| & & \| & & & & \\
\pi^k(\ker T^{k+1}) & & \pi^k(\ker T^{k+2}) & & & &
\end{array},$$

Définition 2 *Pour tout $k < n$, $\ker T^k$ est stable sous l'action de Ω ; Ω agit donc sur les quotients E^k. Soit $\Omega^k \subset GL(E^k)$ le sous-groupe de $GL(E^k)$ correspondant à cette action :*

$$\Omega^k = \{\gamma^k \in GL(E^k) \ / \exists \gamma \in \Omega \ : \ \forall x \in E, \gamma^k(\pi^k(x)) = \pi^k(\gamma(x))\}.$$

En particulier, $\Omega^0 = \Omega$ et $\Omega^n = GL(E^n) = GL(\{0\}) = \{\mathrm{Id}\}$. Rappelons que b^k est définie sur E^k, donc que $\operatorname{Stab}(b^k) \subset GL(E^k)$. On peut alors énoncer le résultat suivant :

Corollaire 1 (du théorème 1 et de la proposition 3, énoncée en section suivante) *Les groupes Ω^k vérifient :*

$$\begin{aligned}
\forall k < n, \Omega^k &= \operatorname{Stab}(b^k) \cap \operatorname{Stab}(b^k(\cdot\,, T\cdot)) \\
&= \{\gamma \in \operatorname{Stab}(b^k) \ / \ \gamma(E^k_{n,k+1}) \subset E^k_{n,k+1} \\
&\qquad\qquad \text{et l'action de } \gamma \text{ sur } E^{k+1} \simeq E^k/E^k_{n,k+1} \text{ est dans } \Omega^{k+1}\ \}.
\end{aligned}$$

Ce corollaire construit chaque Ω^k à partir de Ω^{k+1}. Par récurrence, il permet donc de dégager la structure de $\Omega = \Omega^0$. Dans le cas a et b symétriques, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\deg P = 1$, on exploite en ce sens ce corollaire en section II.7 page 72.

II.2 Démonstrations

Pour alléger les notations, on note :

- dans chaque E^k, $F^k = E^k_{n,k+1} = \pi^k(\ker T^{k+1})$.
- $\overline{\pi}^k$ la projection canonique : $E^{k-1} \to E^k$.

II.2.1 Les décompositions adaptées

Montrons l'existence des décompositions adaptées à $(E,< \cdot\,,\cdot >,T)$ au sens de la définition 1 page 53. Il est même intéressant de montrer un peu plus, en effet :

Remarque : Si $D = (D_{p,q})_{k+1 \le q \le p \le n}$ est une décomposition adaptée de (E^k,b^k,T), on vérifie alors que $D' = (\overline{\pi}^{k+1}(D_{p,q}))_{k+2 \le q \le p \le n}$, «projeté de D sur E^{k+1} par $\overline{\pi}^{k+1}$», est une décomposition adaptée de (E^{k+1},b^{k+1},T). Réciproquement :

Proposition 3 *Si $D^k = (D^k_{p,q})_{k+1\leq q\leq p\leq n}$ est une décomposition adaptée de (E^k,b^k,T), alors il existe une décomposition adaptée $D^{k-1} = (D^{k-1}_{p,q})_{k\leq q\leq p\leq n}$ de (E^{k-1},b^{k-1},T), qui «se projette par $\overline{\pi}^k$ sur D^k» : $\forall(p,q), k+1 \leq q \leq p \leq n \Rightarrow D^k_{p,q} = \overline{\pi}^k(D^{k-1}_{p,q})$.*

Corollaire 2 *$\mathcal{D} \neq \emptyset$.*

$(\{0\})$ est une décomposition adaptée de $E^n \simeq \{0\}$. D'après la proposition 3 page 57, et par récurrence descendante sur k, il existe alors une décomposition adaptée de chaque (E^k,b^k,T) et en particulier de $(E,<\cdot,\cdot>,T)$, *i.e.* $\mathcal{D} \neq \emptyset$. □

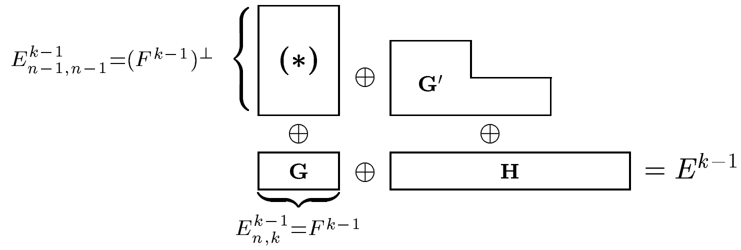
Démonstration de la proposition :

- <u>*Construction d'une famille de sous-espaces de E^{k-1}, se projetant sur D^k.*</u>

Notons $A^k = \oplus_{k+1\leq q\leq n} D^k_{n,q} \subset E^k$ et $A^{k-1} = (\overline{\pi}^k)^{-1}(A^k) \subset E^{k-1}$. Vérifions que A^{k-1} est b^{k-1}-non dégénéré. On choisit un supplémentaire b^{k-1}-totalement isotrope H de $F^{k-1} + (F^{k-1})^\perp$ dans E^{k-1} (*cf.* remarque informative après cette démonstration). Alors $H^\perp \cap F^{k-1}$ noté G et $H^\perp \cap (F^{k-1})^\perp$ noté G' sont chacun non-dégénérés et :

$$E^{k-1} = [(F^{k-1} \cap (F^{k-1})^\perp) \oplus H] \overset{\perp}{\oplus} G \overset{\perp}{\oplus} G'.$$

Dans un diagramme calqué sur celui des $E^{k-1}_{p,q}$ (voir page 56) :



où $(*) = F^{k-1} \cap (F^{k-1})^\perp$. Or : $A^{k-1} \oplus G' = E^{k-1}$, en effet : supposons $x \in A^{k-1} \cap G'$, alors : $\overline{\pi}^k(x) \in A^k$ et $\overline{\pi}^k(x) \in \overline{\pi}^k((F^{k-1})^\perp) = \overline{\pi}^k(E^{k-1}_{n-1,n-1}) = E^k_{n-1,n-1}$ donc $\overline{\pi}^k(x) = 0$ *i.e.* $x \in F^{k-1}$. Mais $F^{k-1} \cap G' = \{0\}$ donc $x = 0$ et : $A^{k-1} \cap G' = E^{k-1} = \{0\}$. D'autre part $\overline{\pi}^k(A^{k-1} + G') = A^k + E^k_{n-1,n-1} = E^k$ et $F^{k-1} \subset A^{k-1}$ donc : $A^{k-1} \oplus G' = E^{k-1}$. Comme G' est b^{k-1}-non dégénéré, A^{k-1} l'est aussi.

Dans A^{k-1}, on choisit alors un supplémentaire totalement isotrope B^{k-1} de $\big(F^{k-1} + (F^{k-1})^\perp\big) \cap A^{k-1} = F^{k-1} = E^{k-1}_{n,k}$ (*cf.* à nouveau la remarque en fin de démonstration). Alors, par définition, $\overline{\pi}^k$ induit l'isomorphisme :

$$B^{k-1} \underset{\simeq}{\overset{\overline{\pi}^k}{\longrightarrow}} A^k.$$

Notons alors $D^{k-1}_{n,q} = (\overline{\pi}^k_{|B^{k-1}})^{-1}(D^k_{n,q})$ pour tout $q \in [\![k+1,n]\!]$. On pose enfin, dans A^{k-1} : $D^{k-1}_{n,k} = (B^{k-1})^\perp$; comme A^{k-1} est non dégénéré et F^{k-1} totalement isotrope, $D^{k-1}_{n,k} \cap F^{k-1} = \{0\}$ et $D^{k-1}_{n,k}$ est donc un supplémentaire de $(F^{k-1})^\perp = E^{k-1}_{n-1,k}$ dans $F^{k-1} = E^{k-1}_{n,k}$. Soit D^{k-1} la famille définie par : $D^{k-1} = (D^{k-1}_{p,q})_{k\leq q\leq p\leq n} = (T^{n-p}(D^{k-1}_{n,q+n-p}))_{k\leq q\leq p\leq n}$. Alors, D^k est «l'image par $\overline{\pi}^k$» de D^{k-1} : par définition : $\forall q \in [\![k+1,n]\!], \overline{\pi}^k(D^{k-1}_{n,q}) = D^k_{n,q}$. Comme l'action de T commute avec $\overline{\pi}^k$: $\forall p \in [\![k+1,n]\!], \forall q \in [\![k+1,p]\!], \overline{\pi}^k(D^{k-1}_{p,q}) = \overline{\pi}^k(T^{n-p}(D^{k-1}_{n,q+n-p})) = T^{n-p}(\overline{\pi}^k(D^{k-1}_{n,q+n-p})) = T^{n-p}(D^k_{n,q+n-p}) = D^k_{p,q}$.

• *Vérification : il s'agit d'une décomposition adaptée de E^{k-1}.*

Il faut vérifier que D^{k-1} satisfait le premier et le troisième point de la définition 1 page 53.

– Chaque $D^{k-1}_{n,q}$ est un relevé de $E^{k-1}_{n,q}/(E^{k-1}_{n,q-1}+E^{k-1}_{n-1,q})$ dans $E^{k-1}_{n,q}$: si $q=k$, on l'a déjà remarqué plus haut et si $q \geq k+1$, $D^{k-1}_{n,q} = (\overline{\pi}^k_{|B^{k-1}})^{-1}(D^k_{n,q})$ et $D^k_{n,q}$ vérifie la même propriété. Par transport par les puissances de T : chaque $D^{k-1}_{p,q}$ est un relevé de $E^{k-1}_{p,q}/(E^{k-1}_{p,q-1}+E^{k-1}_{p-1,q})$ dans $E^{k-1}_{p,q}$.

– D^k est une décomposition adaptée à (E^k,b^k,T), donc : $T^l(D^k_{n,q_1})$ et $T^m(D^k_{n,q_2})$ sont de somme non dégénérée si $q_1=q_2=l+m+k+1$, et sont orthogonaux sinon.

Soient $v \in D^{k-1}_{n,q_1}$ et $w \in D^{k-1}_{n,q_2}$. Soient l et m dans $[\![0,n-k]\!]$ t.q. $l+m \geq 1$ — on suppose par exemple que $m \geq 1$ et on choisit $w' \in T^{-1}(w)$ —, alors : $b^{k-1}(T^l v,T^m w) = \pm b^{k-1}(v,T^{l+m}w) = \pm b^k(\overline{\pi}^k v,T^{l+m-1}(\overline{\pi}^k w'))$. Par conséquent, b^{k-1} sur $T^l(D^{k-1}_{n,q_1})+T^m(D^{k-1}_{n,q_2})$ est comme b^k sur $T^l(D^{k-1}_{n,q_1})+T^{m-1}(D^{k-1}_{n,q_2})$. Ainsi, $T^l(D^{k-1}_{n,q_1})$ et $T^m(D^{k-1}_{n,q_2})$ sont de somme non dégénérée si $q_1=q_2=l+(m-1)+k+1=l+m+k$, et sont orthogonaux sinon. D^{k-1} vérifie le troisième point de la définition 1 page 53 et est donc adaptée à (E^{k-1},b^{k-1},T). □

Remarque : Les choix arbitraires effectués dans cette démonstration sont ceux de supplémentaires totalement isotropes quelconques de certains sous-espaces dans certains quotients. La construction effectuée repose donc, par récurrence, sur de tels choix successifs. On pourra, à titre informatif, consulter la section II.6 page 69 qui détaille cette situation élémentaire et notamment les groupes mis alors en jeu.

II.2.2 Démonstration du théorème

Le vrai travail réside dans la proposition démontrée ci-dessus. Le théorème en est la suite facile et un peu fastidieuse à vérifier. On suppose P de degré un, on le note $X-\lambda$. En particulier, $S=\lambda\,\mathrm{Id}$.

• Ω agit sur $\mathcal{D}$ et sur $\prod_k \mathrm{Stab}(\check{E}_k,\check{b}^k)$

Cela est facile à voir. Soit γ un élément de Ω et $D=(D_{p,q})_{q\leq p\leq n}$ une décomposition adaptée de E. Alors $(\gamma(D_{p,q}))_{q\leq p\leq n}$ est aussi une décomposition adaptée de E. En effet :

∗ γ préserve $<\cdot,\cdot>$ et $<\cdot,T\cdot>$, donc : $<\gamma\cdot,T(\gamma\cdot)> = <\cdot,T\cdot> =$ $<\gamma\cdot,\gamma(T\cdot)>$, et donc γ commute avec T. En conséquence : γ préserve les $E_{p,q}$ et donc la décomposition $(\gamma(D_{p,q}))_{q\leq p\leq n}$ respecte les inclusions des $E_{p,q}$, premier point de la définition 1 page 53. $\gamma(D_{p,q}) = \gamma(T^{n-p}(D_{n,q+(n-p)})) = T^{n-p}(\gamma(D_{n,q+(n-p)}))$; les $\gamma(D_{p,q})$ satisfont donc la deuxième condition de la définition 1.

∗ d'autre part, la propriété :

$$E = \left(\overset{\perp}{\underset{p+q\leq n}{\oplus}} \Big(\underbrace{D_{p,q}}_{\text{tot. isotrope}} \oplus \underbrace{D_{n+1-q,n+1-p}}_{\text{tot. isotrope}} \Big) \right) \overset{\perp}{\oplus} \left(\overset{\perp}{\underset{p<1+n/2}{\oplus}} \underbrace{D_{p,n+1-p}}_{\text{non dégénéré}} \right)$$

vérifiée par les $D_{p,q}$ l'est aussi par les $\gamma(D_{p,q})$ parce que γ est $<\cdot,\cdot>$-orthogonal.

D'autre part, γ laisse stables tous les les $E_{p,q}$, donc l'action de γ passe au quotient sur les $\overline{E}_k$. γ préserve aussi $<\cdot,\cdot>$ et commute avec T, donc préserve toutes les formes $\check{b}^k$ et γ agit donc sur $\prod_k \mathrm{Stab}(\check{E}_k,\check{b}^k)$.

• *N et R agissent simplement transitivement, respectivement sur $\mathcal{D}$ et sur $\prod_{k=0}^{n-1}\mathrm{Stab}(\check{E}_k,\check{b}_k)$.*

Pour tout $k < n$, soit β_k une base quelconque de $\check{E}_k$. Soient $D = (D_{p,q})_{q \leq p \leq n}$ et $\Delta = (\Delta_{p,q})_{q \leq p \leq n}$ deux décompositions adaptées de E. Pour tout $k \leq n$, $D_{n,k} \simeq \Delta_{n,k} \simeq \check{E}_{k-1}$ de façon canonique. Ces isomorphismes fournissent donc , pour tout k, une base β^D_{k-1} de $D_{n,k}$ et une base β^Δ_{k-1} de $\Delta_{n,k}$. T^{n-p} étant bijectif de $D_{n,q+(n-p)}$ sur $D_{p,q}$ et de $\Delta_{n,q+(n-p)}$ sur $\Delta_{p,q}$, $T^{n-p}(\beta^D_{q+n-p-1})$ et $T^{n-p}(\beta^\Delta_{q+n-p-1})$ sont des bases, respectivement de $D_{p,q}$ et de $\Delta_{p,q}$. On les notera $\beta^D_{p,q}$ et $\beta^\Delta_{p,q}$.

On définit alors γ linéaire par : $\forall\, q \leq p \leq n, \gamma\ :\ \beta^D_{p,q} \mapsto \beta^\Delta_{p,q}$. On vérifie alors sur les vecteurs des bases β^D et β^Δ que γ préserve $< \cdot, \cdot > = a$ et $< \cdot, T\cdot > = < \cdot, (B-S)\cdot > = b - \lambda a$, donc préserve a et b et est dans Ω. Par construction, γ agit trivialement sur les $\check{E}_k$, donc de plus : $\gamma \in N$. Enfin, si $\gamma' \in N$ et $\gamma'(D) = \Delta$, alors nécessairement, $\forall p,q, \gamma'(\beta^D_{p,q}) = \beta^\Delta_{p,q}$ et donc $\gamma' = \gamma$. $\underline{N \text{ agit simplement transitivement sur } \mathcal{D}.}$

Soit de plus $(h_k)_{k=0}^{n-1} \in \prod_k \mathrm{Stab}(\check{E}_k, \check{b}^k)$ une famille de transformations orthogonales, symplectiques ou unitaires des $\check{E}_k$. On pose : ${\beta^h}_k = h_k(\beta_k)$. Les isomorphismes canoniques $D_{n,k} \simeq \check{E}_{k-1}$ permettent à nouveau de définir, à partir des β_k et des ${\beta^h}_k$, des bases $\beta^D_{p,q}$ et $\beta^{h,D}_{p,q}$ de chaque $D_{p,q}$.

On définit alors γ linéaire par : $\forall\, q \leq p \leq n, \gamma\ :\ \beta^D_{p,q} \mapsto \beta^{h,D}_{p,q}$. On vérifie encore sur les vecteurs des bases β^D et $\beta^{h,D}$ que γ préserve $< \cdot, \cdot > = a$ et $< \cdot, T\cdot > = < \cdot, (B-S)\cdot > = b - \lambda a$, donc préserve a et b et est dans Ω. Par construction, l'action de γ sur chaque $\check{E}_k$ est celle de h_k. Ainsi, Ω agit transitivement sur $\prod_k \mathrm{Stab}(\check{E}_k, \check{b}^k)$, par translation à gauche. Soit $\gamma' \in \Omega$ agissant pareillement sur ces quotients ; alors $\gamma^{-1} \circ \gamma'$ agit trivialement sur eux et est donc dans N. $\gamma' \equiv \gamma\ [N]$ et donc $\underline{R = \Omega/N \text{ agit simplement transitivement sur } \prod_{k=0}^{n-1} \mathrm{Stab}(\check{E}_k, \check{b}^k).}$

• $\underline{N \text{ est nilpotent d'indice } \leq 2n-1.}$

Soit $\mathfrak{n}$ l'algèbre de Lie de N. N agit trivialement sur les $\check{E}_k = E_{n,k+1}/(E_{n-1,k+1} + E_{n,k})$ et commute avec l'action de T. Les différentes puissances de T envoient les $E_{n,k+1}/(E_{n-1,k+1} + E_{n,k})$ sur tous les $E_{p,q}/(E_{p-1,q} + E_{p,q-1})$, donc N agit encore trivialement sur chacun d'eux. Or, pour tout (p,q), $N(E_{p,q}) \subset E_{p,q}$, donc : $\forall q \leq p \leq n, \mathfrak{n}(E_{p,q}) \subset E_{p-1,q} + E_{p,q-1}$. Donc, si $\nu \in \mathfrak{n}$, $\mathrm{Im}\, \nu^{2n-1} \subset E_{0,1} + E_{1,0} = \{0\}$, c'est le résultat voulu.

• $\underline{\Omega \simeq N \rtimes R.}$

Ω est extension de R par N, on a la suite exacte : $\{0\} \to N \to \Omega \to R \to \{0\}$. Pour montrer que : $\Omega = N \rtimes R$, il faut et il suffit d'exhiber une section s de la surjection $\Omega \to R$, dont l'image est un sous-groupe de Ω. Il suffit pour cela, par exemple, de choisir une décomposition adaptée D de E et de choisir dans chaque classe $\overline{\gamma} \in R$ l'elément (unique) $s(\overline{\gamma})$ stabilisant D. On le construit par le procédé de construction de γ au paragraphe précédent. On pose alors, $G_D = \{s(\overline{\gamma})\ /\ \overline{\gamma} \in R\} = \{\gamma \in \Omega\ /\ \gamma(D) = D\}$, c'est un sous-groupe de Ω. Il n'y a pas de section dont l'image soit un sous-groupe distingué car le produit n'est pas direct, on le verra dans la section II.7 page 72. □

II.2.3 Démonstration du corollaire 1

La première égalité. Tout γ de Ω laisse invariant chaque b_k, donc en particulier : $\Omega^k \subset \mathrm{Stab}(b^k) \cap \mathrm{Stab}(b^k(\cdot, T\cdot))$. Reste à montrer le sens $\boxed{\supset}$. Faisons-le par récurrence sur k ; supposons :

$$\Omega^k \supset \mathrm{Stab}(b^k) \cap \mathrm{Stab}(b^k(\cdot, T\cdot)).$$

Soit $\gamma^{k+1} \in \Omega^{k+1}$. Par le théorème 1 page 56, Ω^{k+1} agit simplement transitivement sur $\mathcal{D}^{k+1} \times \prod_{l=k+1}^{n-1} \mathrm{Stab}(\check{E}_l,\check{b}^l)$ où $\mathcal{D}^{k+1}$ est l'ensemble des décompositions adaptées de (E^{k+1},b^{k+1},T). On choisit $D^{k+1} \in \mathcal{D}^{k+1}$; γ^{k+1} est caractérisé par $D'^{k+1} = \gamma^{k+1}(D^{k+1})$ et par $(h_l)_{l=k+1}^{n-1} \in \prod_{l=k+1}^{n-1} \mathrm{Stab}(\check{E}_l,\check{b}^l)$ son action sur $\prod_{l=k+1}^{n-1} \check{E}_l$. Par la proposition 3 page 57, il existe D^k et D'^k dans $\mathcal{D}^k$ se projetant par $\overline{\pi}^{k+1}$ sur D^{k+1} et D'^{k+1} respectivement. Par le théorème 1, il existe un (et un seul) $\gamma^k \in \mathrm{Stab}(b^k) \cap \mathrm{Stab}(b^k(\cdot\,,T\cdot))$ envoyant D^k sur D'^k et dont l'action sur $\prod_{l=k}^{n-1} \check{E}_l$ est : $(\mathrm{Id}_{\check{E}_k},(h_l)_{l=k+1}^{n-1}) \in \prod_{l=k}^{n-1} \mathrm{Stab}(\check{E}_l,\check{b}^l)$. Alors γ^k laisse stable $E^k_{n,k+1} = \pi^k(\ker T^{k+1})$ et par construction :

- l'action quotient de γ^k sur E^{k+1} envoie D^{k+1} sur D'^{k+1},
- son action sur $\prod_{l=k+1}^{n-1} \check{E}_l$ est : $(h_l)_{l=k+1}^{n-1}$,

ce qui caractérise γ^{k+1}, *i.e.* : $\gamma^{k+1} \circ \overline{\pi}^{k+1} = \overline{\pi}^{k+1} \circ \gamma^k$.

Or par hypothèse de récurrence, $\Omega^k \supset \mathrm{Stab}(b^k) \cap \mathrm{Stab}(b^k(\cdot\,,T\cdot))$ donc $\gamma^k \in \Omega^k$ *i.e.* il existe un γ de Ω t.q. : $\gamma^k \circ \pi^k = \pi^k \circ \gamma$. Avec ce γ : $\gamma^{k+1} \circ \pi^{k+1} = \gamma^{k+1} \circ \overline{\pi}^{k+1} \circ \pi^k = \overline{\pi}^{k+1} \circ \gamma^k \circ \pi^k = \overline{\pi}^{k+1} \circ \pi^k \circ \gamma = \pi^{k+1} \circ \gamma$ et donc $\gamma^{k+1} \in \Omega^{k+1}$. La récurrence se propage.

Enfin, l'hypothèse de récurrence est vraie par définition de Ω pour $k = 0$: $\Omega^0 = \Omega = \mathrm{Stab}(b^0) \cap \mathrm{Stab}(b^1)$.

La deuxième égalité. Encore une fois, il suffit de vérifier $\boxed{\supset}$. Montrons donc :

$$\forall k \in [\![0,n-1]\!],\ \mathrm{Stab}(b^k) \cap \mathrm{Stab}(b^k(\cdot\,,T\cdot))$$
$$\supset \{\gamma \in \mathrm{Stab}(b^k)\ /\ \gamma(E^k_{n,k+1}) \subset E^k_{n,k+1} \text{ et l'action de } \gamma \text{ sur } E^{k+1} \simeq E^k/E^k_{n,k+1} \text{ est dans } \Omega^{k+1}\ \}.$$

Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$ et $\gamma^k \in \mathrm{Stab}(b^k)$, stabilisant $E^k_{n,k+1}$ et tel qu'il existe $\gamma^{k+1} \in \Omega^{k+1}$ vérifiant : $\overline{\pi}^{k+1} \circ \gamma^k = \gamma^{k+1} \circ \overline{\pi}^{k+1}$. Montrons que : $\gamma^k \in \mathrm{Stab}(b^k(\cdot\,,T\,\cdot))$. Soit $(x,y) \in (E^k)^2$.

$$\begin{aligned} b^k(\gamma^k x,T(\gamma^k y)) &= b^{k+1}(\overline{\pi}^{k+1}(\gamma^k x),\overline{\pi}^{k+1}(\gamma^k y)) \\ &= b^{k+1}(\gamma^{k+1}(\overline{\pi}^{k+1}(x)),\gamma^{k+1}(\overline{\pi}^{k+1}(y))) \\ &= b^{k+1}(\overline{\pi}^{k+1}(x),\overline{\pi}^{k+1}(y)) \quad \text{car } \gamma^{k+1} \in \Omega^{k+1} \subset \mathrm{Stab}(b^{k+1}). \end{aligned}$$

Donc : $b^k(\gamma^k x,T(\gamma^k y)) = b^k(x,T(y))$ et $\gamma^k \in \mathrm{Stab}(b^k(\cdot\,,T\,\cdot))$. □

II.2.4 Démonstration de la proposition 2

2 $\Rightarrow$ **1** est immédiat. Si $u \in \mathrm{End}(E)$ et si u commute avec T, u préserve les $\ker T^p$ et $\mathrm{Im}\, T^q$, donc tous les $E_{p,q}$ et toutes leurs sommes, d'où **3** $\Rightarrow$ **2**. Montrons **1** $\Rightarrow$ **3**. Soit un sous-espace F ne pouvant s'écrire sous la forme : $+_{p,q \in \mathcal{E}} E_{p,q}$. On trouve alors un couple (p,q) tel que :

- $E_{p,q} \not\subset F$,
- $F \not\subset (E_{p-1,q} + E_{p,q-1})$.

(S'il n'existe aucun tel couple (p,q), on s'aperçoit que $\mathrm{vect}(\{E_{p,q}/E_{p,q} \subset F\}) = F$ donc F est de la forme $+_{p,q \in \mathcal{E}} E_{p,q}$.) Notons alors π la projection :

$$\pi\ :\ E_{p,q} \to E_{p,q}/(E_{p-1,q} + E_{p,q-1}),$$

$$E'_{p,q} = E_{p,q}/(E_{p-1,q} + E_{p,q-1}) \text{ et } G = F \cap E_{p,q}.$$

Par le deuxième point, $F \cap [E_{p,q} \setminus (E_{p-1,q} + E_{p,q-1})] \neq \emptyset$ donc $\pi(G) \neq \{0\}$. D'autre part $\pi(G) \neq E'_{p,q}$; en effet, si $E_{p,q} \setminus (E_{p-1,q} + E_{p,q-1}) \subset F$, $E_{p,q} = \mathrm{vect}(E_{p,q} \setminus (E_{p-1,q} + E_{p,q-1})) \subset$

F ce qui contredit le premier point. Enfin, T^{n-p} établit une bijection de $\check{E}_{q+n-p-1} = E_{n,q+n-p}/(E_{n,q+n-p-1} + E_{n-1,q+n-p})$ sur $E'_{p,q}$. On notera H l'image reĉiproque de $\pi(G)$ dans $\check{E}_{q+n-p-1}$ par cette bijection.

Or, le théorème 1 page 56, dans le cas où T est $< \cdot , \cdot >$-autoadjoint, ou le théorème 5 page 80 dans le cas où T est $< \cdot , \cdot >$-antiautoadjoint, implique que $\Omega = \mathrm{Stab}(< \cdot , \cdot >) \cap \mathrm{Stab}(< \cdot , T \cdot >)$ agit transitivement sur chaque $\check{E}_k$, donc notamment sur $\check{E}_{q+n-p-1}$. On trouve donc un u dans Ω, *i.e.* stabilisant $< \cdot , \cdot >$ et commutant avec T, tel que $u(H) \neq H$, car $\{0\} \subsetneq H \subsetneq E_{q+n-p-1}$ (on note ici encore u l'action de $u \in \mathrm{End}(E)$ sur $\check{E}_{q+n-p-1}$). Alors $u(\pi(G)) = u(T^{n-p}H) = T^{n-p}(u(H)) \neq T^{n-p}(H) = \pi(G)$, donc nécessairement, $u(G) \neq G$ et donc : $u(F) \neq F$. F n'est pas intrinsèquemenet associé à $(< \cdot , \cdot >, T)$. $\square$

Note : On peut aussi montrer directement, sans utiliser les théorèmes 1 et 5, l'implication **2** $\Rightarrow$ **3**. On reprend la démonstration précédente jusqu'à la construction de $\pi(G)$. On choisit alors $x \in \pi(G)$ et $y \notin \pi(G)$. On choisit $x' \in T^{-(n-p)}(\pi^{-1}\{x\})$ et $y' \in T^{-(n-p)}(\pi^{-1}\{y\})$, l'espace $A = \mathrm{vect}((T^k x')_{k=0}^{q+n-p-1}, (T^k y')_{k=0}^{q+n-p-1})$ est alors stable par T, par construction. De plus, la famille $((T^k x')_{k=0}^{q+n-p-1}, (T^k y')_{k=0}^{q+n-p-1})$ peut être complétée en une base de Jordan ; on choisit une telle base et on notera B l'espace engendré par les vecteurs ainsi ajoutés. On définit alors $u \in \mathrm{End}(E)$ par :

- $u_{|B} = \mathrm{Id}_B$,
- $u_{|A}$ commute avec $T_{|A}$, $u(x') = y'$ et $u(y') = x'$.

Comme B est stable par T, u commute avec T. Mais par construction, $u(\pi(G)) \neq \pi(G)$ — on note encore u l'action quotient de u sur $E'_{p,q}$ —, donc $u(G) \neq G$ et enfin $u(F) \neq F$.

Une autre version de cette dernière note, pour un endomorphisme quelconque et sur un corps quelconque, non nécessairement parfait, peut être trouvée dans [Q94]. Nous remercions Pierre Marchand de nous l'avoir signalé, ainsi que pour une discussion fructueuse à ce sujet.

II.3 Cas a et b symétriques : l'action de Ω, les bonnes bases

Sur le $\mathbb{K}$-espace vctoriel E, a et b sont ici deux formes bilinéaires symétriques, a est non dégénérée. Toutes les notations sont identiques à celles de la section précédente. Ici, $\Omega = O(a) \cap O(b)$; les b_k, b^k et $\check{b}^k$ introduites dans la section I.2 sont symétriques. L'indice de nilpotence de T est toujours noté n.

Théorème 2 *Si* $\deg P = 1$, *alors* Ω *agit simplement transitivement sur* $\mathcal{D} \times \prod_{k=0}^{n-1} O(\check{E}_k, \check{b}_k)$, *où* $\mathcal{D}$ *est l'ensemble des décompositions de* E *adaptées à* (a,T). *Plus précisément,* Ω *est isomorphe à un produit semi-direct* $N \rtimes R$, *où :*

- $N = \{\gamma \in \Omega$ / l'action induite par γ sur chaque $\check{E}_k$ est triviale $\}$. *C'est un sous-groupe distingué de* Ω, *nilpotent d'indice* $\leq 2n-1$, *qui agit simplement transitivement sur* $\mathcal{D}$,
- $R = \Omega/N$ *agit simplement transitivement sur* $\prod_{k=0}^{n-1} O(\check{E}_k, \check{b}_k)$. *En particulier,* $R \simeq \prod_{k=0}^{n-1} O(\check{E}_k, \check{b}_k)$. *R est réductif. Si* $\mathbb{K}$ *est algébriquement clos et si on note* $d_k = \dim \check{E}_k$, $\prod_{k=0}^{n-1} O(\check{E}_k, \check{b}_k) \simeq \prod_{k=0}^{n-1} O_{d_k}(\mathbb{K})$.

Les invariants de la situation, c'est-à-dire du couple (a,b), *sont donc* n *l'indice de nilpotence de* T, *et les* $(d_k)_{k=0}^{n-1}$ *; ce sont les invariants de Jordan de* T.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, *deux cas sont possibles :*

• *Si* $\deg P = 1$*, comme dans l'énoncé général ci-dessus,* Ω *est isomorphe à un produit semi-direct* $N \rtimes R$ *où* N *agit simplement transitivement sur* $\mathcal{D}$ *et* R *sur* $\prod_{k=0}^{n-1} O(\check{E}_k,\check{b}^k)$*. Cette fois :* $O(\check{E}_k,\check{b}^k) \simeq O_{r_k,s_k}(\mathbb{R})$*, où* (r_k,s_k) *est la signature de* $\check{b}^k$ *définie sur* $\check{E}_k$*. Les invariants de la situations sont donc* n *l'indice de nilpotence de* T*, et les* $((r_k,s_k))_{k=0}^{n-1}$*, vérifiant* $r_k + s_k = d_k$ *(les* $\check{b}^k$ *sont non-dégénérées sur les* $\check{E}_k$*).*

• *Si* $\deg P = 2$*, i.e.* $P = (X - \lambda)(X - \overline{\lambda})$*,* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$*,* Ω *agit sur l'espace* T*-stable* $E' = \ker(S^{\mathbb{C}} - \lambda \operatorname{Id}_{E^{\mathbb{C}}}) \subset E^{\mathbb{C}}$*, où* $E^{\mathbb{C}}$ *est le complexifié de* E *et :* $\Omega \simeq N \rtimes R$*, où* N *agit simplement transitivement sur l'ensemble* $\mathcal{D}'$ *des décompositions de* E' *adaptées à* $(a,T^{\mathbb{C}})$ *et où* R *agit simplement transitivement sur* $\prod_{k=0}^{n-1} O(\check{E}'_k,\check{b}^k)$*. En particulier,* $R \simeq \prod_{k=0}^{n-1} O_{d_k}(\mathbb{C})$ *où* $d_k = \dim \check{E}'_k$*. Les invariants de la situation sont encore* n *et les* $(d_k)_{k=0}^{n-1}$*, invariants de Jordan de* T *sur* E'*.*

Remarque : Dans ce dernier cas mentionné, on peut aussi construire directement les espaces quotients réels $(\check{E}_k,\check{b}^k)$. En notant $E'' = \ker(S^{\mathbb{C}} - \overline{\lambda} \operatorname{Id}_{E^{\mathbb{C}}}) \subset E^{\mathbb{C}}$, on a : $(\check{E}_k,\check{b}^k) \simeq \Re((\check{E}'_k,\check{b}^k) \overset{\perp}{\oplus} (\check{E}''_k,\check{b}^k))$, et $\dim \check{E}_k = 2d_k$. La signature de $\check{b}^k$ est alors (d_k,d_k).

D'autre part on vérifie que, si $D' = (D'_{p,q})_{q \leq p \leq n}$ est une décomposition adaptée de $(E',a,T^{\mathbb{C}}_{|E'})$, alors $D = (D_{p,q})_{q \leq p \leq n}$ où $D_{p,q} = D'_{p,q} \oplus \overline{D'_{p,q}}$ est une décomposition de E, adaptée simultanément à (a,T) et à $(a(\,\cdot\,,S\,\cdot\,),T)$. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble, par conséquent non vide, de ces décompositions deux fois adaptées. Il permet une description de l'action de Ω sur l'espace réel E ; on vérifie en effet que :

• N agit simplement transitivement sur $\mathcal{D}$,

• R agit simplement transitivement sur $\prod_{k=0}^{n-1} O(\check{E}_k,\check{b}^k) \cap O(\check{E}_k,\check{b}^k(\,\cdot\,,S\,\cdot\,))$.

Démonstration. Quel que soit le corps de base, si $\deg P = 1$, on applique directement le théorème 1 page 56. Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, $\operatorname{Stab}(\check{E}_k,\check{b}^k) = O(\check{b}^k) \simeq O_{d_k}(\mathbb{K})$; si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\operatorname{Stab}(\check{E}_k,\check{b}^k) = O(\check{b}^k) \simeq O_{r_k,s_k}$ où (r_k,s_k) est la signature de $\check{b}^k$. Comme $\check{b}^k$ est non dégénérée, $r_k + s_k = d_k$. Ces signatures apparaissent donc comme des invariants supplémentaires. On vérifie bien qu'elles peuvent être quelconques : à partir du choix arbitraire des d_k, qui détermine le réseau de drapeaux $(E_{p,q})_{q \leq p \leq n}$ à isomorphisme près, et du choix arbitraire d'entiers (r_k,s_k) vérifiant $r_k + s_k = d_k$, on construit une forme $< \cdot,\cdot >$ et un endomorphisme nilpotent $< \cdot,\cdot >$-autoadjoint T, défini par la valeurs des formes $< \cdot, T^k \cdot >$ sur les quotients $\check{E}_k$.

Si $\deg P = 2$, *i.e.* $P = (X - \lambda)(X - \overline{\lambda})$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on considère Ω comme agissant sur $E^{\mathbb{C}}$ le complexifié de E. $E^{\mathbb{C}} = \ker(S^{\mathbb{C}} - \lambda \operatorname{Id}_{E^{\mathbb{C}}}) \overset{\perp}{\oplus} \ker(S^{\mathbb{C}} - \overline{\lambda} \operatorname{Id}_{E^{\mathbb{C}}}) = E' \overset{\perp}{\oplus} E''$, et Ω agit simultanément de la même façon sur chacun de ces sous-espaces : $z \in \ker(S^{\mathbb{C}} - \lambda \operatorname{Id}_{E^{\mathbb{C}}}) \Leftrightarrow \overline{z} \in \ker(S^{\mathbb{C}} - \overline{\lambda} \operatorname{Id}_{E^{\mathbb{C}}})$ et : $\forall \gamma \in \Omega, \gamma.\overline{z} = \overline{\gamma.z}$. Notamment, chaque facteur est stable par T. La structure et l'action de Ω sont donc entièrement données par son action sur l'un des facteurs, par exemple $\ker(S^{\mathbb{C}} - \lambda \operatorname{Id}_{E^{\mathbb{C}}}) = E'$. On applique alors le théorème 1 à cet espace ; Ω est donc isomorphe à un produit semi-direct $N \rtimes R$, N agit simplement transitivement sur $\mathcal{D}'$, l'ensemble des décompositions de E', adaptées à $(a,T^{\mathbb{C}}_{|E'})$ et R agit simplement transitivement sur $\prod_{k=0}^{n-1} O(\check{E}'_k,\check{b}^k)$, d'où le résultat. □

En formalisant une construction effectuée dans la démonstration du théorème 2, on définit des bases «adaptées» au couple de formes bilinéaires (a,b). Introduites autrement, ce sont les bases de Klingenberg.

Définition 3 *Soit E un espace vectoriel muni de deux formes bilinéaires symétriques a et b, telles que a est non dégénérée et que $b = a(\cdot,T\cdot)$ avec T nilpotent a-autoadjoint.*

A une décomposition $D = (D_{i,j})_{j \leq i \leq n}$ de E, adaptée à (a,T), et à un n-uplet $(\beta^k)_{k=0}^{n-1}$ de bases (pseudo-)orthonormées des $\check{E}_k$, on associe canoniquement une base β de E, obtenue en relevant les β^k en bases des $D_{n,k+1}$ et en les propageant par T en bases de tous les $D_{p,q}$. On note $\mathcal{B}$ l'ensemble de ces bases, dites adaptées au triplet (E,a,T) ou au triplet (E,a,b).

Remarque : Par construction, et si $l \geq k$, les bases adaptées de (E^k,b^k,T) se «projettent modulo $\ker E^l / \ker E^k = E^k_{n,l}$ sur des bases adaptées de (E^l,b^l,T)». Plus exactement, si β^k est adaptée à (E^k,b^k,T) alors $\overline{\pi}^{k+1}(\beta^k) = ((0,\ldots,0),\beta^{k+1})$, où β^{k+1} est adaptée à (E^{k+1},b^{k+1},T).

Remarque : Par construction encore, $\mathcal{B}$ est en bijection avec $\mathcal{D}' \times \prod_{k=0}^{n-1} \mathrm{Stab}(\check{E}_k,\check{b}^k)$ et Ω agit donc simplement transitivement sur les bases adaptées.

Lien avec la présentation de Klingenberg. Les bases de $\mathcal{B}$ ainsi construites sont donc formées de vecteurs e des $D_{n,q}$, $q \in \{1,..n\}$ et de toutes leurs images successives par les $q-1$ premières puissances de T. Il s'agit donc de **bases de Jordan**. D'autre part, l'examen des orthogonalités et isotropies dans la relation du troisième point de la définition 1 page 53 montre que :

- les «sous-espaces de Jordan», engendrés par les familles du type $(e,T.e,T^2.e,...,T^{q-1}.e)$, sont mutuellement orthogonaux,
- sur ces espaces, munis de ces matrices de Jordan, la matrice de a a la forme annoncée dans la section I.1.

Les bases adaptées sont donc les bases de Klingenberg, présentées dans la section I.1. □

On le vérifie également en exhibant les matrices de a et $B = T + \lambda\,\mathrm{Id}$ dans une base adaptée. On choisit ici un ordre sur les vecteurs de la base, un peu différent de l'ordre habituel d'une base de Jordan. Il est en un sens plus adapté aux espaces canoniques $E_{p,q}$ et les matrices y sont un peu plus simples.

Les matrices de a et B, cas réel et P de degré un. Si $P = X - \lambda$ est de degré un, on est dans la situation de la définition 3 page 63 avec $T = B - \lambda\,\mathrm{Id}$. Soit $D = (D_{p,q})_{q \leq p \leq n}$ une décomposition adaptée et β une des bases adaptées associées à cette décomposition, on pose $D_k = \overset{k-1}{\underset{i=0}{\oplus}} T^i(D_{n,k})$. On note $\beta_{n,k}$ la sous-famille de β qui est une base de $D_{n,k}$; les $T^i(\beta_{n,k})$ sont des bases des $T^i(D_{n,k})$. Alors :

- chaque $\beta_k = (T^{k-1}(\beta_{n,k}),\ldots,T(\beta_{n,k}),\beta_{n,k})$ est une base de D_k,
- $E = \overset{\perp}{\underset{1 \leq k \leq n}{\oplus}} D_k$ et les D_k sont stables par T.

Il suffit donc de donner les matrices de a et B dans les β_k. Rappelons que $d_k = \dim \check{E}_k = \dim D_{k+1}$ et que (r_k,s_k) est la signature de $\check{b}^k$ sur $\check{E}_k$; $r_k + s_k = d_k$. Dans β_{k+1} :

$$\mathrm{Mat}_{\beta_{k+1}}(a_{|D_{k+1}}) = \begin{pmatrix} & & & I_{r_k,s_k} \\ & & \cdot & \\ & \cdot & & \\ \cdot & & & \\ I_{r_k,s_k} & & & \end{pmatrix}, \ \mathrm{Mat}_{\beta_{k+1}}(B_{|D_{k+1}}) = \begin{pmatrix} \lambda I_{d_k} & I_{d_k} & & \\ & \lambda I_{d_k} & \ddots & \\ & & \ddots & I_{d_k} \\ & & & \lambda I_{d_k} \end{pmatrix}.$$

avec $k+1$ blocs I_{r_k,s_k} ou λI_{d_k}.

Les matrices de a et de B, cas réel et P de degré deux. Fournissons des bases adaptées à (a,b) dans le cas ou P est de degré deux.

Définition 4 *Soit E un espace vectoriel de dimension k sur $\mathbb{R}$, muni de deux formes bilinéaires symétriques non dégénérées a et b telles que $b = a(\cdot,S\cdot)$ où S est un automorphisme semi-simple de valeurs propres complexes non réelles λ et $\overline{\lambda}$, a-autoadjoint. E est alors nécessairement de dimension paire, on notera $k = 2d$. Une base β de E est dite adaptée à (a,S) si :*

$$\beta = ((x_j)_{j=1}^d,(y_j)_{j=1}^d)) \text{ avec } \forall j, x_j = \frac{1}{2}((1-i)z_j + \overline{(1-i)z_j}) \text{ et } y_j = \frac{1}{2}((1+i)z_j + \overline{(1+i)z_j})$$

où $(z_j)_{j=1}^d$ est une base a-orthonormée complexe de $E' = \ker(S^{\mathbb{C}} - \lambda\,\mathrm{Id}_{E^{\mathbb{C}}}) \subset E^{\mathbb{C}}$.

Dans une telle base : $\mathrm{Mat}(a) = J_{d,d}^+ = \begin{pmatrix} 0 & I_d \\ I_d & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}(B) = \Lambda_d = \begin{pmatrix} \mu I_d & -\nu I_d \\ \nu I_d & \mu I_d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2d}(\mathbb{R})$, où μ et ν sont les parties respectivement réelle et imaginaires de λ ; $\mu \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{R}^*$.

Définition 5 *Soit E un espace vectoriel de dimension k sur $\mathbb{R}$ muni de deux formes bilinéaires symétriques non dégénérées a et b telles que $b = a(\cdot,B\cdot)$ où B est un automorphisme a-autoadjoint de polynôme minimal $P = (X-\lambda)(X-\overline{\lambda})$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, de partie nilpotente T d'indice n. Soit $D = (D_{p,q})_{q \leq p \leq n}$ une décomposition de E adaptée à (a,T) et à $(a(\,\cdot\,,S\,\cdot\,),T)$ et $(\beta^k)_{k=0}^{n-1}$ un n-uplet de bases des $\check{E}_k$, adaptées à $(\check{b}^k,S)$ au sens de la définition 4 page 65.*

On leur associe canoniquement une base β de E, obtenue en relevant les β^k en bases des $D_{n,k+1}$ et en les propageant par T en bases de tous les $D_{p,q}$. On note $\mathcal{B}$ l'ensemble de ces bases, dites adaptées au triplet (E,a,B) ou au triplet (E,a,b).

Remarque : une telle base est aussi une base β telle que :

$$\beta = ((x_j)_{j=1}^d,(y_j)_{j=1}^d)) \text{ avec } \forall j, x_j = \frac{1}{2}((1-i)z_j + \overline{(1-i)z_j}) \text{ et } y_j = \frac{1}{2}((1+i)z_j + \overline{(1+i)z_j})$$

où $(z_j)_{j=1}^d$ est une base de $E' = \ker(S^{\mathbb{C}} - \lambda\,\mathrm{Id}_{E^{\mathbb{C}}}) \subset E^{\mathbb{C}}$, adaptée à $(a,T^{\mathbb{C}}_{|E'})$.

Soit β une base adaptée à (a,B) ; on reprend les notations D_k et β_k introduites dans le cas $\deg P = 1$: $E = \overset{\perp}{\oplus}_k D_k$, $B(D_k) \subset D_k$ et β_k est une base de D_k. On note cette fois $d_k = \dim \check{E}'_k = \frac{1}{2}\dim \check{E}_k = \frac{1}{2}\dim D_{n,k+1}$. Dans β^{k+1} :

$$\mathrm{Mat}_{\beta_{k+1}}(a_{|D_{k+1}}) = \begin{pmatrix} & & & J_{d_k}^+ \\ & & \cdot & \\ & \cdot & & \\ J_{d_k}^+ & & & \end{pmatrix} \text{ et :}\mathrm{Mat}_{\beta_{k+1}}(B_{|D_{k+1}}) = \begin{pmatrix} \Lambda_{d_k} & I_{2d_k} & & \\ & \Lambda_{d_k} & \ddots & \\ & & \ddots & I_{2d_k} \\ & & & \Lambda_{d_k} \end{pmatrix},$$

$$\text{où : } \Lambda_{d_k} = \begin{pmatrix} \mu I_{d_k} & -\nu I_{d_k} \\ \nu I_{d_k} & \mu I_{d_k} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2d_k}(\mathbb{R}).$$

On vérifie au passage que $\mathrm{sign}(\check{b}^k) = (d_k,d_k)$.

II.4 Cas a et b antisymétriques : l'action de Ω, les bonnes bases

a et b sont deux formes bilinéaires antisymétriques, avec a non dégénérée ; on reprend les mêmes notations que dans la section II.1. Ici, $\Omega = Sp(a) \cap Sp(b)$; les b_k, b^k et $\check{b}^k$ introduites dans la section I.2 sont antisymétriques. On note toujours n l'indice de nilpotence de T.

Théorème 3 *Si $\deg P = 1$, Ω agit simplement transitivement sur $\mathcal{D} \times \prod_{k=0}^{n-1} Sp(\check{E}_k,\check{b}_k)$, où $\mathcal{D}$ est l'ensemble des décompositions de E adaptées à (a,T). Plus précisément, Ω est isomorphe à un produit semi-direct $N \rtimes R$, où :*

- *$N = \{\gamma \in \Omega$ / l'action induite par γ sur chaque $\check{E}_k$ est triviale $\}$. C'est un sous-groupe distingué de Ω, nilpotent d'indice $\leq 2n-1$, qui agit simplement transitivement sur $\mathcal{D}$,*
- *$R = \Omega/N$ agit simplement transitivement sur $\prod_{k=0}^{n-1} Sp(\check{E}_k,\check{b}_k) \simeq \prod_{k=0}^{n-1} Sp_{d_k}(\mathbb{K})$ où les $d_k = \dim \check{E}_k$ sont des entiers pairs ; en effet les $\check{b}^k$ sont antisymétriques, non dégénérées sur les $\check{E}_k$. En particulier $R \simeq \prod_{k=0}^{n-1} Sp_{d_k}(\mathbb{K})$. R est semi-simple.*

Les invariants de la situation, c'est-à-dire du couple (a,b), sont donc n l'indice de nilpotence de T, et les $(d_k)_{k=0}^{n-1}$; ce sont en fait les invariants de Jordan de T.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, deux cas sont possibles :

- *Si $\deg P = 1$, comme dans le cas général ci-dessus, Ω est isomorphe à un produit semi-direct $N \rtimes R$ où N agit simplement transitivement sur $\mathcal{D}$ et R sur $\prod_{k=0}^{n-1} Sp(\check{E}_k,\check{b}^k) \simeq \prod_{k=0}^{n-1} Sp_{d_k}(\mathbb{K})$, les $d_k = \dim(\check{E}_k)$ étant encore pairs. Les invariants de la situation sont encore n l'indice de nilpotence de T, et les $(d_k)_{k=0}^{n-1}$, invariants de Jordan de T.*
- *Si $\deg P = 2$,* i.e. *$P = (X-\lambda)(X-\overline{\lambda})$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, Ω agit sur l'espace T-stable $E' = \ker(S^{\mathbb{C}} - \lambda \mathrm{Id}_{E^{\mathbb{C}}}) \subset E^{\mathbb{C}}$, où $E^{\mathbb{C}}$ est le complexifié de E et : $\Omega \simeq N \rtimes R$, où N agit simplement transitivement sur l'ensemble $\mathcal{D}'$ des décompositions de E' adaptées à (a,T) et où R agit simplement transitivement sur $\prod_{k=0}^{n-1} Sp(\check{E}'_k,\check{b}^k)$. En particulier, $R \simeq \prod_{k=0}^{n-1} Sp_{d_k}(\mathbb{C})$ où $d_k = \dim \check{E}'_k$. Les invariants de la situation sont encore n et les $(d_k)_{k=0}^{n-1}$, invariants de Jordan de T sur E'.*

Démonstration : on applique le théorème 1 page 56 de la même façon que pour la démonstration du théorème 2 page 62.

Remarque : Dans le dernier cas du théorème, et comme dans le cas symétrique, on vérifie que l'action de Ω sur l'espace réel E est la suivante :

- N agit simplement transitivement sur $\mathcal{D}$, l'ensemble non vide des décompositions simultanément adaptées à (a,T) et à $(a(\cdot,S\cdot),T)$,
- R agit simplement transitivement sur $\prod_{k=0}^{n-1} Sp(\check{E}_k,\check{b}^k) \cap Sp(\check{E}_k,\check{b}^k(\cdot,S\cdot))$.

Les matrices de a et de B, cas où $P = X - \lambda$ est de degré un.
C'est notamment toujours le cas si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos.

Définition 6 *Soit E un espace vectoriel muni de deux formes bilinéaires antisymétriques a et b, telles que a est non dégénérée et que $b = a(\cdot,T\cdot)$ avec T nilpotent a-autoadjoint.*

*A une décomposition $D = (D_{i,j})_{j \leq i \leq n}$ de E, adaptée à (a,T), et à un n-uplet $(\beta^k)_{k=0}^{n-1}$ de bases symplectiques des $\check{E}_k$, on associe canoniquement une base β de E, de la même manière que dans le cas symétrique (*cf. *def.3 page 63). On note encore $\mathcal{B}$ l'ensemble de ces bases, dites adaptées au triplet (E,a,T) ou au triplet (E,a,b).*

Les mêmes remarques peuvent être faites que dans le cas symétrique. $\mathcal{B}$ est l'ensemble des bases de Klingenberg associées à (a,b), Ω agit simplement transitivement sur lui.

En reprenant les mêmes objets D_k et β_k et en notant que $d_k = \dim \check{E}_k = \dim D_{k+1}$ est pair :

$$\mathrm{Mat}_{\beta_{k+1}}(a_{|D_{k+1}}) = \begin{pmatrix} & & & J^-_{d_k/2} \\ & & \cdot & \\ & \cdot & & \\ \cdot & & & \\ J^-_{d_k/2} & & & \end{pmatrix}, \text{ où } J^-_d = \begin{pmatrix} 0 & I_d \\ -I_d & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2d}(\mathbb{K}) \quad \text{et}$$

$$\mathrm{Mat}_{\beta_{k+1}}(B_{|D_{k+1}}) = \begin{pmatrix} \lambda I_{d_k} & I_{d_k} & & \\ & \lambda I_{d_k} & \ddots & \\ & & \ddots & I_{d_k} \\ & & & \lambda I_{d_k} \end{pmatrix}.$$

Les matrices de a et de B, cas réel et $P = (X-\lambda)(X-\overline{\lambda})$ de degré deux. On introduit les mêmes notions de bases adaptées qu'en fin de section II.3 page 62.

Définition 7 *Soit E un espace vectoriel de dimension k sur $\mathbb{R}$ muni de deux formes bilinéaires antisymétriques non dégénérées a et b telles que $b = a(\cdot,S\cdot)$ où S est un automorphisme semi-simple de valeurs propres imaginaires pures non nulles λ et $\overline{\lambda}$, a-autoadjoint. E est alors nécessairement de dimension multiple de quatre, on notera $k = 2d$, d pair. Une base β de E est dite adaptée à (a,S) si :*

$$\beta = ((x_j)_{j=1}^{d/2},(y_j)_{j=1}^{d/2},(x'_j)_{j=1}^{d/2},(y'_j)_{j=1}^{d/2}) \text{ avec}$$

$$\forall j, x_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_j + \overline{z_j}),\ y_j = \frac{1}{i\sqrt{2}}(-z_j + \overline{z_j}),\ x'_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(z'_j + \overline{z'_j}) \text{ et } y'_j = \frac{1}{i\sqrt{2}}(z'_j - \overline{z'_j}).$$

où $((z_j)_{j=1}^{d/2},(z'_j)_{j=1}^{d/2})$ est une base a-symplectique complexe de $E' = \ker(S^{\mathbb{C}} - \lambda\,\mathrm{Id}_{E^{\mathbb{C}}}) \subset E^{\mathbb{C}}$.

Dans une telle base : $\mathrm{Mat}(a) = J^-_{d,d} = \begin{pmatrix} 0 & I_d \\ -I_d & 0 \end{pmatrix}$ et : $\mathrm{Mat}(B) = \begin{pmatrix} \Lambda_{d/2} & 0 \\ 0 & \overline{\Lambda}_{d/2} \end{pmatrix}$ où, si on note $\lambda = \mu + i\nu$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{R}^*$: $\Lambda_p = \begin{pmatrix} \mu I_p & -\nu I_p \\ \nu I_p & \mu I_p \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2p}(\mathbb{R})$ et $\overline{\Lambda}_p = \begin{pmatrix} \mu I_p & \nu I_p \\ -\nu I_p & \mu I_p \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2p}(\mathbb{R})$.

Définition 8 *Soit E un espace vectoriel de dimension k sur $\mathbb{R}$ muni de deux formes bilinéaires symétriques non dégénérées a et b telles que $b = a(\cdot,B\cdot)$ où B est un automorphisme a-autoadjoint de polynôme minimal $P = (X-\lambda)(X-\overline{\lambda})$, $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, de partie nilpotente T d'indice n. Soit $D = (D_{p,q})_{q\leq p\leq n}$ une décomposition de E adaptée à (a,T) et à $(a(\,\cdot\,,S\,\cdot\,),T)$ et $(\beta^k)_{k=0}^{n-1}$ un n-uplet de bases des $\check{E}_k$, adaptées à $(\check{b}^k,S)$ au sens de la définition 4 page 65.*

On leur associe canoniquement une base β de E, obtenue en relevant les β^k en bases des $D_{n,k+1}$ et en les propageant par T en bases de tous les $D_{p,q}$. On note $\mathcal{B}$ l'ensemble de ces bases, dites adaptées au triplet (E,a,B) ou au triplet (E,a,b).

Remarque : Une telle base est aussi une base

$$\beta = ((x_j)_{j=1}^{N},(y_j)_{j=1}^{N},(x'_j)_{j=1}^{N},(y'_j)_{j=1}^{N}) \text{ avec}$$

$$\forall j, x_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_j + \overline{z_j}),\ y_j = \frac{1}{i\sqrt{2}}(-z_j + \overline{z_j}),\ x'_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(z'_j + \overline{z'_j}) \text{ et } y'_j = \frac{1}{i\sqrt{2}}(z'_j - \overline{z'_j}).$$

où $((z_j)_{j=1}^N,(z'_j)_{j=1}^N)$ est une base complexe de E', adaptée à $(a,T^{\mathbb{C}}_{|E'})$ au sens de la définition 6 page 66.

On considère $D' = (D'_{p,q})_{q\leq p\leq n}$ une décomposition adaptée de $(E',a,T^{\mathbb{C}}_{|E'})$, D la décomposition $(\Re(D'_{p,q} \oplus \overline{D'_{p,q}}))_{q\leq p\leq n}$ de E et β une base adaptée à (E,a,B) construite à partir de D. On reprend alors les objets D_k et β_k introduits en fin de section II.3 ; $d_k = \dim \breve{E}'_k = \dim D'_{n,k+1}$ est pair. $E = \overset{\perp}{\oplus} D_k$; $\forall k, B(D_k) = D_k$. Alors, dans β_{k+1} :

$$\mathrm{Mat}_{\beta_{k+1}}(a_{|D_{k+1}}) = \begin{pmatrix} & & & J^-_{d_k} \\ & & \cdot & \\ & \cdot & & \\ J^-_{d_k} & & & \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{Mat}_{\beta_{k+1}}(B_{|D_{k+1}}) = \begin{pmatrix} L_{d_k/2} & I_{2d_k} & & \\ & L_{d_k/2} & \ddots & \\ & & \ddots & I_{2d_k} \\ & & & L_{d_k/2} \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } L_d = \begin{pmatrix} \Lambda_d & 0 \\ 0 & \Lambda_d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4d}(\mathbb{R}).$$

La dimension de E est dans ce cas multiple de quatre.

II.5 Cas a et b sesquilinéaires : l'action de Ω, les bonnes bases

a et b sont deux formes sesquilinéaires, avec a non dégénérée ; on reprend les mêmes notations que dans la section II.1. Ici, $\Omega = U(a) \cap U(b)$; les b_k, b^k et $\breve{b}^k$ introduites dans la section I.2 sont sesquilinéaires. On suppose de plus $\mathbb{K}$ algébriquement clos. On note toujours n l'indice de nilpotence de T.

Théorème 4 *Si* $\deg P = 1$, *alors* Ω *agit simplement transitivement sur* $\mathcal{D}\times\prod_{k=0}^{n-1} U(\breve{E}_k,\breve{b}_k)$, *où* $\mathcal{D}$ *est l'ensemble des décompositions de* E *adaptées à* (a,T). *Plus précisément,* Ω *est isomorphe à un produit semi-direct* $N \rtimes R$, *où :*

- $N = \{\gamma \in \Omega$ / *l'action induite par* γ *sur chaque* $\breve{E}_k$ *est triviale* $\}$. *C'est un sous-groupe distingué de* Ω, *nilpotent d'indice* $\leq 2n-1$, *qui agit simplement transitivement sur* $\mathcal{D}$,
- $R = \Omega/N$ *agit simplement transitivement sur* $\prod_{k=0}^{n-1} U(\breve{E}_k,\breve{b}_k)$. *En particulier* $R \simeq \prod_{k=0}^{n-1} U(\breve{E}_k,\breve{b}_k)$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, *alors :* $\forall k < n, U(\breve{E}_k,\breve{b}_k) \simeq U_{r_k,s_k}(\mathbb{K})$, *où* (r_k,s_k) *est la signature de* $\breve{b}^k$ *définie sur* $\breve{E}_k$. $R \simeq \prod_{k=0}^{n-1} U_{r_k,s_k}(\mathbb{K})$ *est réductif. Les invariants de la situations sont donc* n *l'indice de nilpotence de* T *et les* $((r_k,s_k))_{k=0}^{n-1}$, *vérifiant* $r_k + s_k = d_k$ *(les* $\breve{b}^k$ *sont non-dégénérées sur les* $\breve{E}_k$*).*

Démonstration : encore par application immédiate du théorème 1 page 56.

Les matrices de a et B quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Les bases adaptées se construisent de la même façon que dans le cas réel symétrique ; les matrices obtenues ont alors la même forme.

II.6 Une situation plus simple : les isomorphismes préservant une forme réflexive et un sous-espace

La lecture de cette partie n'est pas nécessaire à la compréhension du chapitre et ne traite pas directement de son sujet, *i.e.* de la situation créée, sur un espace vectoriel, par une paire de formes réflexives. Cependant celle-ci repose, par récurrence, sur un «empilement» de situations plus simples : des espaces V munis d'un sous-groupe de $GL(V)$ préservant une forme réflexive et un certain sous-espace. Cette partie est consacrée à ce type de groupes. Ceux-ci mettent en jeu, dans un cas plus simple, les mêmes raisonnements.

Seule toutefois la section II.7, constituant une sorte d'annexe de la partie II, utilisera effectivement le résultat des présentes sections II.6.2 et II.6.3.

II.6.1 La décomposition

Soit V un espace vectoriel muni de $< .,. >$ forme réflexive, non dégénérée, F un sous-espace vectoriel de V et Γ le sous-groupe de $\mathrm{Stab}(< .,. >)$ laissant F stable. On a alors la situation suivante :

$$\{0\} \hookrightarrow F \cap F^{\perp} \left\{ \begin{array}{cc} \hookrightarrow & F \\ \hookrightarrow & F^{\perp} \end{array} \right\} \hookrightarrow F + F^{\perp} \hookrightarrow V,$$

qu'on peut aussi écrire :

$$\begin{array}{ccc} (F \cap F^{\perp}) & \subset & F^{\perp} \\ \cap & & \cap \\ F & \subset & V. \end{array}$$

Définition 9 *On appelle décomposition de V adaptée à $(< \cdot, \cdot >, F)$ une décomposition de V en somme directe de la forme :*

$$V = \Big((\underbrace{F \cap F^{\perp}}_{\substack{\text{totalement} \\ \text{isotrope}}}) \oplus \underbrace{H}_{\substack{\text{totalement} \\ \text{isotrope}}} \Big) \overset{\perp}{\oplus} G \overset{\perp}{\oplus} G',$$

telle que : $\left\{ \begin{array}{l} G \textit{ est un relevé de } F/(F \cap F^{\perp}) \textit{ dans } F, \text{ i.e. : } (F \cap F^{\perp}) \oplus G = F, \\ G' \textit{ est un relevé de } F^{\perp}/(F \cap F^{\perp}) \textit{ dans } F^{\perp}, \text{ i.e. : } (F \cap F^{\perp}) \oplus G' = F^{\perp}. \end{array} \right.$

Ainsi, sur un diagramme calqué sur celui des inclusions, au-dessus de la définition :

$$\left. \begin{array}{ccc} F \cap F^{\perp} & \oplus & G' \\ \oplus & & \oplus \\ G & \oplus & H \end{array} \right\} = V.$$

Remarque : Choisir une telle décomposition revient en fait à choisir H : les décompositions adaptées à $(< \cdot, \cdot >, F)$ sont en bijection naturelle avec les supplémentaires H totalement isotropes de $F + F^{\perp}$ dans V. En effet :

- Si $((F \cap F^{\perp}), H, G, G')$ est $(< \cdot, \cdot >, F)$-adaptée alors nécessairement : $G = H^{\perp} \cap F$ et $G' = H^{\perp} \cap F^{\perp}$,
- Si H est un supplémentaire totalement isotrope de $F + F^{\perp}$ dans V, on pose $G = H^{\perp} \cap F$ et $G' = H^{\perp} \cap F^{\perp}$; $((F \cap F^{\perp}), H, G, G')$ est alors une décomposition $(< \cdot, \cdot >, F)$-adaptée.

II.6.2 L'action de Γ

On notera ici $F_1 = F/(F \cap F^\perp)$. Le noyau de $< \cdot,\cdot >_{|F}$ est $F \cap F^\perp$, donc cette forme passe au quotient sur F_1 en une forme non dégénérée, notée $< \cdot,\cdot >_1$. De la même façon on note $F_2 = F^\perp/(F^\perp \cap F^\perp)$; $< \cdot,\cdot >$ passe au quotient sur F_2 en $< \cdot,\cdot >_2$, non dégénérée. On note enfin $F_0 = F \cap F^\perp$.

Remarque : A la donnée :

– d'une base quelconque β_0 de F_0,

– d'une base β_1 de F_1 adaptée à $< \cdot,\cdot >_1$, *i.e.* pseudo-orthonormée, symplectique ou unitaire, selon la nature de $< \cdot,\cdot >$,

– d'une base β_2 de F_2 adaptée à $< \cdot,\cdot >_2$,

– d'une décomposition adaptée (F_0,H,G,G') de V,

on associe naturellement une base β de V : $(G,< \cdot,\cdot >_{|G})$ est canoniquement isomorphe à $(F_1,< \cdot,\cdot >_1)$, on y transporte β_1 ; de même avec β_2 sur G'. Par $< \cdot,\cdot >$, H s'identifie au dual de F_0, on le munit de β_0^*. la famille $\beta = (\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_0^*)$ est alors une base de V.

Si par exemple $< \cdot,\cdot >$ est symétrique, sa matrice dans une base de ce type est :

$$\mathrm{Mat}_\beta(< \cdot,\cdot >) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \overbrace{\quad}^{F_0} & \overbrace{\qquad}^{G} & \overbrace{\qquad}^{G'} & \overbrace{\quad}^{H} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & I_d \\ 0 & I_{r_1,s_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{r_2,s_2} & 0 \\ I_d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

où $I_{r,s} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_s \end{pmatrix}$, où (r_i,s_i) est la signature de $< \cdot,\cdot >_i$ pour $i \in \{1,2\}$ et où $d = \dim F_0 = \dim H$.

Si $< \cdot,\cdot >$ est antisymétrique, sa matrice est alors :

$$\mathrm{Mat}_\beta(< \cdot,\cdot >) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \overbrace{\quad}^{F_0} & \overbrace{\qquad}^{G} & \overbrace{\qquad}^{G'} & \overbrace{\quad}^{H} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & I_d \\ 0 & J_{d_1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{d_2/2} & 0 \\ -I_d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

où $J_k = \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ -I_k & 0 \end{pmatrix}$, où d_i est la dimension, nécessairement paire, de F_i pour $i \in \{1,2\}$ et où $d = \dim F_0 = \dim H$.

Proposition 4 *Si $\Gamma = \mathrm{Stab}(F) \cap \mathrm{Stab}(V,< \cdot,\cdot >)$, alors $\Gamma \simeq N \rtimes R$ où :*

- *N est le sous groupe de Γ qui agit trivialement sur $F_0 = F \cap F^\perp$, $F_1 = F/(F \cap F^\perp)$ et $F_2 = F^\perp/(F \cap F^\perp)$. N agit simplement transitivement sur les supplémentaires H totalement isotropes de $F \cap F^\perp$, donc sur les décompositions adaptées à $(F,< \cdot,\cdot >)$; N est nilpotent et distingué dans Γ,*
- *$R = \Gamma/N$, R agit simplement transitivement sur $GL(F_0) \times \mathrm{Stab}(F_1, < .,. >_1) \times \mathrm{Stab}(F_2, < .,. >_2)$ — donc $R \simeq GL(F_0) \times \mathrm{Stab}(F_1, < .,. >_1) \times \mathrm{Stab}(F_2, < .,. >_2)$. R est réductif.*

Démonstration : Par définition de Γ, tout élément de Γ envoie une décomposition adaptée sur une décomposition adaptée, agit sur F_0 et sur les quotients F_1 et F_2, en préservant $< \cdot,\cdot >_1$ et $< \cdot,\cdot >_1$ sur ces deux derniers. Si on note $\mathcal{D}$ l'ensemble des décompositions adaptées de V, Γ agit donc sur $\mathcal{D} \times GL(F_0) \times \mathrm{Stab}(F_1,< \cdot,\cdot >_1) \times \mathrm{Stab}(F_2,< \cdot,\cdot >_2)$.

Soient D et D' deux décompositions adaptées de V. On choisit β_0 une base de F_0, et β_i une base de F_i adaptée à $< \cdot,\cdot >_i$ pour $i \in \{1,2\}$; on note β la base de V associée à $(\beta_i)_{i=1}^3$ et à D et β' la base associée à $(\beta_i)_{i=1}^3$ et à D', au sens de la remarque de la page 70. Si $\gamma \in GL(V)$ est défini par $\gamma(\beta) = \beta'$, γ préserve $< \cdot,\cdot >$ et F donc est dans Γ. De plus, γ agit trivialement sur les F_i, $i \in [\![1,3]\!]$, donc : $\gamma \in N$. Si d'autre part un élément γ de N fixe une décomposition adaptée quelconque D'', il fixe la base β'' associée à $(\beta_i)_{i=1}^3$ et à D'' donc est trivial. N agit donc simplement transitivement sur $\mathcal{D}$. Il découle de la définition de N que celui-ci est distingué.

Examinons l'action de R. On reprend les mêmes bases β_i. Soient $h_0 \in GL(F_0)$ et $h_i \in \mathrm{Stab}(F_i,< \cdot,\cdot >_i)$ pour $i \in \{1,2\}$; on note $\beta'_i = h_i(\beta_i)$ pour $i \in [\![1,3]\!]$. On choisit D une décomposition adaptée de V, on note β et β' les bases de V associées à D et aux β_i ou β'_i respectivement. Si $\gamma \in GL(V)$ est défini par $\gamma(\beta) = \beta'$, il agit sur chaque F_i comme h_i. Soit $\tilde{\gamma} \in \Gamma$: si $\tilde{\gamma}$ agit sur les F_i comme γ, $\tilde{\gamma}.\gamma^{-1}$ agit trivialement sur eux et donc est dans N. Ainsi, Γ/N agit simplement transitivement (par translation à gauche) sur $GL(F_0) \times \mathrm{Stab}(F_1,< \cdot,\cdot >_1) \times \mathrm{Stab}(F_2,< \cdot,\cdot >_2)$.

N est nilpotent : si $\nu \in \mathfrak{n}$ l'algèbre de Lie de N, on constate que ses itérés vérifient : $V \xrightarrow{\nu} (F + F^\perp) \xrightarrow{\nu} (F \cap F^\perp) \xrightarrow{\nu} \{0\}$.

Enfin, Γ est produit est semi-direct : si D est une décomposition adaptée de V, on constate que $R_D = \{\gamma \in \Gamma \ / \ \gamma(D) = D\}$ est un *sous-groupe* de Γ, isomorphe à R. Alors, comme N est distingué : $\Gamma = N \rtimes R_D \simeq N \rtimes R$. $\square$

II.6.3 L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de Γ — cas où $< \cdot,\cdot >$ est symétrique

On retrouve les résultats qui précèdent en calculant l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de Γ. A titre d'exemple, on traite ici le cas symétrique. Dans une base β comme construite dans la remarque de la page 70 :

$$\gamma \in \mathfrak{g} \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_\beta(\gamma) = \begin{pmatrix} {}^tY & \widetilde{X}_1 & \widetilde{X}_2 & H \\ 0 & H_1 & 0 & X_1 \\ 0 & 0 & H_2 & X_2 \\ 0 & 0 & 0 & Y \end{pmatrix}$$

où : – Y, X_1 et X_2 sont des matrices quelconques,
– $\widetilde{X}_1 = {}^tX_1 I_{r_1,s_1}$ et $\widetilde{X}_2 = {}^tX_2 I_{r_2,s_2}$,
– $H \in \mathfrak{so}(d)$, $H_1 \in \mathfrak{so}(r_1,s_1)$ et $H_2 \in \mathfrak{so}(r_2,s_2)$.

[**Note annexe :** On aura besoin en partie II.7 de la matrice d'un tel élément de $\mathfrak{g}$, exprimée dans une base β' légèrement différente, telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\beta'}(<\cdot,\cdot>) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & I_{r,s} \\ 0 & I_{r_1,s_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{r_2,s_2} & 0 \\ I_{r,s} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } r \text{ et } s \text{ des entiers t.q. : } r+s=d.$$

Dans ce cas, la matrice de γ a la même forme, mais avec :
- $H \in \mathfrak{so}(r,s)$,
- ${}^tY$ remplacé par $\widetilde{Y} = I_{r,s}{}^tYI_{r,s}$,
- $\widetilde{X}_1 = I_{r,s}{}^tX_1I_{r_1,s_1}$ et $\widetilde{X}_2 = I_{r,s}{}^tX_2I_{r_2,s_2}$.]

Reprenons avec la base β : $\gamma \in N \Leftrightarrow Y=0$, $H_1=0$, $H_2=0$, d'où, si $\mathfrak{n}$ est l'algèbre de Lie de N :

$$\gamma \in \mathfrak{n} \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_\beta(\gamma) = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{X}_1 & \widetilde{X}_2 & H \\ 0 & 0 & 0 & X_1 \\ 0 & 0 & 0 & X_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où X_1, X_2, $\widetilde{X}_1$, $\widetilde{X}_2$ et H sont comme plus haut. N est donc un groupe de Lie nilpotent d'indice 2, plus précisément : N est extension centrale de B par A où :
- $A = \{\gamma \in \Gamma \ / \ \gamma_{|F+F^\perp} = \mathrm{Id}_{F+F^\perp}\}$, groupe abélien central dans N,
- $B = N/A$, groupe également abélien.

$$\{0\} \to A \to N \to B \to \{0\}.$$

On vérifie également que N est distingué dans Γ.

II.7 Annexe : structure de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(a) \cap \mathfrak{so}(b)$

A titre d'annexe, cette section utilise le corollaire 1 page 57 pour dégager, par récurrence, des éléments de la structure de l'agèbre de Lie ω de Ω. Elle ne traite, à titre d'exemple, que le cas a et b symétriques, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $\deg P = 1$: dans ce cas donc, ω s'écrit $\mathfrak{so}(a)\cap\mathfrak{so}(b)$. Les autres cas se traitent sur le même modèle et sont peu différents dans le principe. L'exemple choisi ici comporte en fait une complication supplémentaire, provenant des groupes orthogonaux secondaires $O(r_k,s_k)$, de signature quelconque : ces signatures compliquent l'algèbre de Lie ω. On reprend la définition et les notations de la section II.1 pages 56 et suivante.

II.7.1 Quelques cas particuliers

Pour comprendre la suite récurrente des Ω^k, arrêtons-nous déjà sur les trois rangs les plus simples : $k=n-1$, $k=n-2$ et $k=n-3$ (si $k=n$, $\Omega^n = GL(\{0\} = \{\mathrm{Id}\})$. Cette section n'a qu'un but illustratif. Le résultat général est énoncé dans la section suivante.

Notation : On rappelle que pour tout k de $[\![0,n-1]\!]$: $d_k = \dim \breve{E}_k$ et (r_k,s_k) est la signature de $\breve{b}^k$ sur $\breve{E}_k$; $r_k+s_k=d_k$.

- $\boxed{\Omega^{n-1}.}$ Soit β une base adaptée de $E^{n-1} = E/\ker T^{n-1}$. β est simplement une base $\breve{b}^{n-1}$-pseudo-orthonormée de $\breve{E}_{n-1} = E^{n-1}$. Dans β :

$$\mathrm{Mat}_\beta(b^{n-1}) = I_{r_{n-1},s_{n-1}}$$

et d'autre part :

$$\omega^{n-1} = \mathfrak{so}(b^{n-1}) \simeq \mathfrak{so}(r_{n-1},s_{n-1}).$$

• $\boxed{\Omega^{n-2}.}$ Soit β une base adaptée de $E^{n-2} = E/\ker T^{n-2}$. On note $D = (D_{n-1,n-1},D_{n,n-1},D_{n,n})$ la décomposition adaptée associée à β. Le calcul montre que :

$$\mathrm{Mat}_\beta(b^{n-2}) = \left(\begin{array}{ccc} \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\hspace{4cm}}^{E^{n-2}_{n,n-1}}} & \\ 0 & 0 & I_{n-1,n-1} \\ 0 & I_{n-2,n-2} & 0 \\ I_{n-1,n-1} & 0 & 0 \\ \underbrace{\hspace{2cm}}_{D_{n-1,n-1}} & \underbrace{\hspace{2cm}}_{D_{n,n-1}} & \underbrace{\hspace{2cm}}_{D_{n,n}} \end{array} \right),$$

et que :

$$h \in \omega^{n-2} \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_\beta(h) = \begin{pmatrix} H_{n-1} & \widetilde{X} & H' \\ 0 & H_{n-2} & X \\ 0 & 0 & H_{n-1} \end{pmatrix},$$

avec : • H_{n-1} et H' dans $\mathfrak{so}(r_{n-1},s_{n-1}) \simeq \mathfrak{so}(\check{E}_{n-1},\check{b}^{n-1})$,
• H_{n-2} dans $\mathfrak{so}(r_{n-2},s_{n-2}) \simeq \mathfrak{so}(\check{E}_{n-2},\check{b}^{n-2})$,
• X une matrice quelconque de $\mathrm{M}_{d_{n-2},d_{n-1}}(\mathbb{R})$ et $\widetilde{X} = I_{r_{n-1},s_{n-1}}{}^t X I_{r_{n-2},s_{n-2}}$.

On vérifie alors la deuxième égalité du corollaire 1 page 57 au rang $k = n-2$. En effet, d'après elle :

$$h \in \omega^{n-2} \ ssi : \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet\ h \in \mathfrak{so}(E^{n-2},b^{n-2}) \text{ et } h(E^{n-2}_{n,n-1}) \subset E^{n-2}_{n,n-1} \\ \bullet\ \text{l'action de } h \text{ sur } E^{n-1} \simeq E^{n-2}/E^{n-2}_{n,n-1} \text{ est dans } \omega^{n-1}. \end{array} \right.$$

$$i.e.\ ssi : \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet\ \mathrm{Mat}_\beta(h) = \begin{pmatrix} \widetilde{Y} & \widetilde{X} & H' \\ 0 & H_{n-2} & X \\ 0 & 0 & Y \end{pmatrix} \text{ avec } H' \in \mathfrak{so}(r_{n-1},s_{n-1}), \\ \quad H_{n-2} \in \mathfrak{so}(r_{n-2},s_{n-2}),\ Y \in \mathrm{M}_{d_{n-1}}(\mathbb{R}),\ X \in \mathrm{M}_{d_{n-2},d_{n-1}}(\mathbb{R}), \\ \quad \widetilde{Y} = I_{r_{n-1},s_{n-1}}{}^t Y I_{r_{n-1},s_{n-1}} \text{ et } \widetilde{X} = I_{r_{n-1},s_{n-1}}{}^t X I_{r_{n-2},s_{n-2}}. \\ \qquad \text{(voir section II.6.3, la note de la page 71.)} \\ \bullet\ Y \in \omega^{n-1} \simeq \mathfrak{so}(r_{n-1},s_{n-1}) \simeq \mathfrak{so}(\check{E}_{n-1},\check{b}^{n-1}). \end{array} \right.$$

c'est-à-dire *ssi* $\mathrm{Mat}_\beta(h)$ est de la forme annoncée.

Enfin, comme annoncé dans le théorème 2 page 62, on vérifie également que ω^{n-2} est isomorphe à un produit semi-direct $\mathfrak{r} \ltimes \mathfrak{n}$ où $\mathfrak{n}$ est l'algèbre de Lie de $N = \{\gamma \in \Omega^{n-2} \ / \ \gamma$ agit trivialement sur $\check{E}_{n-1}$ et $\check{E}_{n-2}\}$ et où $\mathfrak{r} = \omega^{n-2}/\mathfrak{n}$:

$$\gamma \in \mathfrak{n} \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_\beta(\gamma) = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{X} & H' \\ 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } X,\ \widetilde{X} \text{ et } H' \text{ comme plus haut.}$$

On note enfin que N est extension centrale de B par A, avec $A = \{\gamma \in \Omega^{n-2} \ / \ \gamma_{|E^{n-2}_{n,n-1}} =$

$\mathrm{Id}_{E^{n-2}_{n,n-1}}\}$ et $B = N/A$. A et B sont abéliens, N est nilpotent d'ordre 2 si $d_{n-1} \neq 0$, abélien sinon ($N = A$ dans ce cas). On remarque également que R n'est pas facteur direct de Ω^{n-2}.

• $\boxed{\Omega^{n-3}.}$ Soit β une base adaptée de $E^{n-3} = E/\ker T^{n-3}$. On note $D = (D_{p,q})_{n-2\leq q\leq p\leq n}$ la décomposition adaptée associée à β. Rappelons les deux diagrammes :

$$\begin{array}{ccccc} E^{n-3}_{n-2,n-2} & & & & \\ \cap & & & & \\ E^{n-3}_{n-1,n-2} & \subset & E^{n-3}_{n-1,n-1} & & \\ \cap & & \cap & & \\ E^{n-3}_{n,n-2} & \subset & E^{n-3}_{n,n-1} & \subset & E^{n-3}_{n,n} = E^{n-3}, \end{array} \qquad \text{«relevé» en :} \quad \left.\begin{array}{ccccc} D_{n-2,n-2} & & & & \\ \oplus & & & & \\ D_{n-1,n-2} & \oplus & D_{n-1,n-1} & & \\ \oplus & & \oplus & & \\ D_{n,n-2} & \oplus & D_{n,n-1} & \oplus & D_{n,n} \end{array}\right\} = E^{n-3}.$$

Le calcul montre que :

$$\mathrm{Mat}_\beta(b^{n-2}) = \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{I_{n-2,n-2}\quad I_{n-1,n-1}\quad I_{n-3,n-3}}}^{E^{n-3}_{n,n-2}} \hphantom{\quad I_{n-1,n-1}\quad I_{n-2,n-2}\quad I_{n-1,n-1}} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-2,n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-1,n-1} \\ 0 & 0 & I_{n-3,n-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-1,n-1} & 0 & 0 \\ I_{n-2,n-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{n-1,n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccccc} \underbrace{\hphantom{I_{n-2,n-2}}}_{D_{n-1,n-2}} & \underbrace{\hphantom{I_{n-1,n-1}}}_{D_{n-2,n-2}} & \underbrace{\hphantom{I_{n-3,n-3}}}_{D_{n,n-2}} & \underbrace{\hphantom{I_{n-1,n-1}}}_{D_{n-1,n-1}} & \underbrace{\hphantom{I_{n-2,n-2}}}_{D_{n,n-1}} & \underbrace{\hphantom{I_{n-1,n-1}}}_{D_{n,n}} \end{array} \end{array},$$

et que :

$$h \in \omega^{n-3} \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_\beta(h) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|} H_{n-2} & 0 & \widetilde{X}'' & X & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{H''}} \\ \widetilde{X} & H_{n-1} & \widetilde{X}' & H' & & \\ 0 & 0 & H_{n-3} & 0 & X'' & X' \\ \cline{4-6} 0 & 0 & 0 & H_{n-1} & \widetilde{X} & H' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{n-2} & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{n-1} \\ \cline{4-6} \end{array}\right),$$

avec : • H_{n-1} et H' dans $\mathfrak{so}(r_{n-1},s_{n-1}) \simeq \mathfrak{so}(\check{E}_{n-1},\check{b}^{n-1})$,

• H_{n-2} dans $\mathfrak{so}(r_{n-2},s_{n-2}) \simeq \mathfrak{so}(\check{E}_{n-2},\check{b}^{n-2})$ et H_{n-3} dans $\mathfrak{so}(r_{n-3},s_{n-3}) \simeq \mathfrak{so}(\check{E}_{n-3},\check{b}^{n-3})$,

• X une matrice quelconque de $\mathrm{M}_{d_{n-2},d_{n-1}}(\mathbb{R})$, X' de $\mathrm{M}_{d_{n-3},d_{n-1}}(\mathbb{R})$ et X'' de $\mathrm{M}_{d_{n-3},d_{n-2}}(\mathbb{R})$,

• $\widetilde{X} = I_{r_{n-1},s_{n-1}}{}^tXI_{r_{n-2},s_{n-2}}$, $\widetilde{X}' = I_{r_{n-1},s_{n-1}}{}^tXI_{r_{n-3},s_{n-3}}$ et $\widetilde{X}'' = I_{r_{n-2},s_{n-2}}{}^tXI_{r_{n-3},s_{n-3}}$.

• $H'' \in \mathrm{M}_{d_1+d_2}(\mathbb{R})$, vérifiant $H'' = -\widetilde{I}\,{}^tH''\widetilde{I}$ où $\widetilde{I} = \begin{pmatrix} I_{r_{n-2},s_{n-2}} & 0 \\ 0 & I_{r_{n-1},s_{n-1}} \end{pmatrix}$

(H'' est «$\widetilde{I}$-antisymétrique»).

On reconnaît dans le bloc encadré la matrice générique d'un élément de ω^{n-2}. C'est en effet la deuxième égalité du corollaire 1 page 57 au rang $k = n-3$, qui est vérifiée :

$$h \in \omega^{n-3} \ \textit{ssi :} \quad \left\{\begin{array}{l} \bullet\ h \in \mathfrak{so}(E^{n-3},b^{n-3}) \text{ et } h(E^{n-3}_{n,n-1}) \subset E^{n-3}_{n,n-2} \\ \bullet\ \text{l'action de } h \text{ sur } E^{n-2} \simeq E^{n-3}/E^{n-3}_{n,n-2} \text{ est dans } \omega^{n-2}. \end{array}\right.$$

i.e. ssi :

$$\left\{\begin{array}{l}
\bullet\ \mathrm{Mat}_\beta(h) = \left(\begin{array}{c|c|c|c}
\widetilde{Y} & \widetilde{X}_1 & \widetilde{X}_2 & H'' \\ \hline
0 & H_{n-3} & 0 & X_1 \\ \hline
0 & 0 & H_{n-1} & X_2 \\ \hline
0 & 0 & 0 & Y
\end{array}\right) \text{ avec } H_{n-i} \in \mathfrak{so}(r_{n-i},s_{n-i}), \\
\widetilde{X}_1 = \widetilde{I}\,{}^t\!X_1 I_{r_{n-3},s_{n-3}}, \quad \widetilde{X}_1 = \widetilde{I}\,{}^t\!X_1 I_{r_{n-1},s_{n-1}}, \quad \widetilde{Y} = \widetilde{I}\,{}^t Y \widetilde{I} \\
\text{et } H'' \text{ comme plus haut. (voir section II.6.3, note page 71.)} \\
\bullet \text{ le bloc inférieur droit } \begin{pmatrix} H_{n-1} & X_2 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \text{ est la matrice d'un élément de } \omega^{n-2} \\
\qquad \text{(voir la forme d'une telle matrice au point précédent).}
\end{array}\right.$$

i.e. ssi $\mathrm{Mat}_\beta(h)$ est de la forme annoncée.

Enfin, on vérifie également que ω^{n-3} est isomorphe à un produit semi-direct $\mathfrak{r} \ltimes \mathfrak{n}$ où $\mathfrak{n}$ est l'algèbre de Lie de $N = \{\gamma \in \Omega^{n-3}\ /\ \gamma$ agit trivialement sur $\check{E}_{n-1}$ $\check{E}_{n-2}$ et $\check{E}_{n-3}\}$. Le produit n'est pas direct. D'autre part, on le voit à la forme des matrices, le facteur nilpotent de ω^k devient vite compliqué quand k décroît.

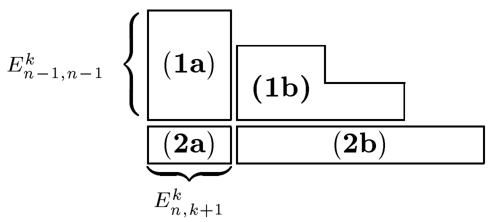
II.7.2 Le cas général : une formule de récurrence

Soit D une décomposition adaptée de (E,a,b) et pour tout $j \in [\![0,n-1]\!]$, $(\check{e}_i^j)_{i=1}^{d_j}$ une base de $\check{E}_j$. On associe canoniquement à ces objets une base adaptée de E : $\beta = (((T^l(e_i^j))_{i=1}^{d_j})_{l=j}^{0})_{j=0}^{n-1}$, où chaque $(e_i^j)_{i=1}^{d_j}$ est le relevé naturel de $(\check{e}_i^j)_{i=1}^{d_j}$ en base de $D_{n,j+1}$. Notons $e_i^{p,q} = T^{n-p}e_i^{n+q-p}$ et également $d_{p,q} = d_{n-p+q-1} = \dim \check{E}_{n-p+q-1} = \dim D_{p,q}$. pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, on tire de β une base adaptée β^k de E^k :

$$\beta^k = (((\pi^k(e_i^{p,q})_{i=1}^{d_{p,q}})_{p=n-1}^{q})_{q=k+1}^{n-1},((e_i^{n,q})_{i=1}^{d_{n,q}})_{q=k+1}^{n})\text{ , \textbf{dans cet ordre.}}$$

Ainsi, β et β^0, par exemple, sont des bases adaptées de (E,a,b) composées des mêmes vacteurs, mais ordonnées différemment.

Sur un diagramme des $\pi^k(D_{p,q}) = D_{p,q}^k$ comme posé en section I.2, cela revient à ordonner les $D_{p,q}^k$ de la façon suivante :



- déjà ceux de $E_{n-1,n-1}^k$, notés **(1)**, de bas en haut et de gauche à droite,
- puis ceux de $\oplus_{q=k+1}^n D_{n,q}^k$, notés **(2)**, de gauche à droite.

Cet ordre ne se projette de β^k sur β^{k+1}. On distingue ici **(1a)** et **(1b)** d'une part, **(2a)** et **(2b)** d'autre part, pour les besoins de la suite. **(1a)** désigne les vecteurs de base de $E_{n-1,k+1}^k$, **(1b)** ceux qui les complètent dans $E_{n-1,n-1}^k$, **(2a)** ceux de $D_{n,k+1}^k$ et **(2b)** ceux de $\oplus_{q=k+2}^{n} D_{n,q}^{k}$. Alors, en gardant ces notations, β^k étant une base adaptée ainsi ordonnée et β^{k+1} étant la base — adaptée — de E^{k+1} obtenue par projection de β^k :

Proposition 5 $\quad$ *$h \in \omega^k \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\beta^k}(h) = \begin{pmatrix} \overbrace{W_k}^{(1)} & \overbrace{Z_k}^{(2)} \\ 0 & Y_k \end{pmatrix}$ où :*

$$Y_k = \begin{pmatrix} \overbrace{H_k}^{(2a)} & \overbrace{X_k}^{(2b)} \\ 0 & Y_{k+1} \end{pmatrix}, \; Z_k = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \overbrace{X_k^*}^{(2a)} & \overbrace{H_k'}^{(2b)} \\ 0 & Z_{k+1} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \}\,(1a) \\ \}\,(1b) \end{array}, \; W_k = \begin{pmatrix} \overbrace{Y_{k+1}^*}^{(1a)} & \overbrace{Z_{k+1}^*}^{(1b)} \\ 0 & W_{k+1} \end{pmatrix},$$

avec :

- *Y_{k+1}, W_{k+1} et Z_{k+1} matrices telles que : $\begin{pmatrix} W_{k+1} & Z_{k+1} \\ 0 & Y_{k+1} \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\beta^{k+1}}(h^{k+1})$ avec h^{k+1} un élément de ω^{k+1},*

- *H_k une matrice quelconque de $\mathfrak{so}_{r_{n-k},s_{n-k}}(\mathbb{R}) \simeq \mathfrak{so}(\check{E}_k,\check{b}_k)$,*

- *X_k une matrice quelconque de $\mathrm{M}_{d_k,\tilde{d}_k}(\mathbb{R})$ et $X_k^* = \widetilde{I}_k\, {}^t X_k I_{r_{n-k},s_{n-k}}$,*

- *H_k' une matrice de $\mathrm{M}_{\tilde{d}_k,\tilde{d}_k}(\mathbb{R})$ t.q. : $H_k = \widetilde{I}_k\, {}^t H_k' \widetilde{I}_k$,*

- *$Y_{k+1}^* = \widetilde{I}_k\, {}^t Y_{k+1} \widetilde{I}_k$,*

- *$Z_{k+1}^* = \widetilde{I}_k\, {}^t Z_{k+1} \widetilde{\widetilde{I}}_k$,*

où $\widetilde{I}_k$ et $\widetilde{\widetilde{I}}_k$ sont des matrices diagonales par blocs : $\widetilde{I}_k = \mathrm{Diag}(I_{r_{k+1},s_{k+1}}, I_{r_{k+2},s_{k+2}}, \ldots, I_{r_{n-1},s_{n-1}})$ et $\widetilde{\widetilde{I}}_k = \mathrm{Diag}(\widetilde{I}_{k+1}, \widetilde{I}_{k+2}, \ldots, \widetilde{I}_{n-2})$ et où $\tilde{d}_k = d_{k+1} + d_{k+2} + \ldots + d_{n-1}$.

Il est à noter que n'importe quel ordre sur les vecteurs de β^k, respectant l'inclusion des $E_{p,q}^k$ — le vecteur $v \in E_{p',q'}^k$ classé avant $w \in E_{p,q}^k$ si $E_{p',q'}^k \subset E_{p,q}^k$ —, donne à la matrice de $h \in \omega^k$ une forme triangulaire supérieure par blocs correspondant aux $D_{p,q}^k$: les $E_{p,q}^k$ sont en effet stables pas ω^k. L'ordre choisi ici ne respecte *pas* cette inclusion, et la matrice obtenue de $h \in \omega^k$ n'est *pas* triangulaire supérieure par blocs correspondant aux $D_{p,q}^k$. Par exemple, Y_k^* est triangulaire inférieure par blocs. Cependant, c'est seulement avec un tel ordre sur les vecteurs de β^k que la matrice générique de $h \in \omega^k$ devient lisible.

Démonstration : C'est lourd mais pas profond. Montrons la proposition par récurrence descendante sur k. Au rang $k = n$, elle est vide, donc vraie. Supposons le résultat vrai au rang $k+1$. Soit β^k une base adaptée «bien ordonnée» de $(E^k, b^k, b^k(\cdot, T\cdot))$ et β^{k+1} la base adaptée «bien ordonnée» de $(E^{k+1}, b^{k+1}, b^{k+1}(\cdot, T\cdot))$ déduite de β^k par projection. Alors :

$$h \in \omega^k \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} h \in \mathfrak{so}(b^k) \text{ et } h(E_{n,k+1}^k) \subset E_{n,k+1}^k \\ \text{si } \check{h} \in \mathfrak{gl}(E^{k+1}) \text{ est l'action de } h \text{ sur } E^{k+1},\ \check{h} \in \omega^{k+1} \end{array} \right. \quad \text{d'après le corollaire 1.}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bullet\ \mathrm{Mat}_{\beta^k}(h) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \textbf{(1a)} & \textbf{(1b)} & \textbf{(2a)} & \textbf{(2b)} \end{array} \\ \begin{pmatrix} Y^* & X^* & X'^* & G'' \\ 0 & G & 0 & X \\ 0 & 0 & G' & X' \\ 0 & 0 & 0 & Y \end{pmatrix} \end{array} \text{ où } G = \widetilde{\widetilde{I}}_k\, {}^tG\widetilde{\widetilde{I}}_k, \quad G' = I_{r_k,s_k}\, {}^tGI_{r_k,s_k}, \\ G'' = \widetilde{I}_k\, {}^tG''\widetilde{I}_k, \quad Y^* = \widetilde{I}_k\, {}^tY^*\widetilde{I}_k, \quad X^* = \widetilde{I}_k\, {}^tX\widetilde{\widetilde{I}}_k \quad \text{et } X'^* = \widetilde{I}_k\, {}^tX'I_{r_k,s_k}. \\ (\textit{cf.}\text{ note annexe de la section II.6.3 page 71.}) \\ \bullet\ \begin{pmatrix} G & X \\ 0 & Y \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\beta^{k+1}}(\check{h}) = \begin{pmatrix} W_{k+1} & Z_{k+1} \\ 0 & Y_{k+1} \end{pmatrix}, \text{ où } W_{k+1},\ Z_{k+1} \text{ et } Y_{k+1} \\ \text{vérifient les propriétés de la proposition. (C'est l'hypothèse de récurrence.)} \end{array} \right.$$

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Mat}_{\beta^k}(h)$ est comme annoncé dans la proposition.

Le résultat est vrai au rang k. La récurrence est propagée. $\square$

On peut alors dégager, par récurrence, la structure des ω^k. Introduisons à cette fin, pour tout k de $[\![0,n-1]\!]$, trois groupes de Lie G^k, A^k et B^k :

• $G^k = \{\gamma \in \Omega^k\ /\ \gamma$ agit trivialement sur $E^k_{n-1,n-1}$ et, par action quotient, sur $\check{E}_k\}$, c'est un sous-groupe de Lie distingué de Ω^k,

• $A^k = \{\gamma \in \Omega^k\ /\ \gamma$ agit trivialement sur $E^k_{n-1,n-1} + E^k_{n,k+1}\}$, sous-groupe de G^k, distingué dans Ω^k,

• $B^k = G^k/A^k$;

on notera $\mathfrak{g}^k$, $\mathfrak{a}^k$ et $\mathfrak{b}^k$ leurs algèbres de Lie respectives. Remarque : au rang $n-1$: $G^{n-1} = A^{n-1} = \{0\}$. alors :

Proposition 6 *Les objets introduits vérifient, pour tout k de $[\![0,n-1]\!]$:*

- *$\mathfrak{a}^k$ et $\mathfrak{b}^k$ sont des algèbres de Lie abéliennes de dimension respective $\tilde{d}_k^2$ et $d_k.\tilde{d}_k$,*
- *G^k est extension centrale de B^k par A^k :*

$$\{0\} \to A^k \to G^k \to B^k \to \{0\} \quad \textit{et} \quad A^k \textit{ est central dans } G^k,$$

- *Ω^k est extension d'un produit semi-direct $(\Omega^{k+1} \times O(\check{E}_k,\check{b}_k)) \ltimes B^k$ par A^k :*

$$\{0\} \to A^k \to \Omega^k \to \Big[(\Omega^{k+1} \times O(\check{E}_k,\check{b}_k)) \ltimes B^k\Big] \to \{0\}.$$

De plus, sous les notations de la proposition 5 page 76 :

$$h \in \mathfrak{g}^k \Leftrightarrow W_k = 0 \Leftrightarrow (Y_{k+1} = 0,\ W_{k+1} = 0,\ Z_{k+1} = 0)\ ; \quad h \in \mathfrak{a}^k \Leftrightarrow (W_k = 0 \textit{ et } X_k = 0)\,.$$

Les crochets de Lie décrivant les extensions données plus haut se lisent sur la matrice générique de h de la proposition 5 : en confondant les algèbres de Lie une de leurs sections pour les flèches, les crochets $[\mathfrak{b}^k,\mathfrak{b}^k]$, $[\mathfrak{b}^k,\omega^{k+1} \times \mathfrak{so}(\check{E}_k,\check{b}_k)]$ et $[\mathfrak{a}^k,\big((\omega^{k+1} \times \mathfrak{so}(\check{E}_k,\check{b}_k)) \ltimes \mathfrak{b}^k\big)]$.

Démonstration : cette proposition se **lit** sur la matrice générique de la proposition 5. $\square$

On sait enfin que, pour tout k, Ω^k est isomorphe à un produit semi-direct $N^k \rtimes \prod_{i=k}^{n-1} O(r_i,s_i)$. On peut, de la même façon, dégager la structure de N^k seul.

Proposition 7 *$h \in \mathfrak{n}^k \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\beta^k}(h) = \left(\begin{array}{cc} \overbrace{W_k}^{\mathbf{(1)}} & \overbrace{Z_k}^{\mathbf{(2)}} \\ 0 & Y_k \end{array}\right)$ où Y_k, W_k et Z_k vérifient les mêmes relations qu'à la proposition 5 page 76, sauf:*

- $Y_k = \left(\begin{array}{cc} \overbrace{0}^{\mathbf{(2a)}} & \overbrace{X_k}^{\mathbf{(2b)}} \\ 0 & Y_{k+1} \end{array}\right)$
- $\left(\begin{array}{cc} W_{k+1} & Z_{k+1} \\ 0 & Y_{k+1} \end{array}\right) = \mathrm{Mat}_{\beta^{k+1}}(h^{k+1})$ *avec h^{k+1} un certain élément de $\mathfrak{n}^{k+1}$.*

Pour tout k, N^k est extension d'un produit semi-direct $(N^{k+1} \ltimes B^k)$ par A^k :

$$\{0\} \to A^k \to N^k \to \left[N^{k+1} \ltimes B^k\right] \to \{0\}.$$

III Cas a et b symétrique et antisymétrique

Ce dernier cas n'a pas été abordé par W.Klingenberg. Il faut tout d'abord reprendre la proposition 1 page 49, qui doit être modifiée.

III.1 Le lemme préliminaire revisité

Proposition 8 *Soient a et b deux formes bilinéaires, l'une symétrique, l'autre antisymétrique, a étant non dégénérée. On rappelle que B est l'endomorphisme cette fois a-antiautoadjoint tel que : $b(\cdot,\cdot) = a(\cdot,B\cdot)$. Soit $\widetilde{E} = \overline{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} E$ la complétion de E comme espace vectoriel sur $\overline{\mathbb{K}}$, la clôture algébrique de $\mathbb{K}$.*

B est a-antiautoadjoint, donc B et $-B$ sont conjugués et le polynôme minimal μ de B peut s'écrire dans $\overline{\mathbb{K}}[X]$: $\mu = X^{n_0}\prod_{i=1}^{k} P_i^{n_i}$, avec : $P_i = ((X-\lambda_i)(X+\lambda_i))$, et avec : $i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \pm\lambda_j$ et : $\forall i \geq 1, \lambda_i \neq 0$. Alors :

- *Les sous-espaces caractéristiques $\ker(B-\lambda_i \operatorname{Id})^{n_i}$, $i \geq 1$, associés à des valeurs propres non nulles, sont a- et b-totalement isotropes.*
- *En notant $E_i = \ker P_i^{n_i}(B) \subset \widetilde{E}$ si $i \geq 1$ et $E_0 = \ker B^{n_0} \subset \widetilde{E}$, alors :*

$$\widetilde{E} = \overset{\perp}{\underset{0\leq i\leq k}{\oplus}} E_i,$$

la somme étant a- et b-orthogonale, et les espaces E_i a-non dégénérés.

Démonstration : S et T, les parties respectivement semi-simple et nilpotente de B, considéré comme endomorphisme de $\widetilde{E}$, sont, comme B, a-antiautoadjoints. En effet, $-S$ et $-T$ sont les parties semi-simple et nilpotente de $-B$: $-B = -S-T$, $(-S)(-T) = (-T)(-S)$, $-S$ est semi-simple et $-T$ nilpotent. Or il existe P_T et P_S dans $\overline{\mathbb{K}}[X]$ t.q. $T = P_T(B)$ et $S = P_S(B)$. Comme B et $-B$ sont conjugués, les mêmes polynômes P_T et P_S appliqués à $-B$ donnent ses parties nilpotente et semi-simple, c'est-à-dire : $-T = P_T(-B)$ et $-S = P_S(-B)$. Alors : $\forall x,y, a(x,Sy) = a(x,P_S(B)y) = a(P_S(-B)x,y) = a(-Sx,y)$ et de même avec T, c'est le résultat annoncé.

Prenons alors $i \geq 1$ et x et y dans $\ker(B-\lambda_i \operatorname{Id})^{n_i} = \ker(S-\lambda_i \operatorname{Id})$. Alors :

$$a(x,y) = \frac{1}{\lambda_i}a(x,\lambda_i y) = \frac{1}{\lambda_i}a(x,Sy) = \frac{1}{\lambda_i}a(-Sx,y) = -\frac{1}{\lambda_i}a(\lambda_i x,y) = -a(x,y)$$

donc $a(x,y) = 0$. L'espace $\ker(B-\lambda_i \operatorname{Id})^{n_i}$ est donc a-totalement isotrope. De plus, $b(\cdot,\cdot) = a(\cdot,B\cdot)$ et S et T commutent avec B, donc $\ker(B-\lambda_i \operatorname{Id})^{n_i}$ est également b-totalement isotrope.

D'autre part, posons $P_0 = X \in \overline{\mathbb{K}}[X]$, prenons $0 \leq i \leq k$ et x dans $\ker P_i^{n_i}(B)$, $0 < j \leq k$, $j \neq i$ et y dans $\ker P_j^{n_j}(B)$, U et V dans $\overline{\mathbb{K}}[X]$ t.q. : $UP_i^{n_i} + VP_j^{n_j} = 1$. B est a-antiautoadjoint ; comme $X^2|P_j$, $P_j(B)$ est a-autoadjoint et :

$$\begin{aligned} a(x,y) &= a((UP_i^{n_i} + VP_j^{n_j})(B).x,y) \\ &= a(UP_i^{n_i}(B).x,y) + a(x,VP_j^{n_j}(B).y) \\ &= a(0,y) + a(x,0) = 0 \quad \text{ainsi que :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(x,y) &= b((UP_i^{n_i} + VP_j^{n_j})(B).Bx,y) \\ &= b(B(UP_i^{n_i}(B).x),y) + a(x,B(VP_j^{n_j}(B).y)) \\ &= a(0,y) + a(x,0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'où le deuxième point. □

Remarque : D'autre part, si a et b sont de nature différente, T est a-antiautoadjoint ; par conséquent, les formes $b_k =< \cdot ,T^k \cdot >$, b^k et $\check{b}^k$ introduites dans la section I.2 page 52 sont de nature variable suivant la parité de k. En effet, Si a est symétrique et b antisymétrique, les b_k, b^k et $\check{b}^k$ sont :

- symétriques si k est pair,
- antisymétriques sinon ;

la situation est inversée si les natures de a et b sont permutées.

III.2 Quand $\mathbb{K}$ est algébriquement clos

On se restreint dans cette section à un sous espace canonique E_i noté simplement E, on a alors $\mu = P_i^{n_i} = P^n$, avec $P = X$ ou $P = (X - \lambda)(X + \lambda)$. S et T sont les parties semi-simple et nilpotente de B, n l'indice de nilpotence de T.

III.2.1 Structure et action de Ω

Le théorème ne traite que le cas où l'une au moins des deux formes n'est pas dégénérée.

Théorème 5 *Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, trois cas apparaissent :*

- *La forme symétrique est non dégénérée, l'autre est dégénérée.*

On note alors a la forme symétrique, b l'antisymétrique, b est dégénérée, donc B a la valeur propre zéro et on est dans le cas $P = X$, $B = T$. Alors : Ω agit simplement transitivement sur $\mathcal{D} \times \prod_{k=0}^{n-1} \mathrm{Stab}(\check{E}_k,\check{b}_k)$, où $\mathcal{D}$ est l'ensemble des décompositions de E adaptées à (a,T). Plus précisément, Ω est isomorphe à un produit semi-direct $N \rtimes R$, où :

- $N = \{\gamma \in \Omega$ / l'action induite par γ sur chaque $\check{E}_k$ est triviale $\}$. *C'est un sous-groupe distingué de Ω, nilpotent d'indice $\leq 2n-1$, qui agit simplement transitivement sur $\mathcal{D}$,*
- *$R = \Omega/N$ agit simplement transitivement sur $\prod_{k=0}^{n-1} \mathrm{Stab}(\check{E}_k,\check{b}_k) \simeq \left(\prod_{\substack{0\leq k<n \\ k \text{ pair}}} O_{d_k}(\mathbb{K})\right) \times \left(\prod_{0\leq k<n,\, k \text{ impair}} Sp_{d_k}(\mathbb{K})\right)$ où $d_k = \dim \check{E}_k$. Les d_k avec k impair sont des entiers pairs ; en effet les $\check{b}^k$ sont antisymétriques, non dégénérées sur les $\check{E}_k$. En particulier $R \simeq \left(\prod_{0\leq k<n,\, k \text{ pair}} O_{d_k}(\mathbb{K})\right) \times \left(\prod_{0\leq k<n,\, k \text{ impair}} Sp_{d_k}(\mathbb{K})\right)$. R est réductif.*

Les invariants de la situation, c'est-à-dire du couple (a,b), sont donc n l'indice de nilpotence de T, et les $(d_k)_{k=0}^{n-1}$; ce sont les invariants de Jordan de T.

- *La forme antisymétrique est non dégénérée, l'autre est dégénérée.*

On note alors a la forme antisymétrique, b la symétrique, b est dégénérée, donc à nouveau $P = X$, $B = T$ et le même résultat est vérifié : Ω agit simplement transitivement sur

$\mathcal{D} \times \prod_{k=0}^{n-1} \mathrm{Stab}(\check{E}_k,\check{b}_k)$, *où* $\mathcal{D}$ *est l'ensemble des décompositions de* E *adaptées à* (a,T). *Plus précisément,* Ω *est isomorphe à un produit semi-direct* $N \rtimes R$, *où :*

- $N = \{\gamma \in \Omega$ / l'action induite par γ sur chaque $\check{E}_k$ est triviale $\}$. *C'est un sous-groupe distingué de* Ω, *nilpotent d'indice* $\leq 2n-1$, *qui agit simplement transitivement sur* $\mathcal{D}$,
- $R = \Omega/N$ *agit simplement transitivement sur* $\prod_{k=0}^{n-1} \mathrm{Stab}(\check{E}_k,\check{b}_k) \simeq \left(\prod_{\substack{0\leq k<n \\ k\ pair}} Sp_{d_k}(\mathbb{K})\right) \times \left(\prod_{0\leq k<n,\, k\ impair} O_{d_k}(\mathbb{K})\right)$ *où* $d_k = \dim \check{E}_k$. *Les* d_k *avec* k *pair sont des entiers pairs ; en effet les* $\check{b}^k$ *sont antisymétriques, non dégénérées sur les* $\check{E}_k$. *En particulier* $R \simeq \left(\prod_{0\leq k<n,\, k\ pair} Sp_{d_k}(\mathbb{K})\right) \times \left(\prod_{0\leq k<n,\, k\ impair} O_{d_k}(\mathbb{K})\right)$. *R est réductif.*

• *Les deux formes sont non dégénérées.*

On choisit ici de prendre pour a la forme symétrique, pour b l'antisymétrique. b est non dégénérée, donc P *est du type* $(X-\lambda)(X+\lambda)$, $\lambda \neq 0$. Ω *agit sur* $E^+ = \ker(B-\lambda\,\mathrm{Id})^n$, *cette restriction* ρ *l'envoie sur* $\Omega^+ = \rho(\Omega) \subset GL(E^+)$. *Alors :* ρ *est un isomorphisme de* Ω *sur* Ω^+ *et* Ω^+ *est* $Z(T_{|E^+})$ *le commutant de* T, i.e. *:* $\Omega^+ = \{\gamma \in GL(E^+) \ / \ \gamma T = T\gamma\}$. *Donc :* $\Omega \simeq Z(T_{|E^+})$.

Remarque : Sur le même principe que dans les deux premiers cas, on peut, dans ce dernier cas, décomposer l'action de Ω. Soit $\mathcal{D}^+$ l'ensemble des décompositions de E^+ adaptées à $T_{|E^+}$, *i.e.* des décompositions de E^+ en somme directe $E^+ = \oplus_{q\leq p\leq n} D^+_{p,q}$, relevant le réseau de drapeaux $(E^+_{p,q})_{q\leq p\leq n}$ associé à $T_{|E^+}$ (voir définition 1 page 53). Alors, et c'est encore le théorème de Jordan : $\Omega^+ = Z(T_{|E^+})$ est isomorphe à un produit semi-direct $N^+ \rtimes G^+$ où :

• $N^+ = \{\gamma \in \Omega^+$ / l'action induite par γ sur chaque $\check{E}^+_k$ est triviale $\}$. N^+ est un sous-groupe distingué de Ω^+, nilpotent d'indice $\leq 2n-1$, et agit simplement transitivement sur $\mathcal{D}^+$,

• $G^+ = \Omega^+/N^+$ agit simplement transitivement sur $\prod_{k=0}^{n-1} GL(\check{E}^+_k)$. Donc $G^+ \simeq \prod_{k=0}^{n-1} GL(\check{E}^+_k) \simeq \prod_{k=0}^{n-1} GL_{d_k}(\mathbb{K})$ où $d_k = \dim \check{E}^+_k$

Cette remarque décompose l'action de Ω sur un sous espace de E. On peut en déduire la façon dont Ω agit sur E.

Corollaire 3 *L'ensemble* $\mathcal{D}$ *des décompositions de* E *adaptées simultanément à* (a,T) *et à* $(a(\cdot,S\cdot),T)$ *n'est pas vide. Il est canoniquement en bijection avec* $\mathcal{D}^+$. *De plus,* Ω *est isomorphe à un produit semi-direct* $N \rtimes G$, *où :*

• $N = \{\gamma \in \Omega$ / l'action induite par γ sur chaque $\check{E}_k$ est triviale $\}$. *La restriction* ρ *est bijective de* N *sur* N^+. N *est un sous-groupe distingué de* Ω, *nilpotent d'indice* $\leq 2n-1$, *et agit simplement transitivement sur* $\mathcal{D}$.

• $G = \Omega/N$ *agit simplement transitivement sur* $\prod_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{Stab}(\check{E}_k,\check{b}^k) \cap \mathrm{Stab}(\check{E}_k,\check{b}^k(\cdot,S\cdot))\right) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{Stab}(\check{E}_k,\check{b}^k) \cap Z(S)\right) \simeq \prod_{k=0}^{n-1} GL(\check{E}^+_k)$. *Ici, l'action de* S *passant au quotient sur les* $\check{E}_k$, *on note encore* S *les automorphismes des* $\check{E}_k$ *obtenus. Donc* $G \simeq G^+ \simeq \prod_{k=0}^{n-1} GL_{d_k}(\mathbb{K})$.

Les invariants de la situation sont donc les d_k, *invariants de Jordan de* $T_{|E^+}$.

III.2.2 Démonstrations

Démonstration du théorème

• Les deux premiers cas

Dans les deux premiers cas, $E = \ker B^n$ est le sous-espace caractéristique de B associé à la valeur propre zéro ; par la proposition 8 page 79, il est a-non dégénéré . Sur E, a est donc réflexive non dégénérée, $B = T$ est un endomorphisme de E, a-antiautoadjoint. On peut effectuer la même démonstration que pour le théorème 1page 56.

• Le troisième cas

La restriction ρ à E^+, de l'action de Ω, est un isomorphisme de Ω sur $Z(T_{|E^+}) \subset GL(E^+)$. Il suffit de montrer que ρ est bijective de Ω sur $Z(T_{|E^+})$. Soit $\gamma \in \Omega \subset GL(E)$ et $\gamma^+ = \rho(\gamma) = \gamma_{|E^+} \in GL(E^+)$ sa restriction à E^+. γ est $< \cdot, \cdot >$- et $< \cdot, T\cdot >$-orthogonal, donc commute avec T, donc, $\gamma^+ T = T\gamma^+$ et $\rho(\Omega) \subset Z(T_{|E^+})$.

Soit $\gamma^+ \in Z(T_{|E^+}) \subset GL(E^+)$; γ^+ admet alors un unique prolongement $\widetilde{\gamma} \in \Omega \subset GL(E)$. En effet, a est non dégénérée sur E, donc fournit un isomorphisme de E sur E^* :

$$E \underset{\sharp}{\overset{\flat}{\rightleftarrows}} E^*. \text{ Notamment, } E^+ \text{ et } E^- \text{ étant totalement isotropes : } E^- \underset{\sharp}{\overset{\flat}{\rightleftarrows}} E^{+*}.$$

A tout $\gamma^+ \in GL(E^+)$ est canoniquement associé un élément γ^- de $GL(E^-)$ donné par :

$$\gamma^- = \sharp \circ {}^t(\gamma^+)^{-1} \circ \flat.$$

On note $\widetilde{\gamma} = (\gamma^+, \gamma^-) \in GL(E^+) \times GL(E^-) \subset GL(E)$. C'est l'unique prolongement recherché, en effet :

• $\widetilde{\gamma}$ commute avec B. Comme $\widetilde{\gamma}$ stabilise $E^\pm = \ker(S \mp \lambda \,\mathrm{Id})$, il suffit de vérifier qu'il commute avec T, donc que : $[\gamma^-, T_{|E^-}] = 0$. T est antiautoadjoint, donc : $\forall z \in E, {}^tT(z^\flat) = -(T(z))^\flat$. Soit alors $y \in E^-$:

$$\begin{aligned}[\gamma^-(T(y))]^\flat &= {}^t(\gamma^+)^{-1}(T(y)^\flat) = -{}^t(\gamma^+)^{-1}({}^tT(y^\flat)) = -{}^t(T.(\gamma^+)^{-1})(y^\flat)\\ &= -{}^t((\gamma^+)^{-1}.T)(y^\flat) = -{}^tT.{}^t(\gamma^+)^{-1}(y^\flat) = -{}^tT((\gamma^-(y))^\flat) = (T(\gamma^-(y)))^\flat,\end{aligned}$$

donc $\gamma^-.T = T.\gamma^-$ et le résultat.

• $\widetilde{\gamma}$ est $< \cdot, \cdot >$-orthogonal. Comme E^+ et E^- sont chacun totalement isotrope, il suffit de le vérifier avec x et y dans E^+ et E^- respectivement.

$$\begin{aligned}< \widetilde{\gamma}y, \widetilde{\gamma}x > &= < ({}^t(\gamma^+)^{-1}(y^\flat))^\sharp, \gamma^+(x) >\\ &= [{}^t(\gamma^+)^{-1}(y^\flat)](\gamma^+(x))\\ &= < y, (\gamma^+)^{-1}(\gamma^+(x)) >\\ &= < y, x > .\end{aligned}$$

Ainsi, $\widetilde{\gamma} \in \Omega$ et $\rho(\widetilde{\gamma}) = \gamma^+$.

• $\widetilde{\gamma}$ est le seul antécédent de γ^+. Si $\overline{\gamma} = (\gamma^+, \delta) \in GL(E^+) \times GL(E^-)$ est dans Ω, alors : $\forall y \in E^-, (\delta(y))^\flat \in (E^+)^*$ et :

$$(\delta(y))^\flat = (\overline{\gamma}(y))^\flat = < \overline{\gamma}(y), \cdot > = < y, \overline{\gamma}^{-1} \cdot > = < y, \gamma^+ \cdot > = {}^t(\gamma^+)^{-1}(y^\flat)$$

donc nécessairement, $\delta = \gamma^-$. □

Remarque : Les bases adaptées de l'espace E^+ sont ici les bases de Jordan de $T_{|E^+}$, obtenues à partir d'une décomposition D^+ adaptée à T quelconque et de bases quelconques des $\breve{E}_k^+$, relevées en bases des $D_{n,k+1}^+$ et propagées par les T^i en bases de tous les $D_{p,q}^+$. Ω^+, donc Ω, agit simplement transitivement sur ces bases.

Reste à démontrer le corollaire. Commençons par démontrer que $\mathcal{D}$ est non-vide.

Proposition 9 *$\mathcal{D}$ n'est pas vide ; plus précisément, si $D^+ = (D_{p,q}^+)_{q\leq p\leq n} \in \mathcal{D}^+ \neq \emptyset$ est une décomposition adaptée à $T_{|E^+}$, alors :*

- $(D^+)^* = ((D^+)_{p,q}^*)_{q\leq p\leq n}$, *la décomposition duale, est une décomposition de* E^{+*},
- $(D^+)^{*\sharp} = ((D^+)_{p,q}^{*\sharp})_{q\leq p\leq n}$ *est une décomposition de* $E^- \simeq (E^{+*})^\sharp$,
- $D^- = (D_{p,q}^-)_{q\leq p\leq n} = ((D^+)_{n+1-q,n+1-p}^{*\sharp})_{q\leq p\leq n}$ *est une décomposition adaptée à* $(E^-,a,T_{|E^-})$,
- $\widetilde{D} = (\widetilde{D}_{p,q})_{q\leq p\leq n}$ *définie par* $\forall p,q, \widetilde{D}_{p,q} = D_{p,q}^+ \oplus D_{p,q}^-$ *est une décomposition de* E *adaptée à* (a,T) *et à* $(a(\cdot,S\cdot),T)$, i.e. *un élément de* $\mathcal{D}$.

Démonstration : Montrons déjà que D^- est une décomposition de E^- adaptée à T.

- Les $(D_{p,q}^-)_{q\leq p\leq n}$ sont des relevés des drapeaux $E_{p,q}^-$ relatifs à T sur E^-, en effet :

$*$ $\underline{\forall q \leq p \leq n, D_{p,q}^- \subset E_{p,q}^-}$. Soit y dans $D_{p,q}^-$, alors $y^\flat \in (D^+)_{n+1-q,n+1-p}^*$, *i.e.* $y^\flat_{|D_{i,j}^+}$ est nulle si $(i,j) \neq (n+1-q,n+1-p)$. En particulier, $y^\flat$ est nulle sur $\ker T^{(n+1-p)-1} = \ker T^{n-p}$, *i.e.* $y \in (\ker T^{n-p})^\perp = \operatorname{Im} T^{n-p}$. Donc $D_{p,q}^- \subset \operatorname{Im} T^{n-p}$. D'autre part, $y^\flat$ est nulle sur $\operatorname{Im} T^{n-(n+1-q)+1} = \operatorname{Im} T^q$, *i.e.* $y \in (\operatorname{Im} T^q)^\perp = \ker T^q$. Donc $D_{p,q}^- \subset \ker T^q$ et $D_{p,q}^- \subset E_{p,q} \cap E^- = E_{p,q}^-$.

$*$ $\underline{\forall q \leq p \leq n, D_{p,q}^- \cap \ker T^{q-1} = D_{p,q}^- \cap \operatorname{Im} T^{n-p+1} = \{0\}}$. Soit $y \in D_{p,q}^- \cap \ker T^{n-p-1}$. $y \in \ker T^{q-1}$, donc $0 = (T^{q-1}(y))^\flat = \pm {}^tT^{q-1}(y^\flat)$, donc $y^\flat$ est nulle sur $\operatorname{Im} T^{q-1} = E_{n-q+1,n-q+1}^+ = \bigoplus_{j\leq i\leq n-q+1} D_{i,j}^+$. D'autre part, $y \in D_{p,q}^-$, donc $y^\flat$ est nulle sur les $D_{i,j}^+$ avec $i > n-q+1$ et donc $y^\flat = 0$ et la première égalité est vérifiée.
Soit $y \in D_{p,q}^- \cap \operatorname{Im} T^{n-p+1}$. $y = T^{n-p+1}(z)$ pour un certain z de E^- et : $y^\flat = T^{n-p+1}(z)^\flat = \pm {}^tT^{n-p+1}(z^\flat)$ donc $y^\flat$ est nulle sur $\ker T^{n-p+1} = E_{n,n-p+1}^+ = \bigoplus_{j\leq \min\{i,n-p+1\}} D_{i,j}^+$.
Comme $y \in D_{p,q}^-$, $y^\flat$ est nulle sur les $D_{i,j}^+$ avec $j > n+1-p$, donc $y^\flat$ est nulle sur les $D_{i,j}^+$ avec $j \leq i \leq n$, *i.e.* sur E^+ et la deuxième égalité est vérifiée.

Par ces deux points, $D_{p,q}^- \subset E_{p,q}^-$ et $D_{p,q}^- \cap (E_{p-1,q}^- + E_{p,q-1}^-) = \{0\}$. Pour tous i et j, $D_{i,j}^+$ et $(D^+)_{i,j}^{*\sharp}$ sont de même dimension car isomorphes, $\dim D_{i,j}^+ = \dim D_{n+1-j,n+1-i}^+$ car ils sont envoyés bijectivement l'un sur l'autre par $T^{|n+1-(i+j)|}$, donc :

$$\begin{aligned}
\dim D_{p,q}^- &= \dim D_{n+1-q,n+1-p}^+ \\
&= \dim D_{p,q}^+ \\
&= \dim[E_{p,q}^+/(E_{p-1,q}^+ + E_{p,q-1}^+)] \\
&= \dim E_{p,q}^-/[(E_{p-1,q}^- + E_{p,q-1}^-)]
\end{aligned}$$

et $D_{p,q}^-$ est un relevé de $E_{p,q}^-/(E_{p-1,q}^- + E_{p,q-1}^-)$ dans $E_{p,q}^-$.

- Les $D^-_{p,q}$ vérifient : $\forall q \leq p \leq n, T(D^-_{p,q}) = D^-_{p-1,q-1}$. Si $y \in E^-$:

$$y \in D^-_{p,q} \Leftrightarrow (\forall (i,j) \neq (n+1-q,n+1-p), y^\flat_{|D^+_{i,j}} = 0).$$

Soit $y \in D^-_{p,q}$ et $(i,j) \neq (n+2-q,n+2-p)$. $T(y)^\flat = -{}^tT(y^\flat)$, donc $T(y)^\flat_{|D^+_{i,j}} = 0 \Leftrightarrow y^\flat_{|T(D^+_{i,j})} = 0 \Leftrightarrow y^\flat_{|D^+_{i-1,j-1}} = 0$. Or $(i-1,j-1) \neq (n+1-q,n+1-p)$, donc $y^\flat_{|D^+_{i-1,j-1}} = 0$. Par conséquent, $T(y) \in D^-_{p-1,q-1}$ et D^- est adaptée à T.

La décomposition $\widetilde{D}$ relève donc les drapeaux $(E_{p,q})_{q\leq p\leq n}$ et vérifie : $\forall p,q, T(\widetilde{D}_{p,q}) = \widetilde{D}_{p-1,q-1}$. Elle est (E,a,T)-adaptée : il reste à vérifier le troisième point de la définition 1 page 53 : pour tout $(q_1,q_2) \in [\![1,n]\!]^2$ et tout $(k,l) \in [\![0,n-1]\!]^2$, $T^k(\widetilde{D}_{n,q_1})$ et $T^l(\widetilde{D}_{n,q_2})$ sont de somme non dégénérée si $q_1 = q_2 = l+k+1$, et orthogonaux sinon. Cela découle du système :

$$\begin{cases} T^k(\widetilde{D}_{n,q_1}) = D^+_{n-k,q_1-k} \oplus D^-_{n-k,q_1-k} = D^+_{n-k,q_1-k} \oplus D^{+*\sharp}_{n-q_1+k+1,k+1} \\ T^l(\widetilde{D}_{n,q_2}) = D^+_{n-l,q_2-l} \oplus D^-_{n-l,q_2-l} = D^+_{n-l,q_2-l} \oplus D^{+*\sharp}_{n-q_2+l+1,l+1} \\ D^+_{p,q} \oplus D^{+*\sharp}_{p',q'} \text{ est non dégénéré } ssi\ (p,q) = (p',q') \text{, tot. isotrope sinon.} \end{cases}.$$

$\widetilde{D}$ est donc adaptée à (E,a,T). Par construction, les $\widetilde{D}_{p,q}$ sont stables par S, $\widetilde{D}$ est donc également adaptée à $(E,a(\cdot,S\cdot),T)$ *i.e.* $\widetilde{D} \in \mathcal{D}$. □

Remarque : On vérifie en outre que :

– L'application $D^+ \mapsto \widetilde{D}$ de $\mathcal{D}^+$ dans $\mathcal{D}$ construite plus haut est bijective et commute avec l'action de N de $\mathcal{D}^+$ dans $\mathcal{D}$,

– Toutes les décompositions de $\mathcal{D}$ sont stables par S, d'où la partie directe de l'équivalence : «(E,a,T)- et $(E,a(\cdot,S\cdot),T)$-adaptée $\Leftrightarrow$ (E,a,T)-adaptée et S-stable».

Démonstration du corollaire. Par définition, Ω agit sur les décompositions adaptées à (a,T) et sur celles adaptées à $(a(\cdot,S\cdot),T)$, donc, agit sur $\mathcal{D} \neq \emptyset$ les décompositions adaptées aux deux triplets. Sur les $\check{E}_k$, Ω préserve $\check{b}^k$ et $\check{b}^k(\cdot,S\cdot)$. D'où, Ω agit sur $\mathcal{D} \times \prod_{k=0}^{n-1}\big(\mathrm{Stab}(\check{E}_k,\check{b}^k) \cap \mathrm{Stab}(\check{E}_k,\check{b}^k(\cdot,S\cdot)\big)$.

On note $N = \{\gamma \in \Omega$ / l'action induite par γ sur chaque $\check{E}_k$ est triviale $\}$. Le raisonnement est alors le même que dans la démonstration du théorème 1 page 56. En choisissant deux décompositions D et Δ de $\mathcal{D}$, des bases β_k des $\check{E}_k$, en relevant ces bases sur D et Δ pour obtenir des bases de E, on montre que les actions de N sur $\mathcal{D}$ et de $G = \Omega/N$ sur $\prod_{k=0}^{n-1}\big(\mathrm{Stab}(\check{E}_k,\check{b}^k) \cap \mathrm{Stab}(\check{E}_k,\check{b}^k(\cdot,S\cdot))\big)$ sont simples et transitives.

Enfin, $\rho^{-1}(N^+) = N$ et ρ est bijective de N sur N^+. Soit $\gamma \in \Omega$. Si γ agit trivialement sur $\check{E}_k$, $\gamma^+ = \gamma_{|E^+}$ agit aussi trivialement sur $\check{E}^+_k$ donc $\rho(N) \subset N^+$. Si γ^+ agit trivialement sur $\check{E}^+_k$, ${}^t(\gamma^+)^{-1}$ agit de même sur $(\check{E}^+_k)^*$, canoniquement isomorphe à $\check{E}^-_k$, donc γ^- agit trivialement sur $\check{E}^-_k$ et $\widetilde{\gamma} \in N$. Ainsi, ρ étant injective, $N \underset{\rho}{\simeq} N^+$. □

III.2.3 Les bonnes bases

Enfin, exhibons les «bases adaptées», sur lesquelles Ω agit simplement transitivement.

Les matrices de a et B, cas où la forme symétrique est non dégénérée et pas

l'autre.

Définition 10 *Soit E un espace vectoriel muni de deux formes bilinéaires a et b, telles que a est symétrique non dégénérée et que $b = a(\cdot, T\cdot)$ avec T nilpotent a-antiautoadjoint.*

A une décomposition $D = (D_{i,j})_{j \leq i \leq n}$ de E, adaptée à (a,T), et à un n-uplet $(\beta^k)_{k=0}^{n-1}$ de bases des $\check{E}_k$,

- *$\check{b}^k$-symplectiques pour les k impairs,*
- *$\check{b}^k$-orthonormées pour les k pairs,*

*on associe canoniquement une base β de E, de la même manière que dans le cas où a et b sont symétriques (*cf. *def.3 page 63). On note encore $\mathcal{B}$ l'ensemble de ces bases, dites adaptées au triplet (E,a,T) ou au triplet (E,a,b).*

On considère $D = (D_{p,q})_{q \leq p \leq n}$ une décomposition adaptée de (E,a,T) et β une base adaptée à (E,a,T) construite à partir de D. On reprend alors les objets D_k et β_k introduits page 64 en fin de section II.3 ; $d_k = \dim \check{E}_k = \dim D_{n,k+1}$, si k est pair, $\check{b}^k$ est antisymétrique et d_k est pair. $E = \overset{\perp}{\oplus} D_k$, $\forall k, B(D_k) = D_k$. Alors, dans β_{k+1}, la matrice $\mathrm{Mat}_{\beta_{k+1}}(a_{|D_{k+1}})$ est une matrice-blocs de taille $k+1$. Si k est pair :

$$\mathrm{Mat}_{\beta_{k+1}}(a_{|D_{k+1}}) = \begin{pmatrix} & & & & +I_{d_k} \\ & & & \cdot & \\ & & \cdot & & \\ & \cdot & & & \\ & +I_{d_k} & & & \\ -I_{d_k} & & & & \\ +I_{d_k} & & & & \end{pmatrix},$$

$$\text{si } k \text{ est impair, } d_k \text{ est pair et : } \mathrm{Mat}_{\beta_{k+1}}(a_{|D_{k+1}}) = \begin{pmatrix} & & & & -J^-_{d_k/2} \\ & & & \cdot & \\ & & \cdot & & \\ & \cdot & & & \\ & +J^-_{d_k/2} & & & \\ -J^-_{d_k/2} & & & & \\ +J^-_{d_k/2} & & & & \end{pmatrix},$$

Dans tous les cas, $B = T$ et :

$$\mathrm{Mat}_{\beta_{k+1}}(B_{|D_{k+1}}) = \begin{pmatrix} 0 & I_{d_k} & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & I_{d_k} \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie dans les deux cas que la matrice de a est symétrique, celle de $a(\cdot, B\cdot)$ antisymétrique.

Les matrices de a et B, cas où la forme antisymétrique est non dégénérée et pas l'autre. Les bases adaptées se construisent de la même façon. La matrice de a est la même, à ceci près que les blocs $\pm I_{d_k}$ apparaissent quand k est impair et les blocs $\pm J^-_{d_k/2}$ quand k est pair. La matrice de $B = T$ est inchangée. Cette fois, la matrice de a est donc antisymétrique, celle de $a(\,\cdot,B\,\cdot\,)$ symétrique.

Les matrices de a et B, cas où les deux formes sont non dégénérées.

Définition 11 *Soit E un espace vectoriel de dimension k sur $\mathbb{K}$ muni d'une forme bilinéaire non dégénérée, symétrique ou antisymétrique et d'un automorphisme semi-simple S de valeurs propres non nulles λ et $-\lambda$, a-antiautoadjoint. Par la proposition 8 page 79, $k=2d$, $\ker(S-\lambda\,\mathrm{Id})$ et $\ker(S+\lambda\,\mathrm{Id})$ sont totalement isotropes de dimension l ; on appelle alors base adaptée à (E,a,S) une base quelconque de $\ker(S-\lambda\,\mathrm{Id})$, complétée par une base de $\ker(S+\lambda\,\mathrm{Id})$ qui lui est :*

- *duale si a est symétrique,*
- *antiduale si a est antisymétrique.*

Dans une telle base :

$$\mathrm{Mat}(a) = J_d^{\pm}\begin{pmatrix} 0 & I_d \\ \pm I_d & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{Mat}(S) = \begin{pmatrix} \lambda I_d & 0 \\ 0 & -\lambda I_d \end{pmatrix},$$

avec J_d affecté d'un signe $+$ si a est symétrique, $-$ sinon. Par projection, ces bases sont en bijection avec les bases quelconques de $\ker S-\lambda\,\mathrm{Id}$.

Définition 12 *Soit E un espace vectoriel de dimension k sur $\mathbb{R}$ muni de deux formes bilinéaires non dégénérées a et b telles que a est symétrique et $b=a(\cdot,B\cdot)$ où B est un automorphisme a-antiautoadjoint de polynôme minimal $P=(X-\lambda)(X-\overline{\lambda})$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, de partie nilpotente T d'indice n. Soit $D=(D_{p,q})_{q\leq p\leq n}$ une décomposition de E adaptée à (a,T) et à $(a(\,\cdot,B\,\cdot\,),T)$ et $(\beta^k)_{k=0}^{n-1}$ un n-uplet de bases des $\check{E}_k$, adaptées à $(\check{b}^k,S)$ au sens de la définition 11 page 86.*

On leur associe canoniquement une base β de E, obtenue en relevant les β^k en bases des $D_{n,k+1}$ et en les propageant par T en bases de tous les $D_{p,q}$. On note $\mathcal{B}$ l'ensemble de ces bases, dites adaptées au triplet (E,a,B) ou au triplet (E,a,b).

Remarque : une telle base est aussi, à l'ordre près des vecteurs, une base $\beta=(\beta^+,\beta^-)$, où :

- β^+ est une base de Jordan de $T_{|E^+}$, où $E^+=\ker(B-\lambda\,\mathrm{Id})$,
- β^- est une base de $E^-=\ker(B+\lambda\,\mathrm{Id})$, duale de β^+ si a est symétrique, antiduale si a est antisymétrique.

Enfin, et comme dans le cas où a et b sont de même nature, si $D=(D_{p,q})_{q\leq p\leq n}$ est une décomposition adaptée à (a,T) et à $(a(\,\cdot,S\,\cdot\,),T)$ et β une base adaptée construite à partir de cette décomposition, on pose $D_k = \overset{k-1}{\underset{i=0}{\oplus}} T^i(D_{n,k})$. On note $\beta_{n,k}$ la sous-famille de β qui est une base de $D_{n,k}$; les $T^i(\beta_{n,k})$ sont bases des $T^i(D_{n,k})$ et on note $\beta_k = (T^{k-1}(\beta_{n,k}),\ldots,T(\beta_{n,k}),\beta_{n,k})$. Alors :

- chaque $\beta_k=(T^{k-1}(\beta_{n,k}),\ldots,T(\beta_{n,k}),\beta_{n,k})$ est une base de D_k,
- $E = \overset{\perp}{\underset{1\leq k\leq n}{\oplus}} D_k$ et les D_k sont stables par B.

Il suffit donc de donner les matrices de a et B dans les β_k. Rappelons que $d_k=\dim\check{E}_k^+ =$

$\dim D^+_{n,k+1} = \frac{1}{2}\dim D_{n,k+1}$. Dans β_{k+1} :

$$\mathrm{Mat}_{\beta_{k+1}}(a_{|D_{k+1}}) = \begin{pmatrix} & & & & \pm J^{\pm}_{d_k} \\ & & & \cdot & \\ & & \cdot & & \\ & +J^{\pm}_{d_k} & & & \\ -J^{\pm}_{d_k} & & & & \\ +J^{\pm}_{d_k} & & & & \end{pmatrix}, \text{ où } J^{\pm}_d = \begin{pmatrix} 0 & I_d \\ \pm I_d & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2d}(\mathbb{K}),$$

avec des J^+ si k est pair, des J^- sinon. Les blocs $J^{\pm}_{d_k}$ sont affectés de signes alternativement $+$ et $-$; en effet, le bloc inférieur gauche est la matrice des $a(x,y)$ avec $x \in D_{n,k+1}$ et $y \in D_{n-k,1}$, donc des $a(x,T^k(z))$ pour $x,z \in D_{n,k+1}$. Ce bloc est donc la matrice $\mathrm{Mat}_{\beta^k}(\check{b}^k) = J^{\pm}_{d_k}$. Le bloc suivant est la matrice des $a(x,y)$ avec $x \in D_{n-1,k}$ et $y \in D_{n-k+1,2}$, donc des $a(T(x),T^{k-1}(z)) = -a(x,T^k(z))$ pour $x,z \in D_{n,k+1}$. Il apparaît donc un bloc $-J^{\pm}_{d_k}$. De cette façon, le signe des blocs est alterné. On vérifie en outre que a est symétrique :

- Si k est pair, on a affaire à des blocs $\pm J^+_{d_k}$. La matrice de a comporte par ailleurs un nombre impair de ces blocs (un seul si $k = 0$) donc, deux blocs $\pm J^+_{d_k}$ échangés par transposition dans cette matrice sont affectés du même signe. Il faut donc vérifier : ${}^tJ^+_{d_k} = J^+_{d_k}$. C'est le cas, $J^+_{d_k}$ est la matrices de $\check{b}_k$, symétrique.

- Inversement, si k est impair, on a affaire à des blocs $\pm J^-_{d_k}$; la matrice de a comporte un nombre pair de ces blocs donc deux blocs $\pm J^+_{d_k}$ échangés par transposition sont affectés d'un signe opposé. Il faut donc vérifier : ${}^tJ^+_{d_k} = -J^+_{d_k}$. C'est le cas car $\check{b}_k$ est antisymétrique.

Pour finir :

$$\mathrm{Mat}_{\beta_{k+1}}(B_{|D_{k+1}}) = \begin{pmatrix} \lambda I_{d_k,d_k} & I_{2d_k} & & \\ & \lambda I_{d_k,d_k} & \ddots & \\ & & \ddots & I_{2d_k} \\ & & & \lambda I_{d_k,d_k} \end{pmatrix}.$$

III.3 Quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

III.3.1 Préliminaire

Sur quel espace effectuer l'étude? E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, soit $E^{\mathbb{C}}$ son complexifié. D'après la proposition 8 page 79 :

$$E^{\mathbb{C}} = \overset{\perp}{\underset{0\leq i\leq k}{\oplus}} E^{\mathbb{C}}_i = \overset{\perp}{\underset{\{\lambda,-\lambda\}\subset\mathcal{S}}{\oplus}} E^{\mathbb{C}}(\{\lambda, -\lambda\})$$

où la première expression reprend les notations de la proposition 1 page 49, où $\mathcal{S}$ est le spectre de B, où $E^{\mathbb{C}}(\{\lambda, -\lambda\}) = E^{\mathbb{C}}_i = \ker(S^{\mathbb{C}} - \lambda_i \mathrm{Id}_{E^{\mathbb{C}}})(S^{\mathbb{C}} + \lambda_i \mathrm{Id}_{E^{\mathbb{C}}})$ si $\lambda \neq 0$ et $\{\lambda, -\lambda\} = \{\lambda_i, -\lambda_i\}$ et où $E^{\mathbb{C}}(\{0\}) = E^{\mathbb{C}}_0 = \ker S^{\mathbb{C}}$. La somme est a- et b-orthogonale. Cette décomposition est la plus fine possible avec cette propriété. La décomposition la plus fine de E espace réel est donc :

$$E = E(\{0\}) \overset{\perp}{\oplus} \left(\underset{\{\lambda,-\lambda\}\subset\mathcal{S} \text{ et } \lambda\in\mathbb{R}^*}{\overset{\perp}{\oplus}} E(\{\lambda,-\lambda\}) \right) \overset{\perp}{\oplus} \left(\underset{\{\lambda,\overline{\lambda}\}\subset\mathcal{S} \text{ et } \lambda\in i\mathbb{R}^*}{\overset{\perp}{\oplus}} E(\{\lambda,\overline{\lambda}\}) \right)$$
$$\overset{\perp}{\oplus} \left(\underset{\{\lambda,-\lambda,\overline{\lambda},-\overline{\lambda}\}\subset\mathcal{S} \text{ et } \lambda\notin\mathbb{R}\cup i\mathbb{R}}{\overset{\perp}{\oplus}} E(\{\lambda,-\lambda,\overline{\lambda},-\overline{\lambda}\}) \right)$$

où :

- si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $E(\{\lambda,-\lambda\}) = \ker(S-\lambda\,\mathrm{Id})(S+\lambda\,\mathrm{Id})$,
- si $\lambda \in i\mathbb{R}^*$, $E(\{\lambda,\overline{\lambda}\}) = \Re[\ker(S^{\mathbb{C}}-\lambda\,\mathrm{Id}_{E^{\mathbb{C}}})(S^{\mathbb{C}}-\overline{\lambda}\,\mathrm{Id}_{E^{\mathbb{C}}})]$,
- si $\lambda \notin \mathbb{R}\cup i\mathbb{R}$, $E(\{\lambda,-\lambda,\overline{\lambda},-\overline{\lambda}\}) = \Re[\ker(S^{\mathbb{C}}-\lambda\,\mathrm{Id}_{E^{\mathbb{C}}})(S^{\mathbb{C}}+\lambda\,\mathrm{Id}_{E^{\mathbb{C}}})(S^{\mathbb{C}}-\overline{\lambda}\,\mathrm{Id}_{E^{\mathbb{C}}})(S^{\mathbb{C}}+\overline{\lambda}\,\mathrm{Id}_{E^{\mathbb{C}}})]$.

On se restreint donc dans la suite à l'un de ces sous-espaces $E(\mathcal{E})$, où $\mathcal{E} \subset \mathcal{S}$; il sera noté E. μ le polynôme minimal de B est donc du type X, $(X-\lambda)(X+\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^* \cup i\mathbb{R}^*$ ou $(X-\lambda)(X+\lambda)(X-\overline{\lambda})(X+\overline{\lambda})$ avec $\lambda \notin \mathbb{R}^* \cup i\mathbb{R}^*$.

III.3.2 Structure et action de Ω

Théorème 6 *Cinq cas apparaissent :*

• *La forme symétrique est non dégénérée, l'autre est dégénérée*

On note alors a la forme symétrique, b l'antisymétrique, b est dégénérée, donc B a la valeur propre zéro et on est dans le cas $P = X$, $B = T$. Alors : Ω agit simplement transitivement sur $\mathcal{D} \times \prod_{k=0}^{n-1} \mathrm{Stab}(\check{E}_k,\check{b}_k)$, où $\mathcal{D}$ est l'ensemble des décompositions de E adaptées à (a,T). Plus précisément, Ω est isomorphe à un produit semi-direct $N \rtimes R$, où :

- $N = \{\gamma \in \Omega$ / l'action induite par γ sur chaque $\check{E}_k$ est triviale $\}$. *C'est un sous-groupe distingué de Ω, nilpotent d'indice $\leq 2n-1$, qui agit simplement transitivement sur $\mathcal{D}$,*
- $R = \Omega/N$ *agit simplement transitivement sur* $\prod_{k=0}^{n-1} \mathrm{Stab}(\check{E}_k,\check{b}_k) \simeq \left(\prod_{\substack{0\leq k<n \\ k \text{ pair}}} O_{r_k,s_k}(\mathbb{K})\right) \times \left(\prod_{0\leq k<n,\, k \text{ impair}} Sp_{d_k}(\mathbb{K})\right)$ *où $d_k = \dim \check{E}_k$ et où (r_k,s_k), avec k pair, est la signature de $\check{b}^k$ bilinéaire symétrique sur $\widetilde{E}_k$. Les d_k avec k impair sont des entiers pairs. En particulier $R \simeq \left(\prod_{\substack{0\leq k<n \\ k \text{ pair}}} O_{r_k,s_k}(\mathbb{K})\right) \times \left(\prod_{\substack{0\leq k<n \\ k \text{ impair}}} Sp_{d_k}(\mathbb{K})\right)$. R est réductif.*

Les invariants de la situation, c'est-à-dire du couple (a,b), sont donc n l'indice de nilpotence de T, les $(r_k,s_k)_{k=0,\ k \text{ pair}}^{n-1}$ et les $(d_k)_{k=0,\ k \text{ impair}}^{n-1}$.

• *La forme antisymétrique est non dégénérée, l'autre est dégénérée*

On note alors a la forme antisymétrique, b la symétrique, b est dégénérée, donc à nouveau $P = X$, $B = T$ et le même résultat est vérifié : Ω agit simplement transitivement sur $\mathcal{D} \times \prod_{k=0}^{n-1} \mathrm{Stab}(\check{E}_k,\check{b}_k)$, où $\mathcal{D}$ est l'ensemble des décompositions de E adaptées à (a,T). Plus précisément, Ω est isomorphe à un produit semi-direct $N \rtimes R$, où :

- $N = \{\gamma \in \Omega$ / l'action induite par γ sur chaque $\check{E}_k$ est triviale $\}$. *C'est un sous-groupe distingué de Ω, nilpotent d'indice $\leq 2n-1$, qui agit simplement transitivement sur $\mathcal{D}$,*
- $R = \Omega/N$ *agit simplement transitivement sur* $\prod_{k=0}^{n-1} \mathrm{Stab}(\check{E}_k,\check{b}_k) \simeq \left(\prod_{\substack{0\leq k<n \\ k \text{ pair}}} Sp_{d_k}(\mathbb{K})\right) \times$

$\left(\prod_{\substack{0\leq k<n\\ k \text{ impair}}} O_{r_k,s_k}(\mathbb{K})\right)$ *où* $d_k = \dim \check{E}_k$ *et où* (r_k,s_k)*, avec* k *pair, est la signature de* $\check{b}^k$ *bilinéaire symétrique sur* $\check{E}_k$ *. Les* d_k *avec* k *impair sont des entiers pairs. En particulier* $R \simeq \left(\prod_{\substack{0\leq k<n\\ k \text{ pair}}} Sp_{d_k}(\mathbb{K})\right) \times \left(\prod_{\substack{0\leq k<n\\ k \text{ impair}}} O_{r_k,s_k}(\mathbb{K})\right)$*. R est réductif.*

Les invariants de la situation, c'est-à-dire du couple (a,b)*, sont donc* n *l'indice de nilpotence de* T*, les* $(r_k,s_k)_{k=0,\ k \text{ impair}}^{n-1}$ *et les* $(d_k)_{k=0,\ k \text{ pair}}^{n-1}$*.*

• *Les deux formes sont non dégénérées*

On choisit alors de prendre pour a *la forme symétrique, pour* b *l'antisymétrique.* b *est non dégénérée, donc* E *peut être de trois types.*

a) $E = E(\{\lambda, -\lambda\})$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$

P *est du type* $(X-\lambda)(X+\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$*. La situation est exactement la même que dans le cas algébriquement clos,* $\mathbb{R}$ *remplaçant* $\mathbb{K}$*.* Ω *agit fidèlement sur* $E^+ = \ker(B-\lambda\,\mathrm{Id})^n$*, cette restriction* ρ *est donc un isomorphisme de* Ω *sur* $\Omega^+ = \rho(\Omega) \subset GL(E^+)$*.* $\Omega^+ = Z(T_{|E^+})$ *est le commutant de* T*,* i.e. *:* $\Omega^+ = \{\gamma \in GL(E^+) \ / \ \gamma T = T\gamma\}$*. Donc,* Ω *est isomorphe au commutant d'un endomorphisme nilpotent de* E^+*.*

b) $E = E(\{\lambda,\overline{\lambda}\})$, $\lambda \in i\mathbb{R}^*$

Ω *agit sur* $E' = \ker(S^{\mathbb{C}} - \lambda\,\mathrm{Id}_{E^{\mathbb{C}}})$*, espace* $T^{\mathbb{C}}$*-stable muni de la forme sesquilinéaire non dégénérée* $\underline{a}$: $z_1,z_2 \mapsto a(z_1,\overline{z_2})$*. En notant* $\mathcal{D}'$ *l'ensemble des décompositions de* E' *adaptées à* $(\underline{a},T)$*,* Ω *agit simplement transitivement sur* $\mathcal{D}' \times \prod_{k=0}^{n-1} U(\check{E}',\check{\underline{b}}_k)$ *où* $\check{\underline{b}}_k$ *est une forme sesquilinéaire non dégénérée sur* $\check{E}'_k$*, canoniquement associée à* $\check{b}_k$*, bilinéaire non dégénérée sur* $\check{E}_k$*. Plus précisément,* $\Omega \simeq N \rtimes R$*, où :*

- $N = \{\gamma \in \Omega \ / \ \text{l'action induite par } \gamma \text{ sur chaque } \check{E}'_k \text{ est triviale }\}$*. C'est un sous-groupe distingué de* Ω*, nilpotent d'indice* $\leq 2n-1$*, qui agit simplement transitivement sur* $\mathcal{D}'$*,*
- $R = \Omega/N$ *agit simplement transitivement sur* $\prod_{k=0}^{n-1} U(\check{E}',\check{\underline{b}}_k) \simeq \prod_{k=0}^{n-1} U_{r_k,s_k}$ *où* (r_k,s_k) *est la signature de* $\check{\underline{b}}_k$ *sur* $\check{E}'$ *;* $r_k + s_k = d_k = \dim \check{E}'_k$*. En particulier* $R \simeq \prod_{k=0}^{n-1} U_{r_k,s_k}$*. R est réductif.*

c) $E = E(\{\lambda, -\lambda, \overline{\lambda}, -\overline{\lambda}\})$, $\lambda \notin \mathbb{R}^* \cup i\mathbb{R}^*$

P *est du type* $(X-\lambda)(X+\lambda)(X-\overline{\lambda})(X+\overline{\lambda})$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$*. La situation est similaire à celle du cas algébriquement clos. Comme en* **a)***,* Ω *agit fidèlement sur* $E^+ = \ker(B^{\mathbb{C}} - \lambda\,\mathrm{Id}_{E^{\mathbb{C}}})^n$*, cette restriction* ρ *est un isomorphisme de* Ω *sur* $\Omega^+ = \rho(\Omega) \subset GL(E^+)$*. Or,* $\Omega^+ = Z(T_{|E^+})$ *est le commutant de* T*,* i.e. *:* $\Omega^+ = \{\gamma \in GL(E^+) \ / \ \gamma T = T\gamma\}$*. Donc* Ω *est isomorphe au commutant d'un endomorphisme nilpotent de* E^+*.*

Remarque : Dans les cas **a)** et **c)**, on peut détailler l'action de $\Omega \simeq Z(T_{|E^+})$ sur E^+. Notons $\mathcal{D}^+$ l'ensemble des décompositions adaptées de $(E^+,T_{|E^+})$. Alors Ω est isomorphe à un produit semi-direct $N \rtimes G$, où :

• $N = \{\gamma \in \Omega \ / \ \text{l'action induite par } \gamma \text{ sur chaque } \check{E}_k^+ \text{ est triviale }\}$. C'est un sous-groupe distingué de Ω, nilpotent d'indice $\leq 2n-1$, qui agit simplement transitivement sur $\mathcal{D}^+$,

• $G = \Omega/N$ agit simplement transitivement sur $\prod_{k=0}^{n-1} GL(\check{E}_k^+)$. En notant $d_k = \dim \check{E}_k^+$:

- dans le cas **a)**, G agit simplement transitivement sur $\prod_{k=0}^{n-1} GL_{d_k}(\mathbb{R})$,
- dans le cas **c)**, G agit simplement transitivement sur $\prod_{k=0}^{n-1} GL_{d_k}(\mathbb{C})$.

Les invariants de la situation sont donc dans les deux cas les d_k, invariants de Jordan de T sur E^+.

Démonstration :

• Les trois premiers cas, où la ou les valeurs propres de B sont réelles

La situation est la même que dans le cas algébriquement clos, et la démonstration identique à celle du théorème 5 page 80. Seuls les deux premiers cas diffèrent légèrement : les groupes orthogonaux qui apparaissent sont désormais affectés d'une signature (r_k,s_k). Quand la forme dégénérée est la forme antisymétrique, c'est le cas pour les $O(\check{E}_k,\check{b}_k)$, k pair, et quand la forme dégénérée est la forme symétrique, pour les $O(\check{E}_k,\check{b}_k)$, k impair.

• Le cas où les valeurs propres sont imaginaires pures $\neq 0$: E du type $E(\{\lambda,\overline{\lambda}\})$, $\lambda \in i\mathbb{R}^*$

Ici, $\overline{E'} = \overline{\ker(S^{\mathbb{C}} - \lambda \operatorname{Id}_{E^{\mathbb{C}}})} = \ker(S^{\mathbb{C}} - \overline{\lambda} \operatorname{Id}_{E^{\mathbb{C}}}) = \ker(S^{\mathbb{C}} + \lambda \operatorname{Id}_{E^{\mathbb{C}}})$ donc, par la proposition 8 page79 : E est a-non dégénéré et : $E^{\mathbb{C}} = E' \oplus \overline{E'}$, chaque facteur de la somme étant a-totalement isotrope. La forme sesquilinéaire $\underline{a}\ : z_1,z_2 \mapsto a(z_1,\overline{z_2})$ est donc non dégénérée sur E'. Ω stabilise E' et son action y commute avec $T^{\mathbb{C}}$; elle commute aussi avec la conjugaison complexe, donc preserve $\underline{a}$. Réciproquement, si $\gamma \in U(E',\underline{a})$ commute avec $T^{\mathbb{C}}$ et avec la conjugaison complexe — c'est-à-dire stabilise $\Re E'$ —, il agit alors sur $E = E' \oplus \overline{E'}$, commute avec $T^{\mathbb{C}}$ et préserve a, donc est dans Ω (Ω a une action diagonale sur $E' \oplus \overline{E'}$). La représentation de Ω dans $U(E',\underline{a})$ est donc fidèle et $\Omega \simeq U(E',\underline{a}) \cap U(E',\underline{a}(\cdot,T^{\mathbb{C}}_{|E'}\cdot))$. On obtient alors le résultat par application du théorème 4 page 68 à $(E',\underline{a},T^{\mathbb{C}}_{|E'})$.

• Le cas où les valeurs propres sont ailleurs : E du type $E(\{\lambda,-\lambda,\overline{\lambda},-\overline{\lambda}\})$, $\lambda \notin \mathbb{R}^* \cup i\mathbb{R}^*$

Notons $E^{\pm} = \ker(S^{\mathbb{C}} \mp \lambda \operatorname{Id}_{E^{\mathbb{C}}})$; alors $\overline{E^{\pm}} = \ker(S^{C} \mp \overline{\lambda} \operatorname{Id}_{E^{\mathbb{C}}})$ et $E = E^+ \oplus E^- \oplus \overline{E^+} \oplus \overline{E^-}$ car $\lambda \notin \mathbb{R}^* \cup i\mathbb{R}^*$. Par la proposition 8 page 79, a est non dégénérée sur $E^+ \oplus E^-$ et Ω agit sur cet espace. Comme l'action de Ω commute avec la conjugaison complexe, sa restriction à $E^+ \oplus E^-$ est fidèle . Notons $\sharp$ et $\flat$ les deux isomorphismes réciproques induits par a entre $(E^+)^*$ et E^-. On montre alors, comme on l'a fait pour le théorème 5 page 80, que : $\gamma \in \Omega$ *ssi* $\gamma = (\gamma^+,\gamma^-)$ où :

- $\gamma^+ \in GL(E^+)$ commute avec $T^{\mathbb{C}}_{|E^+}$,
- $\gamma^- = \sharp \circ {}^t(\gamma^+)^{-1} \circ \flat \in GL(E^-)$.

De nouveau donc, la restriction de l'action de Ω à E^+ est fidèle et Ω agit comme le centralisateur de $T_{|E^+}$ □

Dans les trois derniers cas, on a décomposé l'action de Ω sur un sous espace de E ou de $E^{\mathbb{C}}$. On peut en déduire la façon dont Ω agit sur E.

Corollaire 4

Si E est du type $E(\{\lambda,-\lambda\})$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, la situation est la même que dans le cas algébriquement clos. L'ensemble $\mathcal{D}$ des décompositions de E adaptées simultanément à (a,T) et à $(a(\cdot,S\cdot),T)$ est aussi l'ensemble des décompositions adaptées à (a,T) et stables par S. Il est canoniquement en bijection avec $\mathcal{D}^+$: si $D = (D_{p,q})_{q\leq p\leq n} \in \mathcal{D}$, $D^+ = (D_{p,q} \cap E^+)_{q\leq p\leq n} \in \mathcal{D}^+$. L'application réciproque est : $D^+ \mapsto \widetilde{D}$, où $\widetilde{D} = (\widetilde{D}_{p,q})_{q\leq p\leq n} = (D^+_{p,q} \oplus D^-_{p,q})_{q\leq p\leq n}$ avec $(D^-_{p,q})_{q\leq p\leq n} = ((D^+)^{*\sharp}_{n+1-q,n+1-p})_{q\leq p\leq n}$. De plus :

- *L'action de N sur $\mathcal{D}^+$ commute avec cette bijection. Donc : $N = \{\gamma \in \Omega$ / l'action induite par γ sur chaque $\check{E}_k$ est triviale $\}$ et N agit simplement transitivement sur $\mathcal{D}$.*

• $G = \Omega/N$ *agit simplement transitivement sur* $\prod_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{Stab}(\check{E}_k,\check{b}^k) \cap \mathrm{Stab}(\check{E}_k,\check{b}^k(\,\cdot\,,S\,\cdot\,))\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{Stab}(\check{E}_k,\check{b}^k) \cap Z(S)\right) \simeq \prod_{k=0}^{n-1} GL_{d_k}(\mathbb{R})$.

Si E est du type $E(\{\lambda,\overline{\lambda}\})$, $\lambda \in i\mathbb{R}^*$, l'ensemble $\mathcal{D}$ des décompositions de l'espace réel *E adaptées simultanément à (a,T) et à $(a(\,\cdot\,,S\,\cdot\,),T)$ est aussi l'ensemble des décompositions de E adaptées à (a,T) et stables par S. $\mathcal{D}$ est canoniquement en bijection avec $\mathcal{D}'$: Si $D \in \mathcal{D}$, si $D^{\mathbb{C}}$ est sa complexifiée, $D' = (E' \cap D^{\mathbb{C}})_{p,q})_{q\leq p\leq n}$ est une décomposition de E' adaptée à $(\underline{a},T)$. L'application réciproque est: $D' \mapsto \widetilde{D} = (\widetilde{D}_{p,q})_{q\leq p\leq n} = (\Re(D'_{p,q} \oplus \overline{D'_{p,q}}))_{q\leq p\leq n}$. Alors :*

• *L'action de N sur $\mathcal{D}^+$ commute avec cette bijection. Donc: $N = \{\gamma \in \Omega$ / l'action induite par γ sur chaque $\check{E}_k$ est triviale $\}$ et N agit simplement transitivement sur $\mathcal{D}$.*

• *R agit simplement transitivement sur* $\prod_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{Stab}(\check{E}_k,\check{b}^k) \cap \mathrm{Stab}(\check{E}_k,\check{b}^k(\,\cdot\,,S\,\cdot\,))\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{Stab}(\check{E}_k,\check{b}^k) \cap Z(S)\right) \simeq \prod_{k=0}^{n-1} U(\check{E}'_k,\check{\underline{b}}_k) \simeq \prod_{k=0}^{n-1} U_{r_k,s_k}(\mathbb{C})$.

Si E est du type $E(\{\lambda,-\lambda,\overline{\lambda},-\overline{\lambda}\})$, $\lambda \notin \mathbb{R}^* \cup i\mathbb{R}^*$, l'ensemble $\mathcal{D}$ des décompositions de l'espace réel *E adaptées simultanément à (a,T) et à $(a(\,\cdot\,,S\,\cdot\,),T)$ est aussi l'ensemble des décompositions adaptées à (a,T) et stables par S. Il est canoniquement en bijection avec $\mathcal{D}^+$: si $D = (D_{p,q})_{q\leq p\leq n} \in \mathcal{D}$, $D^+ = (D^{\mathbb{C}}_{p,q} \cap E^+)_{q\leq p\leq n} \in \mathcal{D}^+$. L'application réciproque est: $D^+ \mapsto \widetilde{D}$, où $\widetilde{D} = (\widetilde{D}_{p,q})_{q\leq p\leq n} = (\Re(D^+_{p,q} \oplus D^-_{p,q} \oplus \overline{D^+_{p,q}} \oplus \overline{D^-_{p,q}}))_{q\leq p\leq n}$ avec $(D^-_{p,q})_{q\leq p\leq n} = ((D^+)^{*\sharp}_{n+1-q,n+1-p})_{q\leq p\leq n}$. De plus :*

• *N agit simplement transitivement sur $\mathcal{D}$,*

• *G agit simplement transitivement sur* $\prod_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{Stab}(\check{E}_k,\check{b}^k) \cap \mathrm{Stab}(\check{E}_k,\check{b}^k(\,\cdot\,,S\,\cdot\,))\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{Stab}(\check{E}_k,\check{b}^k) \cap Z(S)\right) \simeq \prod_{k=0}^{n-1} GL(\check{E}^+_k) \simeq \prod_{k=0}^{n-1} GL_{d_k}(\mathbb{C})$.

Dans le premier et le dernier cas, les invariants de la situation sont les d_k, invariants de Jordan de $T_{|E^+}$. Le deuxième cas est plus complexe, les invariants sont les (r_k,s_k), signatures des $\hat{b}^k$ sur les $\hat{E}_k$.

Démonstration : Le premier cas est identique au cas algébriquement clos, les deux autres très similaires: on reproduit dans tous les cas le raisonnement du corollaire 3 page 81.

III.3.3 Les bonnes bases

On peut à présent définir les bases adaptées à chaque situation, bases sur lesquelles, par construction, Ω agit simplement transitivement.

Les matrices de a et B, cas où la forme symétrique est non dégénérée et pas l'autre.

Définition 13 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni de deux formes bilinéaires a et b, telles que a est symétrique non dégénérée et que $b = a(\,\cdot\,,T\,\cdot\,)$ avec T nilpotent a-antiautoadjoint. On définit les bases adaptées à (E,a,T), ou (E,a,b) de la même façon que dans le cas complexe (*cf.* def. 10 page 85). Cette fois cependant, les bases β^k des $\check{E}_k$, k impair, sont $\check{b}^k$-*pseudo-*orthonormées, de signature (r_k,s_k).*

On reprend les objets et notations de la section III.1. $E = \overset{\perp}{\oplus} D_k$, $T(D_k) \subset D_k$. La matrice de $a_{|D_{k+1}}$ dans β_{k+1} est une matrices-blocs de taille $k+1$. Si k est pair :

$$\mathrm{Mat}_{\beta_{k+1}}(a_{|D_{k+1}}) = \begin{pmatrix} & & & & & +I_{r_k,s_k} \\ & & & & \cdot & \\ & & & \cdot & & \\ & & \cdot & & & \\ & +I_{r_k,s_k} & & & & \\ -I_{r_k,s_k} & & & & & \\ +I_{r_k,s_k} & & & & & \end{pmatrix},$$

$$\text{si } k \text{ est impair, } d_k \text{ est pair et : } \mathrm{Mat}_{\beta_{k+1}}(a_{|D_{k+1}}) = \begin{pmatrix} & & & & & -J^-_{d_k/2} \\ & & & & \cdot & \\ & & & \cdot & & \\ & & \cdot & & & \\ & +J^-_{d_k/2} & & & & \\ -J^-_{d_k/2} & & & & & \\ +J^-_{d_k/2} & & & & & \end{pmatrix},$$

et on vérifie encore que la matrice de a est symétrique. Dans tous les cas, $B = T$ et :

$$\mathrm{Mat}_{\beta_{k+1}}(B_{|D_{k+1}}) = \begin{pmatrix} 0 & I_{d_k} & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & I_{d_k} \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Les matrices de a et B, cas où la forme antisymétrique est non dégénérée et pas l'autre. Les bases adaptées se construisent de la même façon. La matrice de a est la même, à ceci près que les blocs $\pm I_{r_k,s_k}$ apparaissent quand k est impair et les blocs $\pm J^-_{d_k/2}$ quand k est pair. Cette fois, la matrice de a est donc antisymétrique. La matrices de $B = T$ est inchangée.

Les matrices de a et B, cas où E est du type $E(\{\lambda, -\lambda\})$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Les bases adaptées se définissent comme dans le cas algébriquement clos et les matrices sont les mêmes.

Les matrices de a et B, cas où E est du type $E(\{\lambda, \overline{\lambda}\})$, $\lambda \in i\mathbb{R}^*$.

Définition 14 *Soit E un espace vectoriel de dimension k sur $\mathbb{R}$ muni d'une forme bilinéaire non dégénérée a, symétrique ou antisymétrique et d'un automorphisme semi-simple S de valeurs propres imaginaires pures non nulles λ et $\overline{\lambda}$, a-antiautoadjoint. Par la proposition 8page 79, k est pair, on notera $k = 2d$. Une base β de E sera dite adaptée à (a,S) si :*

$$\beta = ((x_j)_{j=1}^d,(y_j)_{j=1}^d),\ \forall j, x_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_j + \overline{z_j}), y_j = \frac{1}{i\sqrt{2}}(-z_j + \overline{z_j}),$$

où $(z_j)_{j=1}^d$ est une base complexe de $\ker(S^{\mathbb{C}} - \lambda\,\mathrm{Id}_{E^{\mathbb{C}}}) \subset E^{\mathbb{C}}$, pseudo-orthonormée pour la forme sesquilinéaire non dégénérée $\underline{a}$, définie par : $\underline{a} = a(\cdot,\overline{\cdot})$ si a est symétrique et par : $\underline{a} = -ia(\cdot,\overline{\cdot})$ sinon. On note (r,s) la signature de $\underline{a}$; $r + s = d$.

Dans la base $((z_j)_{j=1}^d,(\overline{z_j})_{j=1}^d)$ de $E^{\mathbb{C}}$:

- si a est symétrique : $\mathrm{Mat}(\underline{a}) = \begin{pmatrix} I_{r,s} & 0 \\ 0 & I_{r,s} \end{pmatrix}$, $\mathrm{Mat}(a) = \begin{pmatrix} 0 & I_{r,s} \\ I_{r,s} & 0 \end{pmatrix}$,
- si a est antisymétrique : $\mathrm{Mat}(\underline{a}) = \begin{pmatrix} I_{r,s} & 0 \\ 0 & -I_{r,s} \end{pmatrix}$, $\mathrm{Mat}(a) = \begin{pmatrix} 0 & iI_{r,s} \\ -iI_{r,s} & 0 \end{pmatrix}$,
- dans tous les cas : $\mathrm{Mat}(S) = \begin{pmatrix} \lambda I_d & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} I_d \end{pmatrix}$.

Dans une base adaptée β de E :

$$\mathrm{Mat}(a) = \begin{pmatrix} I_{r,s} & 0 \\ 0 & I_{r,s} \end{pmatrix} \text{ si } a \text{ est symétrique, } \mathrm{Mat}(a) = \begin{pmatrix} 0 & I_{r,s} \\ -I_{r,s} & 0 \end{pmatrix} \text{ sinon et :}$$

$$\mathrm{Mat}(S) = \Lambda_d = \begin{pmatrix} 0 & -\nu I_d \\ \nu I_d & 0 \end{pmatrix}, \text{ où } \lambda = i\nu,\ \nu \in \mathbb{R}^*.$$

Définition 15 *Soit E un espace vectoriel de dimension k sur $\mathbb{R}$ muni de deux formes bilinéaires non dégénérées a et b telles que a est symétrique et $b = a(\cdot,B\cdot)$ où B est un automorphisme a-antiautoadjoint de polynôme minimal $P = (X-\lambda)(X-\overline{\lambda})$, $\lambda \in i\mathbb{R}$, de partie nilpotente T d'indice n. Soit $D = (D_{p,q})_{q \leq p \leq n}$ une décomposition de E adaptée à (a,T) et à $(a(\cdot,B\cdot),T)$ et $(\beta^k)_{k=0}^{n-1}$ un n-uplet de bases des $\breve{E}_k$, adaptées à $(\breve{b}^k,S)$ au sens de la définition 14 page 92.*

On leur associe canoniquement une base β de E, obtenue en relevant les β^k en bases des $D_{n,k+1}$ et en les propageant par T en bases de tous les $D_{p,q}$. On note $\mathcal{B}$ l'ensemble de ces bases, dites adaptées au triplet (E,a,B) ou au triplet (E,a,b).

Soit $D = (D_{p,q})_{q \leq p \leq n}$ une décomposition de E adaptée à (a,T) et à $(a(\cdot,B\cdot),T)$; on considère alors la décomposition habituelle de E : $E = \overset{\perp}{\oplus}_k D_k$. Les D_k sont stables par B. On choisit β une base adaptée à (E,a,b), elle fournit par restriction une base β_k de chaque D_k. Rappel : ici $d_k = \dim \breve{E}_k^+ = \frac{1}{2}\dim D_{k+1}$. Dans β_{k+1}, la matrice de a est une matrice-blocs de taille $k+1$. Si k est pair :

$$\mathrm{Mat}_{\beta_{k+1}}(a_{|D_{k+1}}) = \begin{pmatrix} & & & & +I_{r_k,s_k,r_k,s_k} \\ & & & \iddots & \\ & & +I_{r_k,s_k,r_k,s_k} & & \\ & -I_{r_k,s_k,r_k,s_k} & & & \\ +I_{r_k,s_k,r_k,s_k} & & & & \end{pmatrix}, \text{ où } I_{r,s,r,s} = \begin{pmatrix} I_{r,s} & 0 \\ 0 & I_{r,s} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2(r+s)}(\mathbb{K}).$$

Si k est impair :

$$\mathrm{Mat}_{\beta_{k+1}}(a_{|D_{k+1}}) = \begin{pmatrix} & & & & -J^-_{r_k,s_k} \\ & & & \iddots & \\ & & +J^-_{r_k,s_k} & & \\ & -J^-_{r_k,s_k} & & & \\ +J^-_{r_k,s_k} & & & & \end{pmatrix}, \text{ où } J^-_{r,s} = \begin{pmatrix} 0 & I_{r,s} \\ -I_{r,s} & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2(r+s)}(\mathbb{K}),$$

Les blocs $J^{\pm}_{d_k}$ sont affectés de signes alternativement + et − ; voir le raisonnement effectué page 87 en fin de section III.2. On vérifie de même que a est dans les deux cas symétrique. Enfin, quelle que soit la parité de k :

$$\mathrm{Mat}_{\beta_{k+1}}(B_{|D_{k+1}}) = \begin{pmatrix} \Lambda_{d_k} & I_{2d_k} & & \\ & \Lambda_{d_k} & \ddots & \\ & & \ddots & I_{2d_k} \\ & & & \Lambda_{d_k} \end{pmatrix} \text{ où } \Lambda_{d_k} = \begin{pmatrix} 0 & -\nu I_{d_k} \\ \nu I_{d_k} & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda = i\nu \in i\mathbb{R}^*.$$

Les matrices de a et B, cas où E est du type $E(\{\lambda,-\lambda,\overline{\lambda},-\overline{\lambda}\})$, $\lambda \notin \mathbb{R}^* \cup i\mathbb{R}^*$.

Définition 16 *Soit E un espace vectoriel de dimension k sur $\mathbb{R}$ muni d'une forme bilinéaire non dégénérée a, symétrique ou antisymétrique et d'un isomorphisme semi-simple S de valeurs propres ni réelles ni imaginaires pures $\pm\lambda$ et $\pm\overline{\lambda}$, a-antiautoadjoint. Nécessairement, k est multiple de 4, on notera $k = 4d$. Une base β de E sera dite adaptée à (a,S) si :*

$$\beta = ((x_i^+)_{i=1}^d,(y_i^+)_{i=1}^d,(x_i^-)_{i=1}^d,(y_i^-)_{i=1}^d),\ \forall i, x_i^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_i^{\pm} + \overline{z_i^{\pm}}), y_i^{\pm} = \frac{1}{i\sqrt{2}}(-z_i^{\pm} + \overline{z_i^{\pm}}),$$

où $(z_i^+)_{i=1}^d$ est une base de $\ker(S^{\mathbb{C}} - \lambda\,\mathrm{Id}_{E^{\mathbb{C}}}) \subset E^{\mathbb{C}}$ et où $(z_i^-)_{i=1}^d = ((z^+)_i^{*\sharp})_{i=1}^d$. $(z_i^-)_{i=1}^d$ est une base de $\ker(S^{\mathbb{C}} + \lambda\,\mathrm{Id}_{E^{\mathbb{C}}})$.

Dans la base $((z_i^+)_{i=1}^d,(\overline{z_i^+})_{i=1}^d,(z_i^-)_{i=1}^d,(\overline{z_i^-})_{i=1}^d)$ de $E^{\mathbb{C}}$: $\mathrm{Mat}(a) = J^+_{2d}$ si a est symétrique, $\mathrm{Mat}(a) = J^-_{2d}$ si a est antisymétrique et :

$$\mathrm{Mat}(S) = \begin{pmatrix} \lambda I_d & & & \\ & \overline{\lambda} I_d & & \\ & & -\lambda I_d & \\ & & & -\overline{\lambda} I_d \end{pmatrix}$$

Dans une base adaptée β de E :

$$\mathrm{Mat}(a) = J^+_{d,d} = \begin{pmatrix} 0 & I_{d,d} \\ I_{d,d} & 0 \end{pmatrix} \text{ si } a \text{ est symétrique, } \mathrm{Mat}(a) = J^-_{d,d}\begin{pmatrix} 0 & I_{d,d} \\ -I_{d,d} & 0 \end{pmatrix} \text{ sinon et :}$$

$$\mathrm{Mat}(S) = \begin{pmatrix} \Lambda_d & 0 \\ 0 & -\Lambda_d \end{pmatrix}.$$

Définition 17 *Soit E un espace vectoriel de dimension k sur $\mathbb{R}$ muni de deux formes bilinéaires non dégénérées a et b telles que a est symétrique et $b = a(\cdot,B\cdot)$ où B est un automorphisme a-antiautoadjoint de polynôme minimal $P = (X-\lambda)(X-\overline{\lambda})(X+\lambda)(X+\overline{\lambda})$, $\lambda \in \mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}\cup i\mathbb{R})$, de partie nilpotente T d'indice n. Soit $D = (D_{p,q})_{q\le p\le n}$ une décomposition de E adaptée à (a,T) et à $(a(\cdot,B\cdot),T)$ et $(\beta^k)_{k=0}^{n-1}$ un n-uplet de bases des $\check{E}_k$, adaptées à $(\check{b}^k,S)$ au sens de la définition 16 page 94.*

On leur associe canoniquement une base β de E, obtenue en relevant les β^k en bases des $D_{n,k+1}$ et en les propageant par T en bases de tous les $D_{p,q}$. On note $\mathcal{B}$ l'ensemble de ces bases, dites adaptées au triplet (E,a,B) ou au triplet (E,a,b).

Dans une telle base, et encore avec les mêmes notations, $\mathrm{Mat}_{\beta_{k+1}}(a_{|D_{k+1}})$ est une matrice-blocs de taille $k+1$. Dans β_{k+1} :

$$\mathrm{Mat}_{\beta_{k+1}}(a_{|D_{k+1}}) = \begin{pmatrix} & & & & & \pm J^{\pm}_{d_k,d_k} \\ & & & & \cdot & \\ & & & \cdot & & \\ & & \cdot & & & \\ & & +J^{\pm}_{d_k,d_k} & & & \\ & -J^{\pm}_{d_k,d_k} & & & & \\ +J^{\pm}_{d_k,d_k} & & & & & \end{pmatrix},$$

avec des $J^{+}_{d_k,d_k}$ si k est pair, $J^{-}_{d_k,d_k}$ sinon. Quelle que soit la parité de k :

$$\mathrm{Mat}_{\beta_{k+1}}(B_{|D_{k+1}}) = \begin{pmatrix} L'_{d_k} & I_{4d_k} & & \\ & L'_{d_k} & \ddots & \\ & & \ddots & I_{4d_k} \\ & & & L'_{d_k}) \end{pmatrix}, \text{ où } L'_d = \begin{pmatrix} \Lambda_d & 0 \\ 0 & -\Lambda_d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4d}(\mathbb{R}).$$

La dimension de E est dans ce cas multiple de quatre.

Annexe : table des notations, table récapitulative des résultats

On récapitule ici la forme des matrices de a et de B dans les bases adaptées de chaque cas. On a placé ici aussi le rappel des notations utilisées pour certaines matrices apparaissant fréquemment. Commençons par une remarque.

Corollaire 5 (de la proposition 2 page 53 et des propositions 1 et 8 pages 49 et 79) *Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni de deux formes réflexives a et b, a étant non-dégénérée. On note B l'endomorphisme tel que : $b = a(\cdot, B\cdot)$ et on suppose que B admet une unique décomposition $B = S+N$ avec S semi-simple, N nilpotent, $SN = NS$. On note $\mu = \prod_i P_i^{n_i}$ le polynôme minimal de B, les P_i étant irréductibles, premiers entre eux deux à deux, et $\Omega = O(a) \cap O(b)$. Alors, les seuls sous-espaces non dégénérés de E, stables et non décomposables en somme directe a-orthogonale stable, sous l'action de Ω, sont :*

(i) *Si a et b sont de même nature : les sous-espaces caractéristiques $\ker P_i^{n_i}(B)$ de B.*

(ii) *Si a et b sont de nature opposée : les sous-espaces $\ker(P_i^{n_i}(B).P_i^{n_i}(-B))$. On rappelle que dans ce cas, $P(X)|\mu \Rightarrow P(-X)|\mu$.*

La somme directe, a- et b-orthogonale, de ces sous-espaces, est égale à V.

Remarque : Pour que tout endomorphisme B de $\mathrm{End}(E)$ admette une décomposition $B = S + N$ comme requis dans le lemme, il suffit que $\mathbb{K}$ soit parfait ; voir la remarque de la page 56. Si ce n'est pas le cas, le présent résultat s'applique à $\overline{\mathbb{K}}$ et $E \otimes_{\mathbb{K}} \overline{\mathbb{K}}$, où $\overline{\mathbb{K}}$ est la clôture algébrique de $\mathbb{K}$.

Démonstration : par les propositions 1 et 8, pour chacun des deux cas successivement énoncés, les espaces $\ker P_i^{n_i}(B)$ ou $\ker(P_i^{n_i}(B).P_i^{n_i}(-B))$ sont non dégénérés, stables. Par la proposition 2, leurs sous-espaces Ω-stables sont les $E_{p,q} = \mathrm{Im}\, T^{n_i-p} \cap \ker T^q$, qui sont dégénérés s'ils sont sous-espaces stricts, d'où le résultat. □

Remarque : Dans le cas **(ii)**, où a et b sont de nature opposée, et pour les indices i tels que $P_i(X) \neq P_i(-X)$ (*i.e.* les racines de P ne sont pas dans $i\mathbb{R}$; ce sont les dernier et avant-avant-dernier cas de la table 2), alors $\ker(P_i^{n_i}(B)P_i^{n_i}(-B))$ est décomposable (d'une unique façon) sous l'action de Ω :

$$\ker(P_i^{n_i}(B)P_i^{n_i}(-B)) = [\ker P_i^{n_i}(B)] \oplus [\ker P_i^{n_i}(-B)].$$

Cette somme n'est cependant pas a-orthogonale ; au contraire, chacun des deux sous-espaces stables est a-totalement isotrope.

Soit donc $\{a,b\}$ une paire de formes réflexives sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V, avec a non dégénérée, et $E \subset V$ un sous-espace non dégénéré, stable et indécomposable sous l'action de $\Omega = O(a) \cap O(b)$. Le polynôme minimal de B est noté P^n, avec P premier (cas (i) du corollaire et cas (ii) quand $P_i(X) = P_i(-X)$), ou $P = Q(X)Q(-X)$ et Q premier (cas (ii) du corollaire quand $P_i(X) \neq P_i(-X)$: on note $Q = P_i$). Enfin, on considère β une base de E adaptée à $\{a,b\}$.

Alors, dans $\boldsymbol{\beta}$:

• Mat(a) et Mat(B) sont diagonales par blocs, respectivement $(A_k)_{k=0}^{n-1}$ et $(B_k)_{k=0}^{n-1}$, blocs correspondant aux mêmes vecteurs de base de $\boldsymbol{\beta}$.

• Les matrices A_k et B_k sont elles-mêmes des matrices carrées de taille $(k+1)\delta_k$, où les δ_k sont des entiers, dans certains cas nécessairement pairs ou multiples de 4, et éventuellement nuls sauf si $k = n-1$. Plus précisément, les A_k et B_k sont des matrices formées de $(k+1)\times(k+1)$ blocs de taille δ_k. La forme de ces A_k et B_k est récapitulée, en utilisant cette décomposition en sous-blocs, et selon les différents cas possibles sur la paire $\{a,b\}$, dans la table 2.

Remarque : Les $(\delta_k)_{k=0}^{n-1}$ sont les dimensions des quotients $(\check{E}_k)_{k=0}^{n-1}$ définis page 53. Des dimensions d_k ont été introduites dans l'exposé ; selon les cas, $d_k = \dim \check{E}_k = \delta_k$, $d_k = \dim \check{E}'_k = \frac{1}{2}\dim \check{E}_k = \frac{1}{2}\delta_k$, $d_k = \dim \check{E}_k^+ = \dim \check{E}_k^- = \frac{1}{2}\dim \check{E}_k = \frac{1}{2}\delta_k$ ou enfin $d_k = \dim \check{E}_k^+ = \dim \check{E}_k^- = \dim \overline{\check{E}}_k^+ = \dim \overline{\check{E}}_k^- = \frac{1}{4}\dim \check{E}_k = \frac{1}{4}\delta_k$.

Enfin, la table 1 rappelle les notations employées pour les matrices usuelles du chapitre.

- $I_p \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$ est la matrice identité de taille p,
- $I_{r,s} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_s \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{r+s}(\mathbb{K})$,
- $I_{r,s,t,u} = \begin{pmatrix} I_{r,s} & 0 \\ 0 & I_{t,u} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{r+s+t+u}(\mathbb{K})$,
- $J_d^{\pm} = \begin{pmatrix} 0 & I_d \\ \pm I_d & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2d}(\mathbb{K})$,
- $J_{r,s}^{\pm} = \begin{pmatrix} 0 & I_{r,s} \\ \pm I_{r,s} & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2(r+s)}(\mathbb{K})$,
- si $\lambda = \mu + i\nu \in \mathbb{C}$, $(\mu,\nu) \in \mathbb{R}^2$, on note $\Lambda_p = \begin{pmatrix} \mu I_p & -\nu I_p \\ \nu I_p & \mu I_p \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2p}(\mathbb{R})$. $\overline{\Lambda}_p$ est de même la matrice associée à $\overline{\lambda} = \mu - i\nu$.
- si Λ_p est comme ci-dessus : $*\ L_p = \begin{pmatrix} \Lambda_p & 0 \\ 0 & \overline{\Lambda}_p \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4p}(\mathbb{R})$

  $*\ L'_p = \begin{pmatrix} \Lambda_p & 0 \\ 0 & -\Lambda_p \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4p}(\mathbb{R})$.

TABLE 1 – *Notation des matrices usuelles*

a et b symétriques, $\deg P = 1$	$A_k = \begin{pmatrix} & & & I_{r_k,s_k} \\ & & \cdot & \\ & \cdot & & \\ \cdot & & & \\ I_{r_k,s_k} & & & \end{pmatrix} \qquad B_k = \begin{pmatrix} \lambda I_{\delta_k} & I_{\delta_k} & & \\ & \lambda I_{\delta_k} & \ddots & \\ & & \ddots & I_{\delta_k} \\ & & & \lambda I_{\delta_k} \end{pmatrix}$

avec $r_k + s_k = \delta_k$ et avec $\lambda \in \mathbb{R}$ la racine de P.

a et b symétriques, $\deg P = 2$	$A_k = \begin{pmatrix} & & & J^+_{\delta_k/2} \\ & & \cdot & \\ & \cdot & & \\ \cdot & & & \\ J^+_{\delta_k/2} & & & \end{pmatrix} \qquad B_k = \begin{pmatrix} \Lambda_{\delta_k/2} & I_{\delta_k} & & \\ & \Lambda_{\delta_k/2} & \ddots & \\ & & \ddots & I_{\delta_k} \\ & & & \Lambda_{\delta_k/2} \end{pmatrix}$

avec pour tout k, δ_k pair et
$\Lambda_{\delta_k/2}$ une matrice correspondant à $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ une des racines de P (voir table 1).

a et b antisymétriques, $\deg P = 1$	$A_k = \begin{pmatrix} & & & J^-_{\delta_k/2} \\ & & \cdot & \\ & \cdot & & \\ \cdot & & & \\ J^-_{\delta_k/2} & & & \end{pmatrix} \qquad B_k = \begin{pmatrix} \lambda I_{\delta_k} & I_{\delta_k} & & \\ & \lambda I_{\delta_k} & \ddots & \\ & & \ddots & I_{\delta_k} \\ & & & \lambda I_{\delta_k} \end{pmatrix}$

avec pour tout k, δ_k pair et avec $\lambda \in \mathbb{R}$ la racine de P.

a et b antisymétriques, $\deg P = 2$	$A_k = \begin{pmatrix} & & & J^-_{\delta_k/2} \\ & & \cdot & \\ & \cdot & & \\ \cdot & & & \\ J^-_{\delta_k/2} & & & \end{pmatrix} \qquad B_k = \begin{pmatrix} L_{\delta_k/4} & I_{\delta_k} & & \\ & L_{\delta_k/4} & \ddots & \\ & & \ddots & I_{\delta_k} \\ & & & L_{\delta_k/4} \end{pmatrix}$

avec pour tout k, $\delta_k \equiv 0$ [4] et
$L_{\delta_k/4}$ une matrice correspondant à $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ une des racines de P (voir table 1).

a symétrique non dégénérée, b antisymétrique dégénérée (*i.e.* $P = X$)	Pour k pair : $A_k = \begin{pmatrix} & & & & & +I_{r_k,s_k} \\ & & & & \cdot & \\ & & & \cdot & & \\ & & \cdot & & & \\ & & +I_{r_k,s_k} & & & \\ & -I_{r_k,s_k} & & & & \\ +I_{r_k,s_k} & & & & & \end{pmatrix}$, pour k impair :

(Se poursuit page suivante)

TABLE 2 – *Forme des matrices de a et B dans les bases adaptées, cas réel — récapitulatif.*

$$A_k = \begin{pmatrix} &&&& -J^-_{\delta_k/2} \\ &&& \iddots & \\ && +J^-_{\delta_k/2} && \\ & -J^-_{\delta_k/2} &&& \\ +J^-_{\delta_k/2} &&&& \end{pmatrix} \quad \text{et pour tout } k :\ B_k = \begin{pmatrix} 0 & I_{\delta_k} & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & I_{\delta_k} \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

avec pour tout k impair, δ_k pair et pour tout k pair, $r_k + s_k = \delta_k$.

a antisymétrique non dégénérée, b symétrique dégénérée (*i.e.* $P = X$)	Mêmes matrices A_k et B_k que dans le cas précédent, les formes pour k pair et k impair étant interverties, et donc avec : pour tout k pair, δ_k pair et pour tout k impair, $r_k + s_k = \delta_k$.

a symétrique
b antisymétrique
$P = Q(X)Q(-X)$
$Q = X - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$

$$A_k = \begin{pmatrix} &&&& \pm J^{\pm}_{\delta_k/2} \\ &&& \iddots & \\ && +J^{\pm}_{\delta_k/2} && \\ & -J^{\pm}_{\delta_k/2} &&& \\ +J^{\pm}_{\delta_k/2} &&&& \end{pmatrix} \quad B_k = \begin{pmatrix} \lambda I_{\delta_k/2,\delta_k/2} & I_{\delta_k} & & \\ & \lambda I_{\delta_k/2,\delta_k/2} & \ddots & \\ & & \ddots & I_{\delta_k} \\ & & & \lambda I_{\delta_k/2,\delta_k/2} \end{pmatrix}$$

avec pour tout k, δ_k pair et avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ la racine de Q.

a symétrique
b antisymétrique
P premier,
donc ici type
$P = (X+\lambda)(X-\lambda)$,
$\lambda \in i\mathbb{R}^*$

Pour k pair : $A_k = \begin{pmatrix} &&&& +I_{r_k,s_k,r_k,s_k} \\ &&& \iddots & \\ && +I_{r_k,s_k,r_k,s_k} && \\ & -I_{r_k,s_k,r_k,s_k} &&& \\ +I_{r_k,s_k,r_k,s_k} &&&& \end{pmatrix}$, pour k impair :

$$A_k = \begin{pmatrix} &&&& -J^-_{r_k,s_k} \\ &&& \iddots & \\ && +J^-_{r_k,s_k} && \\ & -J^-_{r_k,s_k} &&& \\ +J^-_{r_k,s_k} &&&& \end{pmatrix} \quad \text{et pour tout } k :\ B_k = \begin{pmatrix} \Lambda_{\delta_k/2} & I_{\delta_k} & & \\ & \Lambda_{\delta_k/2} & \ddots & \\ & & \ddots & I_{\delta_k} \\ & & & \Lambda_{\delta_k/2} \end{pmatrix}$$

avec pour tout k, δ_k pair, pour k pair, $r_k + s_k = \delta_k/2$
et avec $\Lambda_{\delta_k/2}$ une matrice correspondant à $\lambda \in i\mathbb{R}^*$ une des racines de P (voir table 1)
(ici, si P est premier, ses racines sont nécessairement imaginaires pures).

(Se poursuit page suivante)

TABLE 2 – *Forme des matrices de a et B dans les bases adaptées, cas réel — récapitulatif.*

a symétrique b antisymétrique $P = Q(X)Q(-X)$ Q premier, $\deg Q = 2$

$$A_k = \begin{pmatrix} & & & & & \pm J^{\pm}_{\delta_k/2,\delta_k/2} \\ & & & & \cdot & \\ & & & \cdot & & \\ & & \cdot & & & \\ & & +J^{\pm}_{\delta_k/2,\delta_k/2} & & & \\ & -J^{\pm}_{\delta_k/2,\delta_k/2} & & & & \\ +J^{\pm}_{\delta_k/2,\delta_k/2} & & & & & \end{pmatrix}$$

$$B_k = \begin{pmatrix} L'_{\delta_k/4} & I_{\delta_k} & & \\ & L'_{\delta_k/4} & \ddots & \\ & & \ddots & I_{\delta_k} \\ & & & L'_{\delta_k/4} \end{pmatrix}$$

avec, dans le bloc A_k, des $J^{+}_{\delta_k/2,\delta_k/2}$ pour k pair et des $J^{-}_{\delta_k/2,\delta_k/2}$ pour k impair,
avec pour tout k, $\delta_k \equiv 0$ [4] et
$L'_{\delta_k/4}$ une matrice correspondant à $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R})$ une des racines de Q (voir table 1)
(ici, nécessairement, $Q = (X - \lambda)(X + \lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R})$).

TABLE 2 – *Forme des matrices de a et B dans les bases adaptées, cas réel — récapitulatif.*

Chapitre 3

Des coordonnées locales sur les variétés pseudo-riemanniennes irréductibles, indécomposables

Introduction

L'objet de ce chapitre est de munir les variétés pseudo-riemanniennes de systèmes locaux de coordonnées les plus adaptés possible aux éventuelles propriétés de réductibilité de l'holonomie restreinte. Expliquons-nous.

Les liens entre l'holonomie restreinte et la géométrie locale des variétés riemanniennes sont bien compris :

• D'une part, la représentation de l'holonomie restreinte H dans l'espace tangent $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$ à une variété riemannienne $\mathcal{M}$ en un point m, est semi-simple. Le théorème de de Rham précise alors qu'en fait, cette représentation est une représentation produit, correspondant à une décomposition de H en produit direct. Localement, la variété $\mathcal{M}$ se décompose de plus en produit riemannien. Ainsi, si m est un point de $\mathcal{M}$ et si $\mathrm{T}_m\mathcal{M} = M_0 \overset{\perp}{\oplus} \left(\overset{\perp}{\underset{1\leq i\leq n}{\oplus}} M_i \right)$ est une décomposition de $T_m\mathcal{M}$ en M_0 son facteur plat et $(M_i)_{i=1}^n$ un n-uplet de composantes irréductibles, alors :

∗ Cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.
∗ $H \simeq \prod_{i=1}^n H_i$ où chaque H_i est le sous-groupe de H qui agit trivialement sur les M_j pour $j \neq i$. Par hypothèse alors, chaque H_i agit irréductiblement sur M_i.
∗ Par transport parallèle, chaque M_i se prolonge en une distribution parallèle sur un voisinage de m dans $\mathrm{T}\mathcal{M}$; cette distribution s'intègre, on note $\mathcal{M}_i$ la feuille intégrale passant par m. Il existe alors une isométrie locale φ de $\mathcal{M}$ dans le produit riemannien $\prod_{i=1}^n \mathcal{M}_i$, vérifiant : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{d}\varphi_{|m}(\mathrm{M}_i) = \mathrm{T}_{\varphi(m)}\mathcal{M}_i$.

• D'autre part, dans chaque facteur irréductible, les propriétés de l'holonomie restreinte correspondent à des propriétés géométriques de la variété. Tout un dictionnaire bien connu est établi ; citons seulement ici deux exemples simples :

∗ $d = \dim \mathcal{M}$ est pair et $H \subset U_{d/2}$ *ssi* $\mathcal{M}$ est kählerienne,
∗ $d = \dim \mathcal{M}$ est pair et $H \subset SU_{d/2}$ *ssi* $\mathcal{M}$ est kählerienne, Ricci-plate.

Tout un travail consiste à déterminer les holonomies irréductibles effectivement possibles et à trouver, s'ils existent, des exemples de variétés irréductibles pour chaque holonomie, exemples si possibles complets ou compacts ... Ce travail est aujourd'hui achevé

Toute cette théorie s'applique semblablement aux variétés pseudo-riemanniennes, du moins à celles qui sont totalement décomposables, c'est-à-dire dont la représentation de H dans l'espace tangent en un point se décompose en somme directe orthogonale de sous-espaces semi-simples.

• La décomposition $\mathrm{T}_m\mathcal{M} = M_0 \overset{\perp}{\oplus} \left(\overset{\perp}{\underset{1\leq i\leq n}{\oplus}} M_i \right)$ est unique et il lui correspond une décomposition de H en produit direct et de $\mathcal{M}$ en produit riemannien.

• Un dictionnaire traduit les propriétés de chaque holonomie irréductible en propriétés géométriques de la variété correspondante. La même investigation que dans le cas riemannien est à mener.

Remarquons également qu'un autre type de représentation semi-simple est encore possible. L'espace tangent peut se décomposer en somme directe de deux sous-espace totalement isotropes stables : $\mathrm{T}_m\mathcal{M} = I \oplus J$. Nous ne traiterons pas ce cas ici. Il a été abordé par A.Ikemakhen et L.Bérard Bergery (voir [BBI97]).

Un phénomène nouveau peut cependant apparaître avec le cas pseudo-riemannien. La représentation de l'holonomie restreinte H sur l'espace tangent $T_m\mathcal{M}$ en un point m de $\mathcal{M}$ peut ne pas être semi-simple. Si en effet un sous-espace isotrope de $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$ est stable par holonomie, il n'admet pas nécessairement de supplémentaire stable. Dans ce cas, l'espace tangent est alors réductible sous l'action de H, mais *pas décomposable* : il n'admet pas comme plus haut de décomposition en somme directe de sous-espaces stables, irréductibles ou plats. Dans ce cas nouveau, la structure stable sur $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$ est un drapeau — ou plutôt, généralement, plusieurs drapeaux — et non plus une somme directe.

Ce dernier cas n'a, lui, été que très peu exploré. On peut pourtant se poser les deux mêmes types de questions que quand $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$ est totalement décomposable :

• Dans ce dernier cas, la décomposition de $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$ correspondait à une décomposition de $\mathcal{M}$ en produit riemannien local. A quelle structure géométrique locale, s'il y en a une identifiable, correspond le réseau de drapeaux dans le cas indécomposable? Des fibrations, des produits tordus, autre chose?

• Si, outre la stabilisation de différents drapeaux, l'holonomie vérifie d'autres propriétés, à quelles propriétés supplémentaires de ces structures correspondent-elles, s'il est possible de l'éclaircir?

Notamment, dans le cas lorentzien, A.Ikemakhen et L.Bérard Bergery ont exhibé dans [BBI93] les différentes holonomies indécomposables possibles. On peut alors se demander si elles apparaissent effectivement comme holonomie de certaines variétés lorentziennes et essayer de classifier exactement ces dernières. C'est une des motivations des deux questions listées plus haut.

Paradoxalement donc, alors que le cas totalement décomposable, étudié depuis longtemps, n'offre plus que peu de problèmes ouverts — mais alors les plus ardus — le cas indécomposable est presque vierge. Ainsi, le travail qui suit part de presque zéro : difficulté et chance. Aucune «artillerie lourde» n'est disponible et tout est à inventer ; le lecteur sera d'ailleurs amené à se familiariser avec tout un bestiaire d'objets canoniques introduits au long de l'exposé. Mais d'autre part les seuls prérequis sont les théorèmes de de Rham-Wu et de Ambrose-Singer sur l'holonomie et, pour un corollaire, le résultat cité plus haut de A.Ikemakhen et L.Bérard Bergery. Le raisonnement, lui, ne repose que sur des résultats et techniques du patrimoine commun des mathématiques : essentiellement la suite de Jordan-Hölder d'une représentation et le théorème de Cauchy-Lipschitz sur les équations différentielles ordinaires.

A quelles structures ou propriétés géométriques locales correspondent donc les propriétés de réductibilité de l'holonomie restreinte, lorsque celle-ci agit de façon indécomposable? Dans l'inconnu de départ, on a choisi d'aborder cette question par l'outil le plus modeste et le moins abstrait, mais aussi le plus «tout-terrain» : des coordonnées locales. Elles semblent adaptées à un premier tâtonnement ; si elles mettent en évidence des propriétés plus abstraitement caractérisables de la géométrie locale, il sera toujours temps ensuite de les mettre en évidence pour elles-mêmes. Inversement, la structure de produit riemannien local qui apparaît dans le cas totalement décomposable a une traduction en termes de coordonnées : il existe sur $\mathcal{M}$ au voisinage de m un système de coordonnées produit, *i.e.* un système de coordonnées $(y^i)_{i=1}^n = ((y^i_j)_{j=1}^{n_i})_{i=1}^n$ dans lequel la métrique g prend la forme :

$$\mathrm{Mat}(g) = \begin{pmatrix} g^1(y^1) & & \\ & \ddots & \\ & & g^n(y^n) \end{pmatrix}$$

où le $i$ème bloc correspond aux coordonnées $(y^i_j)_{j=1}^{n_i}$, et n'est fonction que desdites coordonnées. On se propose donc dans ce chapitre de construire sur une variété pseudo-riemannienne (et notamment lorentzienne, avec en vue dans ce cas la question notée plus haut) indécomposable, des coordonnées qui rendent au mieux lisibles les propriétés de réductibilité de l'holonomie locale. «Au mieux» : on verra en effet qu'il n'existe pas de système canoniquement préférable à tout autre, comme le système de coordonnées produit peut être canonique dans le cas totalement décomposable.

A dire vrai, pareille entreprise a déjà été menée. Il y a cinquante ans en effet, A.G.Walker a proposé des coordonnées locales particulières sur les variétés $\mathcal{M}$ indécomposables admettant une distribution totalement isotrope parallèle (voir [W49] et [W50a]). Si $X \subset \mathrm{T}_m\mathcal{M}$ est totalement isotrope, stable par holonomie alors $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$ admet le drapeau stable :

$$\{0\} \subset X \subset X^\perp \subset \mathrm{T}_m\mathcal{M}.$$

Walker construit alors des coordonnées que nous noterons $((x_i)_{i=1}^{d_1},(y_i)_{i=1}^{d_2},(z_i)_{i=1}^{d_1})$, où les d_1 premières coordonnées paramètrent les feuilles intégrales de la distribution X et les d_1+d_2 premières les feuilles intégrales de la distribution $X^\perp$. Dans ces coordonnées, la métrique g prend la forme :

$$\mathrm{Mat}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_{d_1} \\ 0 & A & H \\ I_{d_1} & {}^tH & B \end{pmatrix},$$

où les sous-matrices A et B sont symétriques et où A et H ne dépendent pas des coordonnées $(x_i)_{i=1}^{d_1}$. Semblablement (voir [W50b]), il propose des coordonnées du même type dans le cas, plus général, où $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$ admet un sous-espace partiellement isotrope stable Y. Le noyau $Y \cap Y^\perp$ de Y est alors totalement isotrope stable et $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$ admet le réseau stable :

$$\{0\} \subset Y \cap Y^\perp \subset \left\{ \begin{array}{c} Y \\ Y^\perp \end{array} \right\} \subset Y + Y^\perp \subset \mathrm{T}_m\mathcal{M}.$$

Les coordonnées proposées par Walker paramètrent alors les feuilles intégrales des diverses distributions parallèles de ce réseau.

Cependant, ces coordonnées présentent deux insuffisances :

• Elles sont très loin d'être uniques. Il existe par exemple une infinité de systèmes de coordonnées de ce type, qui coïncident sur une feuille intégrale de $X^\perp$. Techniquement, ils sont construits comme une solution, arbitrairement choisie, d'un système différentiel qui en admet plusieurs. Beaucoup d'éventuelles propriétés géométriques locales de la variété risquent alors de passer inaperçues pour de telles coordonnées : notamment, les propriétés de l'holonomie locale *ne sont pas lisibles* sur la matrice de la métrique dans de telles coordonnées.

• Elles ne sont «adaptées» qu'à un seul drapeau $\{0\} \subset X \subset X^\perp \subset \mathrm{T}_m\mathcal{M}$ à la fois — deux dans la généralisation citée plus haut.

On tentera donc ici de rechercher des coordonnées les plus uniques possible, en un sens que nous proposerons et, en s'appuyant sur une réflexion algébrique préliminaire, adaptées à la structure algébrique générale de $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$, et non au un choix arbitraire d'un sous-espace isotrope stable. Le résultats proposé ici, nous en sommes très conscients, n'est qu'une petite étape vers un éventuel système général de coordonnées applicable à toute variété pseudo-riemannienne. Nous avons en effet restreint l'étude aux variétés satisfaisant deux propriétés techniques tout à fait arbitraires. Cependant, il constitue une première exploration et prouve l'existence de systèmes de coordonnées bâtis selon une certaine philosophie. Reste maintenant, avant de poursuivre, à vérifier si ces systèmes peuvent avoir une utilité. Une des motivations initiales de ce travail fournit déjà une application de ces coordonnées : elles permettent de déterminer quelles variétés lorentziennes ont, localement, les différentes candidats holonomies possibles listés par A.Ikemakhen et L.Bérard Bergery. Ils sont tous réalisables comme holonomies de variétés lorentziennes. Y a-t-il d'autres applications de ces coordonnées? Le travail est à poursuivre.

Un lemme algébrique et un lemme analytique constituent le **I** et le **II** de ce chapitre. Ils permettent alors la construction des coordonnées au **III**. A titre de corollaire, le **IV** classifie alors localement les variétés lorentziennes suivant leur holonomie.

I Un lemme algébrique

I.1 Introduction

Le but de ce chapitre, comme l'expose l'introduction générale, est de proposer un système de coordonnées locales sur les variétés pseudo-riemanniennes indécomposables réductibles, «adaptées» au mieux aux propriétés de l'holonomie dans ce cas : des coordonnées qui rendent de quelque manière «lisibles» ces propriétés. Cette entreprise suppose déjà la compréhension, ou au moins une certaine compréhension, de l'action du groupe d'holonomie restreint H sur l'espace tangent $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$ à la variété $\mathcal{M}$ en un point m.

C'est l'objet de cette première section, purement algébrique. Oubliant momentanément les motivations géométriques résumées ci-dessus, elle est consacrée à

l'étude d'un triplet $(E,< \cdot\,,\cdot >,\Gamma)$
où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie
muni d'une forme bilinéaire non dégénérée $< \cdot\,,\cdot >$
et Γ un sous-groupe de $SO(E,< \cdot\,,\cdot >)$.

On effectuera l'étude sans hypothèse supplémentaire, notamment sans supposer *a priori* E indécomposable.

Notons que le cas où l'action de Γ est semi-simple est entièrement connu, par application des résultats classiques de la théorie des groupes de Lie. Il ne semble pas en revanche exister d'étude poussée d'une telle situation algébrique dans son cas général. Notons aussi au passage qu'une telle étude est bien requise par le caractère *pseudo*-riemannien de la variété $\mathcal{M}$. En effet, si la forme $< \cdot\,,\cdot >$ est définie, l'action de Γ est alors semi-simple et la situation est la suivante :

Proposition 1 *Si $< \cdot\,,\cdot >$ est définie, alors l'action de Γ est semi-simple et E se décompose de façon unique en ses composantes isotypiques :*

$$E = \overset{\perp}{\underset{1 \leq i \leq N}{\bigoplus}} E_i$$

chaque E_i, comme représentation de Γ, étant de la forme :

$$(E_i,< \cdot\,,\cdot >_{|E_i}) \simeq (G_i,< \cdot\,,\cdot >_i) \otimes (\mathbb{R}^{n_i},< \cdot\,,\cdot >_{\mathrm{can}})$$

où la représentation de Γ est simple dans G_i et triviale dans $\mathbb{R}^{n_i}$.

Ce résultat se retrouvera comme cas particulier des conclusions de cette partie.

* * *

Précisons enfin l'ambition, modeste, de cette partie. Elle ne prétend pas constituer une étude complète de la situation examinée : loin de là! Celle-ci est en effet véritablement très touffue et nécessiterait pour être traitée à fond d'autres moyens que les petits raisonnements «manuels» qui vont suivre. Le présent exposé est une première exploration du problème, prenant comme point de départ une idée relativement naturelle. Schématiquement, il vise à comprendre l'interaction entre

• d'une part, des objets classiques de la théorie des représentations, comme la plus grande sous-représentation semi-simple de E,

• d'autre part, des objets typiques du cas pseudo-riemannien qui nous occupe, les sous-espaces totalement isotropes Γ-stables de E.

Le principe de l'étude est plus précisément développé dans la section suivante I.2, la section I.3 page 110 précisant, avec les premiers résultats, le sous-problème auquel on s'attachera particulièrement. Celui-ci est traité dans la section I.4 page 116 et le point de la situation, en vue de la construction des coordonnées qui nous motive, est effectué dans la section I.5 page 124.

I.2 L'idée directrice

Comme toute représentation, E admet les deux sous-espaces canoniques Γ-stables que sont le «plus grand sous-espace semi-simple» et le «plus petit sous-espace de quotient semi-simple», explicités plus bas. En un sens, ce sont les sous-espaces les plus immédiatement remarquables d'une représentation quelconque (voir par ex. [Bour]).

D'autre part, la représentation de Γ dans E préserve la forme $< \cdot, \cdot >$. On vérifie facilement que, si E n'admet pas de sous-espace totalement isotrope Γ-stable, cette représentation est semi-simple : la situation est comme dans le cas où $< \cdot, \cdot >$ est définie, décrit dans la proposition 1 page 107. De tels espaces apparaissent en revanche dès que l'action de Γ est indécomposable, réductible. C'est le cas nouveau, inexistant si Γ est une holonomie riemannienne, qui nous intéresse. Voir à ce sujet le sous-lemme 6 page 111. On introduira donc deux sous-espaces canoniques Γ-stables de E, notés X et W, liés à l'existence de sous-espaces totalement isotropes stables.

Le travail qu'on se propose alors est de comprendre les liens entre ces deux types d'espaces, espérant par là un premier éclairage sur la structure de la représentation de Γ dans $(E,< \cdot, \cdot >)$. Introduisons-les tout d'abord, c'est l'objet de cette section.

I.2.1 Des sous-espaces liés à des repésentations semi-simples induites

Sous-lemme 1 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et ρ une représentation de Γ groupe de Lie dans $GL(E)$. Alors la somme de toutes les sous-représentations semi-simples $(F,\rho_{|F})$ de ρ est une sous-représentation $(S,\rho_{|S})$ de E, semi-simple.*

Définition 1 *On appellera cette sous-représentation la plus grande sous-représentation semi-simple de ρ, ou S le plus grand sous-espace semi-simple de E.*

Remarque : Au sens de Bourbaki ([Bour], page 40.), S est la somme, directe, des composantes isotypiques de E.

Démonstration du sous-lemme. Il suffit de montrer que, si $(F_1,\rho_{|F_1})$ et $(F_2,\rho_{|F_2})$ avec F_1 et F_2 deux sous-espaces de E, sont deux sous-représentations semi-simples, leur somme $(F_1+F_2,\rho_{|F_1+F_2})$ l'est aussi. Vérifions-le. Chaque F_i, $i \in \{1,2\}$ est semi-simple, donc $F_1 \cap F_2$ l'est aussi donc se décompose en $F_1 \cap F_2 = \overset{n}{\underset{j=1}{\oplus}} E^j$, où les E^j sont simples. Comme chaque F_i est semi-simple, on peut encore écrire, pour $i \in \{1,2\}$: $F_i = (F_1 \cap F_2) \oplus (\overset{n_i}{\underset{j=1}{\oplus}} E_i^j)$ où les E_i^j sont simples. Ainsi : $F_1+F_2 = (\overset{n}{\underset{j=1}{\oplus}} E^j) \oplus (\overset{n_1}{\underset{j=1}{\oplus}} E_1^j) \oplus (\overset{n_2}{\underset{j=1}{\oplus}} E_2^j)$, F_1+F_2 est somme de sous-représentations simples, donc est simple. $\square$

Sous-lemme 2 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et ρ une représentation de Γ groupe de Lie dans $GL(E)$. Alors l'intersection de tous les sous-espaces stables F de E, tels que la représentation induite de Γ sur le quotient E/F est semi-simple, est un sous-espace R qui a la même propriété* i.e. *:*

$$\text{si } R = \bigcap_{F\in\mathfrak{F}} F \text{ où } \mathfrak{F} = \{F \text{ sous-espace de } E \text{ t.q. } F \text{ est stable et } (E/F) \text{ est semi-simple}\},$$

$$\text{alors } R \text{ est stable et } (E/R) \text{ est semi-simple.}$$

Cet espace R est le plus petit sous-espace stable tel que E/R est semi-simple.

Définition 2 *On appellera la sous-représentation $(R,\rho_{|R})$ la plus petite sous-représentation de quotient semi-simple de ρ, ou R le plus petit sous-espace de quotient semi-simple de E.*

Démonstration du sous-lemme. Il suffit comme précédemment de montrer que si F_1 et F_2 sont dans $\mathfrak{F}$, $F_1 \cap F_2$ l'est aussi. Quitte à remplacer E, F_1 et F_2 respectivement par $E/(F_1\cap F_2)$, $F_1/(F_1\cap F_2)$ et $F_2/(F_1\cap F_2)$, on peut supposer que $F_1\cap F_2=\{0\}$. Montrons alors que E est semi-simple. Soit $\pi_i : E \to E/F_i$, $i\in\{1,2\}$. Par hypothèse, $\pi_2(E)$ est semi-simple et F_1 est stable, donc $\pi_2(F_1)$ est une représentation, semi-simple. Comme $F_1\cap F_2=\{0\}$, les représentations F_1 et $\pi_2(F_1)$ sont équivalentes, donc F_1 est semi-simple ; symétriquement F_2 l'est aussi. Si $F_1+F_2=E$, E est donc semi-simple. Sinon, $\pi_1(F_2)$ est stable dans $\pi_1(E)$, on peut donc écrire : $\pi_1(E) = (\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i)\oplus\pi_1(F_2)$ où $n\geq 1$ et où les E_i sont simples, ce qui donne, comme $n\geq 1$: $E = (\overset{n}{\underset{i=1}{+}} E_i')\oplus F_2$, où pour tout i, $E_i' = \pi_1^{-1}(E_i)\supset F_1$. Alors : $\pi_2(E) = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} \pi_2(E_i')$ où $\forall i, \pi_2(E_i')\simeq E_i'$ car $E_i'\cap F_2=\{0\}$; comme $\pi_2(E)$ est semi-simple, chaque $\pi_2(E_i')$ l'est aussi et donc, chaque E_i'. Or pour tout i, F_1 est stable, inclus dans E_i', donc on peut écrire : $\forall i, E_i' = E_i''\oplus F_1$ où E_i'' est stable, semi-simple. Enfin donc : $E = (\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i'')\oplus F_1\oplus F_2$ où F_1, F_2 et les E_i'' sont des sous-représentations semi-simples. E est semi-simple. $\square$

Remarque. Ce deuxième sous-lemme découle également de l'application du premier au dual de E.

Sous-lemme 3 *Si $E,<\cdot,\cdot>$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni de $<\cdot,\cdot>$ forme bilinéaire symétrique non dégénérée, si ρ est une représentation de Γ groupe de Lie dans $O(E,<\cdot,\cdot>)$, alors S le plus grand sous-espace semi-simple de E et R le plus petit sous-espace de quotient semi-simple vérifient :*

$$R = S^\perp.$$

Démonstration. La représentation contragédiente de $\rho_{|S}$ sur S^* et la représentation quotient induite par ρ sur $E/S^\perp$ sont isomorphes, car l'isomorphisme canonique $\sharp : S^*\to E/S^\perp$ commute avec l'action de $\rho(\Gamma)\subset O(E,<\cdot,\cdot>)$. Or la première est, comme $\rho_{|S}$, semi-simple, donc $E/S^\perp$ l'est également et donc, par définition de R :

$$R\subset S^\perp.$$

Réciproquement, E/R est semi-simple donc de la même façon $(R^\perp)^*$ l'est aussi, donc également $R^\perp$ et donc par définition de S :

$$R^\perp \subset S.$$

D'où le résultat. $\square$

I.2.2 Des sous-espaces liés à l'existence de sous-espaces totalement isotropes stables

Comme exposé dans l'introduction, le but est ici une première approche des triplets $(E,<\cdot,\cdot>,\Gamma)$. Or, on a vu page 108 au début de cette section I.2 que l'existence de sous-espaces totalement isotropes Γ-stables est caractéristique des phénomènes nouveaux qui peuvent apparaître (représentation non semi-simple ...) quand $<\cdot,\cdot>$ n'est pas définie. Le sous-espace de E le plus naturel à faire intervenir dans l'étude est donc le sous-espace engendré par les sous-espaces totalement isotropes stables. On le notera W ; il est Γ-stable, et nul *ssi* il n'y a pas de sous-espace totalement isotrope stable non trivial. Plus exactement on s'intéressera au réseau, canonique et Γ-stable :

$$\{0\} \subset (W \cap W^\perp) \left\{ \begin{array}{c} \subset W \\ \subset W^\perp \end{array} \right\} \subset (W + W^\perp) \subset E,$$

qui est trivial ($\{0\} = W \subset W^\perp = E$) *ssi* $\{0\}$ est le seul sous-espace totalement isotrope stable.

On verra dans le sous-lemme 5 page 111 que $W \cap W^\perp = X$ où X est l'intersection des sous-espaces totalement isotropes stables, maximaux pour cette propriété, simplement notés ici sous-espaces totalement isotropes stables maximaux. Il est lui-même totalement isotrope, stable. Etudier le réseau introduit plus haut revient à étudier le drapeau, lui aussi canonique et Γ-stable :

$$\{0\} \subset X \subset X^\perp \subset E,$$

en s'appuyant pour cela sur les espaces W et $W^\perp$.

Etudions donc, comme annoncé, les relations entre S et $R = S^\perp$, d'une part, et le drapeau $\{0\} \subset X \subset X^\perp \subset E$, d'autre part.

I.3 Premiers résultats

I.3.1 Remarques préliminaires

Remarque sur la notion d'irréductiblité. Dans tout l'exposé, on appellera *irréductible* un espace F sur lequel agit un groupe, ou *simple* la repésentation de ce groupe dans cet espace F , *si les seuls sous-espaces stables de F sous l'action du groupe sont triviaux :* $\{0\}$ *et F.* En particulier, la représentation *triviale de dimension un* d'un groupe est ici classée comme *simple.*

Donnons déjà un nom à une notion auxiliaire utilisée régulièrement dans la suite.

Définition 3 *Si F est un sous-espace de E, on appellera* quotient non-dégénéré *de F le quotient :* $F/(F \cap F^\perp) = F/(\ker <\cdot,\cdot>_{|F})$.

Trois petits résultats précisent les premières propriétés des sous-espaces totalement isotropes stables, de W et de X.

Sous-lemme 4 *Les sous-espaces totalement isotropes de E, stables sous l'action de Γ, maximaux pour cette propriété, sont tous de même dimension.*

Démonstration : Soient I et J deux sous-espaces totalement isotropes stables maximaux et K le noyau de $< \cdot, \cdot >$ sur $I + J$, alors : $K = I \cap J$. En effet, K est totalement isotrope, stable et $K \perp I$, donc $K + I$ est encore totalement isotrope, stable. Par maximalité de I, $K + I = I$ *i.e.* $K \subset I$. Symétriquement $K \subset J$, donc $K \subset I \cap J$. D'autre part, comme I et J sont totalement isotropes, $(I \cap J) \perp (I + J)$ donc $I \cap J \supset K$.

Notons $\check{I}$ et $\check{J}$ les projetés de I et J dans $(I + J)/K$. Par définition de K, $\check{I} + \check{J}$ est non dégénéré, mais d'autre part $\check{I}$ et $\check{J}$ sont chacun totalement isotropes, donc en particulier $\check{J}^\flat = \check{I}^*$ et par conséquent, $\dim \check{J} = \dim \check{I}$, donc enfin $\dim I = \dim J$. □

Sous-lemme 5 $X = W \cap W^\perp$. *En particulier, W/X et $W^\perp/X$ sont non dégénérés.*

Démonstration : Soit $(I_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ la collection des sous-espaces totalement isotropes stables maximaux de E ; W est la somme des sous-espaces totalement isotropes stables, en particulier donc la somme des sous-espaces totalement isotropes stables maximaux : $W = +_{\alpha \in \mathfrak{A}} I_\alpha$, mais : $X = \cap_{\alpha \in \mathfrak{A}} I_\alpha$ donc : $\underline{X \subset W}$. D'autre part $X = \cap_{\alpha \in \mathfrak{A}} I_\alpha \subset \cap_{\alpha \in \mathfrak{A}} I_\alpha^\perp = (+_{\alpha \in \mathfrak{A}} I_\alpha)^\perp = W^\perp$ donc $\underline{X \subset W^\perp}$. Enfin $W \cap W^\perp$ est totalement isotrope, stable, et par définition de $W^\perp : \forall \alpha \in \mathfrak{A}, (W \cap W^\perp) \perp I_\alpha$. Par conséquent, pour tout α, $I_\alpha + (W \cap W^\perp)$ est totalement isotrope, stable. Alors par maximalité de I_α, $(W \cap W^\perp) \subset I_\alpha$. Cette inclusion est vraie pour tout α, donc : $\underline{(W \cap W^\perp) \subset X}$. □

Sous-lemme 6 • *Si E n'admet pas de sous-espace totalement isotrope stable non trivial alors tout sous-espace stable de E est non dégénéré et la représentation de Γ dans E est semi-simple,*

• *la représentation de Γ dans $W^\perp/X$ est semi-simple, $W^\perp/X$ est somme de sous-espaces irréductibles non dégénérés,*

• *si I est un sous-espace totalement isotrope stable maximal, la représentation de Γ dans $I^\perp/I$ est semi-simple, $I^\perp/I$ est somme de sous-espaces irréductibles non dégénérés,*

• *si E n'admet pas de sous-espace dont le quotient non dégénéré est non trivial, irréductible, alors il est de dimension paire et ses sous-espaces totalement isotropes stables maximaux sont de dimension moitié.*

Démonstration : Vérifions le premier point. Supposons que $\{0\}$ est le seul sous-espace totalement isotrope stable et soit F un sous-espace stable de E. L'espace F est non dégénéré car $F \cap F^\perp$ est totalement isotrope stable, donc réduit à $\{0\}$; $F^\perp$ est alors un supplémentaire stable de F et E est donc semi-simple.

Les points deux et trois découlent alors de la remarque suivante : par définition de $W^\perp$ et par maximalité de I, respectivement, les espaces $W^\perp/X$ et $I^\perp/I$ n'admettent pas de sous-espace totalement isotrope stable.

Montrons le dernier point. On suppose que E n'admet pas de sous-espace dont le quotient non dégénéré est non trivial, irréductible. Soit I un sous-espace totalement isotrope stable maximal de E. Si $I \subsetneq I^\perp$ alors $I^\perp/I$ est non trivial, somme de sous-espaces irréductibles non dégénérés par le point précédent. Soit $\check{F}$ un sous-espace irréductible non dégénéré non trivial de $I^\perp/I$ et F son image réciproque dans $I^\perp$. Alors $\check{F} \simeq F/(F \cap F^\perp)$ et donc le quotient non dégénéré de F est irréductible non trivial. C'est impossible, donc $I = I^\perp$ et le résultat suit. $\square$

I.3.2 Une restriction de l'étude

La suite est exclusivement consacrée à l'examen de la représentation de Γ dans $X^\perp/X$. En effet :

- La représentation de Γ dans X, sous-espace totalement isotrope, peut être quelconque, *i.e.* tout sous-groupe de $GL(X)$ peut être obtenu comme $\{\gamma_{|X} \ / \ \gamma \in \Gamma\}$ pour un certain $\Gamma \subset O(E,<\cdot,\cdot>)$.
- Il en est de même pour la représentation de Γ dans $E/X^\perp$, contragédiente de la précédente car $E/X^\perp \simeq X^*$.
- Enfin dans le drapeau $\{0\} \subset X \subset X^\perp \subset E$, on ne s'intéressera ici qu'aux représentations sur les quotients successifs. L'étude du problème général n'est en effet pas directement exploitable par le procédé de construction de coordonnées locales qui suit et qui motive ce préliminaire algébrique ; en revanche, elle ressort typiquement des questions qui nécessitent des moyens plus lourds d'investigation que ceux, élémentaires, utilisés ici.

La suite est donc exclusivement consacrée au quotient $X^\perp/X$. En fait, on étudiera toujours l'espace E lui-même, mais en supposant que $X = \{0\}$. Cela revient au même et allège les notations. Donc :

dans toute la suite, on suppose nulle l'intersection des sous-espaces totalement isotropes stables maximaux de $\boldsymbol{E}$, *i.e.* on suppose que $\boldsymbol{X = \{0\}}$.

Remarquons qu'alors, par le sous-lemme 5 page 111 :

$$E = W \oplus W^\perp.$$

Par le deuxième point du sous-lemme 6 page 111, $W^\perp$ est somme directe de sous-espaces irréductibles non dégénérés ; il se comporte comme si $<\cdot,\cdot>_{|W^\perp}$ était définie, *i.e.* comme dans la proposition 1 page 107. Reste à examiner W.

Notation. On notera désormais $\boldsymbol{d_{\mathrm{W}}}$ la dimension de W, $\boldsymbol{d_{\mathrm{W}^\perp}}$ celle de $W^\perp$ et $\boldsymbol{d_{\mathrm{I}}}$ celle, commune par le sous-lemme 4 page 111, des sous-espaces totalement isotropes stables maximaux.

I.3.3 Le cas où $\boldsymbol{d_{\mathrm{W}} = 2d_{\mathrm{I}}}$

Un sous-cas particulier. Remarquons que si $d_{\mathrm{W}} = 2d_{\mathrm{I}}$ et que de plus deux sous-espaces totalement isotropes stables maximaux I et J suffisent à engendrer W, alors ils sont nécessairement en somme directe : $W = I \oplus J$. La représentation de Γ dans I peut être quelconque et celle de Γ dans $J \simeq I^*$ lui est contragédiente. Par conséquent : $\{\gamma \in SO(W,<\cdot,\cdot>) \ / \ \gamma(I) = I \text{ et } \gamma(J) = J\} \simeq GL(I) \simeq GL_{d_{\mathrm{I}}}(\mathbb{R})$.

Si strictement plus de deux sous-espaces totalement isotropes stables maximaux sont nécessaires pour engendrer W —ce qui est possible—, la situation se complique, mais en gardant une parenté avec le cas ci-dessus. C'est le lemme 1 qui suit.

D'autre part, notons également que le cas $d_{\mathbf{W}} = 2d_{\mathbf{I}}$ est remarquable car c'est un cas extrémal :

– la dimension des sous-espaces totalement isotropes stables est la plus grande possible dans leur somme W,

– ces sous-espaces vérifient alors : $I = I^{\perp}$

– et bien sûr ils engendrent toujours W.

Les sections suivantes montreront de plus qu'en fait on peut toujours, dans le cas général, décomposer W, de façon non nécessairement unique, en somme directe orthogonale d'un sous-espace de ce type —vérifiant encore une propriété supplémentaire— et d'un sous-espace totalement réductible.

Cette section exhibe une propriété caractéristique du cas $d_{\mathbf{W}} = 2d_{\mathbf{I}}$, donnant une idée de la structure de la représentation de Γ dans ce cas. Elle montre également ainsi en quoi ce cas, effectivement particulier, peut être intéressant à mettre en exergue. Encore une fois cependant, elle est loin d'épuiser la question ; dans l'état actuel du procédé de construction de coordonnées locales qui suit, les présents résultats suffisent amplement aux besoins.

Notations : On note $(I_j)_{j=1}^{N}$ une base de sous-espaces totalement isotropes stables maximaux, c'est-à-dire une famille de tels sous-espaces, engendrant W, minimale pour cette propriété (nécessairement $N \geq 2$). Ces bases ne sont pas *a priori* toutes de même cardinal ; on peut de plus en choisir une de cardinal minimal. Si $\mathcal{E}$ est une partie de $[\![1,N]\!]$, on notera $I_{\mathcal{E}} = \cap_{j\in\mathcal{E}} I_j$ et, comme c'est l'habitude, $\overline{\mathcal{E}}$ le complémentaire de $\mathcal{E}$ dans $[\![1,N]\!]$.

Lemme 1 *Soit $(W,<\cdot,\cdot>,\Gamma)$ la représentation naturelle de $\Gamma \subset SO(E,<\cdot,\cdot>)$ dans W. Rappelons que W est engendré par ses sous-espaces totalement isotropes stables maximaux et que ceux-ci sont d'intersection nulle (*i.e. *$X = \{0\}$), par hypothèse générale. On suppose également que W admet une base de sous-espaces totalement isotropes maximaux $(I_j)_{j=1}^{N}$ de cardinal N.*

Alors, W est de dimension paire et ses sous-espaces totalement isotropes stables maximaux sont de dimension $\frac{1}{2}\dim W$ ssi *W admet une suite de composition de la forme :*

$$((X_k)_{k=0}^{L},(X_k^{\perp})_{k=L}^{0}),\quad i.e.:\ \{0\} = X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_L \subset X_L^{\perp} \subset \ldots \subset X_1^{\perp} \subset X_0^{\perp} = W,$$

où :

- *$L \leq N-2$ (donc la suite est de longueur inférieure à $2L+1 = 2N-3$)*
- *$X_L^{\perp}/X_L$ est somme de deux sous-espaces totalement isotropes stables supplémentaires — mais peut être éventuellement trivial.*

Remarquons qu'alors, nécessairement, pour tout k de $[\![1,L]\!]$, X_k est totalement isotrope et :

$$X_k/X_{k-1} \xrightarrow[\simeq]{\flat} \left(X_{k-1}^{\perp}/X_k^{\perp}\right)^{*}.$$

Démonstration. On pose :

$$X_1 = \underset{\substack{\mathcal{E}\subset[\![1,N]\!] \\ \sharp\mathcal{E}=N-1}}{+} I_{\mathcal{E}} = \overset{N}{\underset{j=1}{+}} I_{\overline{\{j\}}}. \qquad \text{Alors :}\quad X_1^{\perp} = \overset{N}{\underset{j=1}{\cap}} (\underset{k\neq j}{+} I_k).$$

Si $N = 2$, l'énoncé du lemme est immédiatement vérifié avec $L = 0$. Sinon, alors X_1 est totalement isotrope et donc $X_1 \subset X_1^{\perp}$. En effet alors : $\forall\{j,k\} \subset [\![1,N]\!], \exists l \in \overline{\{j,k\}}$. Pour de tels indices : $I_{\overline{\{j\}}} \subset I_l$ et $I_{\overline{\{k\}}} \subset I_l$, donc $I_{\overline{\{j\}}} \perp I_{\overline{\{k\}}}$ et X_1 est donc totalement isotrope. on suppose désormais que $N \geq 3$.

Affirmation : $X_1^\perp$ est engendré par les $(I_j \cap X_1^\perp)_{j=1}^N$. Il l'est même, pour tout k de $[\![1,N]\!]$, par les $(I_j \cap X_1^\perp)_{j\in[\![1,N]\!]\setminus k}$.

Pour tout j de $[\![1,N]\!]$, $m \neq j \Rightarrow I_j \cap (+_{n\neq m} I_n) = I_j$, donc : $I_j \cap X_1^\perp = I_j \cap \big(\cap_{m=1}^N (+_{n\neq m} I_n)\big) = \cap_{m=1}^N \left(I_j \cap (+_{n\neq m} I_n)\right) = I_j \cap (+_{n\neq j} I_n)$. Pour montrer l'affirmation, il suffit donc de monter, pour tout k de $[\![1,N]\!]$, l'inclusion :

$$\bigcap_{j=1}^N \left(\underset{n\neq j}{+} I_n\right) \subset \underset{j\neq k}{+} \left(I_j \cap (\underset{n\neq j}{+} I_n)\right).$$

Soit donc x dans $X_1^\perp = \cap_{j=1}^N (+_{n\neq j} I_n)$, en particulier x est dans $+_{n\neq k} I_n$ donc peut s'écrire $x = +_{j\neq k} x_j$ avec : $\forall j \in [\![1,N]\!] \setminus \{k\}, x_j \in I_j$. Alors, pour tout j de $[\![1,N]\!] \setminus \{k\}$: $x_j = x - \left(+_{j'\in\overline{\{j,k\}}} x_{j'}\right)$; $x \in X_1^\perp$ donc $x \in +_{n\neq j} I_n$ et pour tout j' de $\overline{\{j,k\}}$, $x_{j'} \in I_{j'} \subset +_{n\neq j} I_n$. Par conséquent, $x_j \in +_{n\neq j} I_n$. D'autre part $x_j \in I_j$, donc $x_j \in I_j \cap (+_{n\neq j} I_n)$. Comme $x = +_{j\neq k} x_j$, $x \in +_{j\neq k} \left(I_j \cap (+_{n\neq j} I_n)\right)$, c'est le résultat annoncé.

Notons à présent π_1 la projection canonique : $W \to W/X_1$. Par l'affirmation, $X_1^\perp$, donc également $\pi_1(X_1^\perp)$, est engendré par ses sous-espaces totalement isotropes stables du type $(I_j \cap X_1^\perp)_{j=1}^N$ —respectivement du type $(\pi_1(I_j \cap X_1^\perp))_{j=1}^N$ pour $\pi_1(X_1^\perp)$. Ces derniers sont de plus de dimension *moitié* dans $\pi_1(X_1^\perp)$. En particulier ils sont donc maximaux. Prouvons cette relation sur les dimensions. L'isomorphisme musical $\flat$ induit l'isomorphisme : $X_1 \xrightarrow[\simeq]{\flat} (W/X_1^\perp)^*$. Par cet isomorphisme, pour tout j de $[\![1,N]\!]$:

$$(I_j \cap X_1) \simeq \left[(W/X_1^\perp)/(I_j^\perp/(I_j^\perp \cap X_1^\perp))\right]^* = \left[(W/X_1^\perp)/(I_j/(I_j \cap X_1^\perp))\right]^*,$$

donc : $\dim(I_j \cap X_1) = \dim(W/X_1^\perp) - \dim(I_j/(I_j \cap X_1^\perp)) = \dim(X_1) - \dim I_j + \dim(I_j \cap X_1^\perp)$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\dim(\pi_1(I_j \cap X_1^\perp)) &= \dim(I_j \cap X_1^\perp) - \dim(I_j \cap X_1) \\
&= \dim I_j - \dim X_1 \\
&= \frac{1}{2} \dim W - \dim X_1 \\
&= \frac{1}{2} (\dim W - 2 \dim X_1) \\
&= \frac{1}{2} \left(\dim X_1^\perp - \dim X_1\right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\dim(\pi_1(X_1^\perp))\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\pi_1(X_1^\perp)$ est de dimension paire, engendré par ses sous-espaces totalement isotropes stables maximaux $(\pi_1(I_j \cap X_1^\perp))_{j=1}^N$, qui sont de dimension moitié. On peut alors extraire de $(\pi_1(I_j \cap X_1^\perp))_{j=1}^N$ une sous-famille génératrice minimale $(\pi_1(I_j \cap X_1^\perp))_{j\in\mathcal{E}}$. Elle sera nécessairement de cardinal $\leq N-1$, par la deuxième partie de l'affirmation liminaire. On construit alors par récurrence la famille $(X_k)_{k=1}^L$ annoncée dans le lemme en itérant le raisonnement sur $X_1^\perp/X_1 = \pi_1(X_1^\perp)$:

$$\forall j \in \mathcal{E}, \check{I}_j = \pi_1(I_j \cap X_1^\perp), \quad \check{X}_2 = \underset{\substack{\mathcal{F}\subset\mathcal{E} \\ \sharp\mathcal{F}=\sharp\mathcal{E}-1}}{+} \check{I}_{\mathcal{F}} \quad \text{et} \quad X_2 = \pi_1^{-1}(\check{X}_2)\ldots$$

Plus précisément, le raisonnement est itéré jusqu'à obtention d'un X_L, soit tel que $X_L^\perp/X_L$ est trivial, soit tel que la base de sous-espaces totalement isotropes stables maximaux qu'on en obtient est de cardinal 2. Comme le cardinal de la nouvelle base de sous-espaces totalement isotropes maximaux décroît d'au moins un à chaque étape, on a comme annoncé : $L \leq N-2$ et la partie directe est prouvée.

Pour la partie réciproque, il suffit de remarquer que, si $\check{I}$ est un sous-espace totalement isotrope stable de $X_L^\perp/X_L$ et si on note π_L la projection canonique $W \to W/X_L$, alors $\pi_L^{-1}(\check{I})$ est dans W totalement isotrope, stable, de dimension $\frac{1}{2}\dim W$. $\square$

Matriciellement. Notons pour tout k de $[\![1,L]\!]$, $d_k = \dim X_k/X_{k-1}$ et $d_{L+1} = \frac{1}{2}\dim X_{L+1}^\perp/X_{L+1} \in \mathbb{N}$; notons $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de Γ. On peut trouver une base de W, respectant la suite de composition $((X_k)_{k=0}^L,(X_k^\perp)_{k=L}^0)$ dans laquelle :

$$\mathrm{Mat}(< \cdot,\cdot >) = \begin{pmatrix} & & & & & I_{d_1} \\ & 0 & & & \cdot & \\ & & & \cdot & & \\ & & & I_{d_{L+1}} & & \\ & & I_{d_{L+1}} & & & \\ & \cdot & & & 0 & \\ \cdot & & & & & \\ I_{d_1} & & & & & \end{pmatrix} \quad \text{et :}$$

$$g \in \mathfrak{g} \Rightarrow \mathrm{Mat}(g) = \begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \ddots & * & \cdots & * & \vdots \\ \vdots & \ddots & A_{L+1} & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -{}^tA_{L+1} & * & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -{}^tA_1 \end{pmatrix}.$$

Remarque : On peut être plus précis dans l'exploitation du raisonnement effectué pour démontrer le lemme. Notamment, les espaces X_1 et $W/X_1^\perp$ sont somme directe de facteurs stables : $X_1 = \oplus_{j=1}^N I_{\overline{\{j\}}}$ par construction et $(W/X_1^\perp) = \oplus_{j=1}^N \overline{\pi}_1(I_j)$ où $\overline{\pi}_1$ désigne la projection canonique $W \to E/X_1^\perp$. Il en est de même, pour tout indice k, avec X_k/X_{k-1} et $X_{k-1}^\perp/X_k$. A ces sous-décompositions correspond une suite de composition de W, plus fine que $((X_k)_{k=0}^L,(X_k^\perp)_{k=L}^0)$.

Il est d'autre part à noter que tous les X_k, et tous les espaces de la suite de composition plus fine mise en évidence ci-dessus, s'expriment *comme sommes et intersections des sous-espaces stables* $(I_j)_{j=1}^N$. La matrice générique d'un élément de l'algèbre de Lie de Γ, exprimée dans une base respectant cette suite de composition plus fine, possède alors un jeu complexe de blocs nuls dans sa partie triangulaire bloc-supérieure stricte. Là encore, la poursuite de l'investigation n'est pas en rapport avec les moyens et le temps dont nous disposons, et surtout avec l'exploitation, très sommaire, qui est faite de ces résultats dans la construction de coordonnées locales qui suit.

I.4 Le résultat principal

Introduisons un résultat préliminaire jouant un rôle essentiel dans la démonstration du lemme principal, et intéressant à exposer pour lui-même.

Sous-lemme 7 *Soit F un sous-espace stable de W, dont le quotient non dégénéré est irréductible, et minimal pour cette propriété,* i.e. *tel que :*

* Γ *agit irréductiblement sur F/K, où $K = \ker < \cdot,\cdot >_{|F} = F \cap F^{\perp}$,*
* *tout sous-espace strict stable de F est inclus dans K.*

Alors il existe deux sous-espaces totalement isotropes stables I et J de W tels que : $F \subset I+J$, $F \cap I^{\perp} \subset K$ et $F \cap J^{\perp} \subset K$. De plus, si $\mathfrak{I}$ est une famille de sous-espaces totalement isotropes engendrant W, I peut être choisi parmi les éléments de $\mathfrak{I}$.

Un petit commentaire : Introduisons une situation simple où apparaissent dans W des sous-espaces dont le quotient non dégénéré est irréductible. Soient I et J deux sous-espaces totalement isotropes stables de W. On peut alors trouver une base $\beta = ((f_i)_{i=1}^n,(e_i)_{i=1}^m,(f_i^*)_{i=1}^n)$ de $I+J$ telle que $I = \text{vect}((f_i)_{i=1}^n,(e_i)_{i=1}^{m_1})$ et $J = \text{vect}((e_i)_{i=m_2}^m,(f_i^*)_{i=1}^n)$ avec m_1 et m_2 deux certains entiers de $[\![1,m]\!]$ t.q. $m_1 \geq m_2 - 1$, et où la forme $< \cdot,\cdot >$ a pour matrice :

$$\text{Mat}_\beta(< \cdot,\cdot >) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Dans cette base β, la matrice d'un élément g de $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de Γ est du type :

$$\text{Mat}(g) = \begin{pmatrix} A_g & 0 & 0 \\ C_g & B_g & D_g \\ 0 & 0 & -{}^tA_g \end{pmatrix}.$$

Si alors de plus $\{A_g \ / \ g \in \mathfrak{g}\}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$ dont la représentation naturelle dans R^n est simple, on vérifie que l'espace $F = \text{vect}((f_i + f_i^*)_{i=1}^n,(e_i)_{i=1}^m)$ est stable, de quotient non dégénéré F/K irréductible ($K = \text{vect}((e_i)_{i=1}^m)$), de signature $(n,0)$. Notons au passage que si $K = \{0\}$, *i.e.* si $m = 0$, F est simplement non dégénéré, irréductible. Dans la base $\beta' = (\frac{1}{\sqrt{2}}(f_i + f_i^*)_{i=1}^n,(e_i)_{i=1}^m),\frac{1}{\sqrt{2}}(f_i - f_i^*)_{i=1}^n)$:

$$\text{Mat}_{\beta'}(< \cdot,\cdot >) = \begin{pmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\beta'}(g) = \begin{pmatrix} A_g & 0 & 0 \\ C'_g & B_g & D'_g \\ 0 & 0 & -{}^tA_g \end{pmatrix}.$$

Le même raisonnement peut s'effectuer avec une base β dans laquelle :

$$\mathrm{Mat}_\beta(<\cdot,\cdot>) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_{p,q} \\ 0 & 0 & 0 \\ I_{p,q} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec p et q deux entiers t.q. $p+q=n$. La matrice générique d'un élément g de $\mathfrak{g}$ est alors :

$$\mathrm{Mat}(g) = \begin{pmatrix} A_g & 0 & 0 \\ C_g & B_g & D_g \\ 0 & 0 & -I_{p,q}^t A_g I_{p,q} \end{pmatrix}.$$

Si alors $\{A_g \ / \ g \in \mathfrak{g}\}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{so}_{p,q}(\mathbb{R})$ dont la représentation naturelle dans R^n est simple, on vérifie que l'espace $F = \mathrm{vect}((f_i + f_i^*)_{i=1}^n, (e_i)_{i=1}^m)$ est stable, de quotient non dégénéré F/K irréductible ($K = \mathrm{vect}((e_i)_{i=1}^m)$). Ce quotient est cette fois de signature (p,q).

Du sous-lemme 7 découle en fait que tous les sous-espaces stables de W dont le quotient non dégénéré est irréductible s'obtiennent de cette façon. En effet, si I et J sont deux sous-espaces totalement isotropes stables, on vérifie manuellement que $I+J$ admet des sous-espaces de quotient non dégénéré irréductible *ssi* il existe une certaine base β de $I+J$, dans laquelle se produit le phénomène décrit ci-dessus. (Ou plutôt, β est une certaine base de $I'+J'$, ou I' et J' sont deux certains sous-espaces stables de I et J respectivement.) On vérifie alors que tous les sous-espaces de $I'+J'$ dont le quotient non-dégénéré est irréductible peuvent s'obtenir comme les espaces F construits plus haut, pour une base β bien choisie.

Démonstration. *Affirmation :* Si I est un sous-espace totalement isotrope stable et si F est un sous-espace de E comme dans l'énoncé, alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \quad (I+F^\perp) \cap F = K \text{ et alors } I \subset F^\perp \\ \textbf{ou} \\ \quad F \subset I + F^\perp. \end{array} \right.$$

Montrons cette affirmation. Soit I un sous-espace totalement isotrope stable. Alors $I+F^\perp$ est stable donc par hypothèse sur F : $F \subset I+F^\perp$ ou $(I+F^\perp)\cap F \subset K$. Si on est dans ce dernier cas, $K + (I+F^\perp) = F$. En effet, $(I+F^\perp)\cap F \subset K$ donc les orthogonaux vérifient l'inclusion inverse : $F^\perp + F = K^\perp \subset F^\perp + (I^\perp \cap F)$. Soit π la projection canonique de E dans E/K, alors : $\pi(F^\perp) \oplus \pi(F) \subset \pi(F^\perp) \oplus \pi(I^\perp \cap F)$; comme $\pi(I^\perp \cap F) \subset \pi(F)$, par projection sur $\pi(F)$ parallèlement à $\pi(F^\perp)$: $\pi(F) = \pi(I^\perp \cap F)$, *i.e.* $F + K = (I^\perp \cap F) + K$ *i.e.* $F = (I^\perp \cap F) + K$. L'inclusion réciproque est immédiate. Or, $I^\perp \cap F$ est stable, inclus dans F, donc $I^\perp \cap F \subset K$ ou$I^\perp \cap F = F$. Par conséquent, $I^\perp \cap F = F$ *i.e.* $F \subset I^\perp$ *i.e.* $I \subset F^\perp$. L'affirmation est démontrée.

Si tous les sous-espaces totalement isotropes stables de E sont dans le premier cas de l'alternative présentée par l'affirmation, alors $W \subset F^\perp$ par définition de W. Ce n'est pas le cas, donc on trouve un sous-espace totalement isotrope stable I tel que : $F \subset I + F^\perp$. Enfin si $\mathfrak{I}$ est une famille de sous-espaces totalement isotropes stables engendrant W, en effectuant ce raisonnement pour les éléments de $\mathfrak{I}$, on peut supposer que $I \in \mathfrak{I}$. Dans la suite de la démonstration, on supposera de plus I inclus dans $F + F^\perp$, quitte à remplacer I par $I \cap (F + F^\perp)$. La conclusion, valable avec $I \cap (F+F^\perp)$, le sera aussi avec I.

Pour la suite, on note $G = F + F^\perp$ et on surmonte d'un tchetch les objets quotient mudulo $K = F \cap F^\perp$: $\check{G} = \check{F} \oplus \check{F}^\perp = (F + F^\perp)/(F \cap F^\perp)$, muni de la forme bilinéaire induite toujours notée $< \cdot , \cdot >$, est non dégénéré. Notons également dans $\check{G}$, π_1 la projection sur $\check{F}$ parallèlement à $\check{F}^\perp$, π_2 la projection sur $\check{F}^\perp$ parallèlement à $\check{F}$ et $\check{F}' = \pi_2(\check{I})$. Comme $\check{F}$ et $\check{F}^\perp$ sont stables par H, π_1 et π_2 commutent avec l'action de H. Comme $\check{I} \cap \check{F} = \{0\}$, $(\pi_2)_{|\check{I}}$ est inversible, soit alors ϕ la composée :

$$\phi \ : \ \check{F}' \underset{\simeq}{\overset{(\pi_2)_{|\check{I}}^{-1}}{\longrightarrow}} \check{I} \overset{\pi_1}{\longrightarrow} \check{F}$$

La deuxième flèche est surjective car $\check{F} \subset \check{I} + \check{F}^\perp$. Remarquons que :

$$\check{I} = \{f + \phi(f) \ / \ f \in \check{F}'\}.$$

En effet, si $f \in \check{F}'$, notons $i = (\pi_2)_{|\check{I}}^{-1}(f) \in \check{I}$, alors $i = \pi_1(i) + \pi_2(i) = (\pi_1 \circ (\pi_2)_{|\check{I}}^{-1})(f) + f = \phi(f) + f$ donc $\phi(f) + f \in \check{I}$. Réciproquement, si $i \in \check{I}$, en notant $f = \pi_2(i) \in \check{F}'$, $i = \pi_1(i) + \pi_2(i) = (\pi_1 \circ (\pi_2)_{|\check{I}}^{-1})(f) + f = \phi(f) + f$. Introduisons l'espace

$$\check{J} = \{f - \phi(f) \ / \ f \in \check{F}'\},$$

$\check{J}$ est totalement isotrope, soit en effet f_1 et f_2 dans $\check{F}'$:

$$\begin{aligned} < \phi(f_1) - f_1, \phi(f_2) - f_2 > &= < f_1, f_2 > + < \phi(f_1), \phi(f_2) > - \underbrace{< \underbrace{f_1}_{\in \check{F}^\perp}, \underbrace{\phi(f_2)}_{\in \check{F}} >}_{=0} - \underbrace{< \underbrace{f_2}_{\in \check{F}^\perp}, \underbrace{\phi(f_1)}_{\in \check{F}} >}_{=0} \\ &= < f_1, f_2 > + < \phi(f_1), \phi(f_2) > + < f_1, \phi(f_2) > + < f_2, \phi(f_1) > \\ &= < \underbrace{\phi(f_1) + f_1}_{\in \check{I}}, \underbrace{\phi(f_2) + f_2}_{\in \check{I}} > = 0 \end{aligned}$$

D'autre part, $\check{J}$ est stable sousl'action de H, car $\check{F}'$ l'est et car ϕ commute avec l'action de H. Enfin, par construction, ϕ étant surjective de $\check{F}'$ sur $\check{F}$, $\check{F} + \check{F}' = \check{I} + \check{J}$, donc $F \subset I + J$ où I et J sont les images réciproques,encore totalement isotropes, stables, de $\check{I}$ et $\check{J}$ dans G. Par construction enfin, $F \subset F^\perp + I$, donc $F + F^\perp \subset F^\perp + I$, d'où l'inclusion inverse sur les orthogonaux : $F \cap I^\perp \subset K$. Le même raisonnement s'effectue pour J. □

On peut à présent énoncer le résultat principal de cette partie. On rappelle qu'on suppose X réduit à $\{0\}$; dans ce cas, $E = W \oplus W^\perp$.

Lemme 2 *Notons S le plus grand sous-espace semi-simple de E et R sont plus petit sous-espace de quotient semi-simple. Comme S est semi-simple, $S \cap R$ admet au moins un supplémentaire S' stable dans S. Soit S' l'un quelconque de ces supplémentaires ; on note $W' = S'^\perp$. Alors :*

- *S' est non dégénéré, donc $E = S' \overset{\perp}{\oplus} W'$, et $R \subset W' \subset W$* i.e. *$W^\perp \subset S' \subset S$. Autrement dit, tout supplémentaire stable S' de $S \cap S^\perp$ dans S contient $W^\perp$.*
- *R et W' sont chacun engendrés par leurs propres sous-espaces totalement isotropes stables.*
- *R n'admet pas de sous-espace stable F dont le quotient non dégénéré est irréductible,* i.e. *tel que $F/(F \cap F^\perp)$ est irréductible.*

• *W' est de dimension paire $2d'_{\mathrm{I}}$, où d'_{I} est la dimension de ses sous-espaces totalement isotropes stables maximaux.*

Démonstration. *Le premier point.*

Par le sous-lemme 3 page 109, $S \cap R = S \cap S^\perp$ donc S' est non dégénéré et $E = S' \overset{\perp}{\oplus} W'$. D'autre part, $R = S^\perp \subset S'^\perp = W'$. Il reste à montrer que $W' \subset W$. Montrons en fait que $W^\perp \subset S'$.

Par le sous-lemme 6 page 111, Γ agit de façon semi-simple sur $W^\perp$ donc $W^\perp \subset S$, de plus $W^\perp$ est non dégénéré, donc $W^\perp \cap (S \cap S^\perp) = \{0\}$. Il existe un supplémentaire stable S'_0 de $S \cap S^\perp$ dans S, contenant $W^\perp$: soit T un supplémentaire stable de $W^\perp + (S \cap S^\perp)$ dans S semi-simple, il suffit de poser $S'_0 = W^\perp \oplus T$. Soit π la projection canonique $S \to (S \cap S^\perp)$ et ϕ définie sur S par : $\phi_{|S \cap S^\perp} = \mathrm{Id}_{S \cap S^\perp}$ et : $\phi_{|S'_0} = (\pi_{|S'})^{-1} \circ \pi$. Comme $S \cap S^\perp$, S'_0 et S' sont stables sous l'action de Γ et que π commute avec cette action, il en est de même pour ϕ.

D'autre part, $S'^\perp \cap S'_0 = (S'^\perp \cap S) \cap S'_0 = (S^\perp \cap S) \cap S'_0 = \{0\}$, donc $S'^\perp + S'_0 = E$ et on peut introduire p_0 la projection de E, sur $S'^\perp$ parallèlement à S'_0. On prolonge ϕ à E par : $\phi_{|S_0'^\perp} = (\pi_0)_{|S_0'^\perp}$ (ceci redéfinit, de façon cohérente, $\phi_{|S \cap S^\perp} = \mathrm{Id}_{S \cap S^\perp}$). Comme $S'^\perp$ et S'_0 sont stables sous l'action de Γ, π_0 commute avec cette action et il en est de même de ϕ ; ϕ est de plus orthogonale par construction, donc ϕ envoie les sous-espaces totalement isotropes stables les uns sur les autres, et donc $\phi(W) = W$. Or $\phi(S'_0) = S'$, donc $W^\perp = \phi(W^\perp) \subset \phi(S'_0) = S'$, c'est le résultat rechercché.

Le deuxième point, pour l'espace R.

Montrons que R est engendré par ses propres sous-espaces totalement isotropes stables.

Affirmation. Soit T un supplémentaire de R dans W' et $\overline{T}$ le plus petit sous-espace Γ-stable contenant T, alors : $R \subset \overline{T}$. Par conséquent, si G sous-espace de W' vérifie $\pi(G) = \pi(W')$, alors $\overline{G} = W'$.

Montrons l'affirmation par l'absurde ; posons $R' = \overline{T} \cap R$ (R' est alors un sous-espace stable de E) et supposons que $R' \subsetneq R$. Soit π la projection canonique $W' \to W'/R'$ et $x \in \pi(\overline{T}) \cap \pi(R)$. On prend alors t dans $\overline{T}$ tel que $\pi(t) = x$ et r dans R tel que $\pi(r) = x$; alors $t \equiv r\ [R']$, donc $t \in R + R' = R$, donc $t \in R \cap \overline{T} = R'$ et donc enfin $x = 0$. Comme d'autre part $\overline{T} + R = W'$, on a : $\pi(\overline{T}) \oplus \pi(R) = \pi(W')$. Mais $\pi(T) \subset \pi(\overline{T})$ et $\pi(T) + \pi(R) = \pi(W')$, donc enfin $\pi(T) = \pi(\overline{T})$.

D'autre part π commute avec l'action de Γ, donc $\pi(\overline{T}) = \overline{\pi(T)}$ où $\overline{\pi(T)}$ est le plus petit sous-espace Γ-stable de $\pi(W')$ contenant $\pi(T)$. Par conséquent, $\pi(T) = \overline{\pi(T)}$ *i.e.* $\pi(T)$ est Γ-stable dans $\pi(W')$; $\pi(T)$ est de plus semi-simple car équivalent à T : π est bijective de T sur $\pi(T)$ car $T \cap R' = \{0\}$.

Soit alors $\{0\} \subsetneq \check{R}_1 \subsetneq \check{R}_2 \subsetneq \ldots \subsetneq \check{R}_{k-1} \subsetneq \check{R}_k = \pi(R)$ ($k \leq 1$ car $R' \subsetneq R$) une suite de Jordan-Hölder pour l'action de Γ sur $\pi(R) = R/R'$ et π' la projection canonique $(W'/R') = \pi(W') \to \pi(W')/\check{R}_{k-1}$. Par le même raisonnement que plus haut, appliqué à π', on a encore : $\pi'(\pi(T)) \oplus \pi'(\pi(R)) = \pi'(\pi(W'))$. Le premier terme $\pi'(\pi(T))$ est stable, comme $\pi(T)$, il est équivalent à $\pi(T)$ donc semi-simple car π' est invective sur $\pi(T)$. Le deuxième terme est $\pi'(\pi(R)) = \pi(R)/\check{R}_{k-1}$, simple par définition de $\check{R}_{k-1}$. Par conséquent, $\pi'(\pi(W')) = W'/(\pi')^{-1}(\check{R}_{k-1})$ est semi-simple ; or $E = S' \oplus W'$ où S' est semi-simple donc

$E/(\pi')^{-1}(\check{R}_{k-1}) \simeq S' \oplus (W'/(\pi')^{-1}(\check{R}_{k-1}))$ est également semi-simple. Par définition de R alors : $R \subset (\pi')^{-1}(\check{R}_{k-1})$. C'est absurde, donc $R = R'$, c'est la première partie de l'affirmation. La conséqunce mentionnée ensuite est immédiate.

On note désormais π la projection canonique $E \to E/(R+S)$. Comme $W' \subset W$, il existe une famille (qu'on peut prendre finie) $(I'_j)_{j=1}^q$ de sous-espaces totalement isotropes stables telle que $W' \subset (+_{j=1}^q I'_j)$; ces I'_j vérifient : $\pi(+_{j=1}^q I'_j) = \pi(W') = \pi(E)$, en effet, comme $W' + (R+S) = E$, $\pi(W') = \pi(E)$, donc $\pi(+_{j=1}^q I'_j) \subset \pi(E) = \pi(W') \subset \pi(+_{j=1}^q I'_j)$. On définit alors par récurrence la famille de sous-espaces totalement isotropes stables $(I_j)_{j=1}^q$ de la façon suivante :

- $I_1 = I'_1$.
- Supposons le k-uplet $(I_j)_{j=1}^k$ défini. L'action de Γ sur $E/(R+S)$ est semi-simple par définition de R, on prend alors un supplémentaire stable $\overline{I}_{k+1}$ de $\pi(+_{j=1}^k I'_j) \cap \pi(I'_{k+1})$ dans $\pi(I'_{k+1})$ et on pose $I_{k+1} = \pi^{-1}(\overline{I}_{k+1}) \cap I'_{k+1}$; c'est un sous-espace stable de I'_{k+1} totalement isotrope, donc un sous-espace totalement isotrope stable.

Les $(I_j)_{j=1}^q$ vérifient :

$$\forall k \leq q, \pi(+_{j=1}^k I_j) \cap \pi(I_{k+1}) = \{0\}$$

— les $(\pi(I_j))_{j=1}^q$ sont donc en somme directe — et :

$$\pi(+_{j=1}^k I_j) = \pi(+_{j=1}^k I'_j),$$

donc en particulier :

$$\oplus_{j=1}^q \pi(I_j) = \pi(+_{j=1}^q I_j) = \pi(E) = \pi(W').$$

Soient alors :

- p_1 la projection de E sur W', parallèlement à S',
- p_2 la projection de E sur S', parallèlement à W'.

Ces deux projections commutent avec l'action de Γ, elles définissent donc une équivalence de représentations, pour tout j de $[\![1,q]\!]$, respectivement entre $I_j/(S' \cap I_j)$ et $p_1(I_j)$ et entre $I_j/(W' \cap I_j)$ et $p_2(I_j)$. Sont donc encore équivalentes les représentations $p_1(I_j)/(W' \cap I_j)$ et $I_j/[(S' \cap I_j) \oplus (W' \cap I_j)]$ d'une part et $p_2(I_j)/(S' \cap I_j)$ et $I_j/[(W' \cap I_j) \oplus (S' \cap I_j)]$ d'autre part donc enfin :

$$p_1(I_j)/(W' \cap I_j) \simeq p_2(I_j)/(S' \cap I_j).$$

Or $p_2(I_j) \subset S'$ donc $p_2(I_j)$ est semi-simple, de même donc $p_2(I_j)/(S' \cap I_j)$ et enfin $p_1(I_j)/(W' \cap I_j)$. Notons enfin, pour tout j, π_j la projection canonique $p_1(I_j) \to p_1(I_j)/(W' \cap I_j)$.

On peut alors choisir pour tout j de $[\![1,q]\!]$ un supplémentaire stable F_j de $\pi_j(p_1(I_j) \cap R)$ dans $\pi_j(p_1(I_j))$; on note $G_j = \pi_j^{-1}(F_j)$ l'image réciproque de F_j dans $p_1(I_j)$, et R_j l'intersection $R \cap G_j$. Ces objets vérifient deux propriétés :

- Pour tout j de $[\![1,q]\!]$ et par construction de G_j, $G_j + (p_2(I_j) \cap R) = p_2(I_j)$, donc : $\pi(G_j) = \pi(G_j + (p_2(I_j) \cap R)) = \pi(p_2(I_j)) = \pi(I_j)$ et donc : $\oplus_{j=1}^q \pi(G_j) = \oplus_{j=1}^q \pi(I_j) = \pi(E) = \pi(W')$. Alors, par l'affirmation énoncée en début de démonstration, et $\oplus_{j=1}^q G_j$ étant un sous-espace de W' : $\overline{\oplus_{j=1}^q G_j} = W'$, où $\overline{\oplus_{j=1}^q G_j}$ est le plus petit sous-espace Γ-

stable contenant $\oplus_{j=1}^{q} G_j$. Les G_j étant Γ-stables on obtient :

$$\oplus_{j=1}^{q} G_j = W'.$$

• Par construction, pour tout j de $[\![1,q]\!]$: $\pi_j(G_j) \oplus \pi_j(p_1(I_j) \cap R) = \pi_j(p_1(I_j))$, donc : $R_j = G_j \cap R = [G_j \cap (R \cap \pi_1(I_j))] \xrightarrow{\pi_j} \{0\}$, donc $R_j \subset I_j \cap W'$. Par conséquent :

$$R_j \subset G_j \cap G_j^{\perp}.$$

En effet, soient $r \in R_j$ et $g \in G_j$; il suffit de vérifier : $R_j \subset G_j^{\perp}$. Comme $G_j \subset p_1(I_j)$, on trouve $i \in I_j$ et $s \in S'$ tels que $g = i + s$. Alors : $< r,g >=< r,i > + < r,s >$; $s \in S' \perp R$ donc $< r,s >= 0$; enfin $r \in R_j \subset I_j$ et I_j est totalement isotrope, d'où $< r,i >= 0$ et le résultat cheché.

On peut maintenant montrer que R est engendré par ses propres sous-espaces totalement isotropes stables. Choisissons pour tout j un supplémentaire qualconque S_j de R_j dans G_j : $G_j = R_j \oplus S_j$. Alors :

$$(+_{j=1}^{q} S_j) \cap R = \{0\}.$$

Soit en effet $x \in (+_{j=1}^{q} S_j) \cap R$; on peut écrire $x = \sum_{j=1}^{q} x_j$ avec $\forall j, x_j \in S_j$. Comme $x \in R$, $\pi(x) = 0$; mais par construction des I_j, $\oplus_{j=1}^{q} \pi(I_j) = \pi(W')$ et pour tout j, $S_j \subset I_j$, donc : $\forall j, \pi(x_j) = 0$ *i.e.* $\forall j, x_j \in R + S$. Comme $\forall j, x_j \in S_j \subset G_j \subset W'$, on a enfin : $\forall j, x_j \in (R + S) \cap W' = R$. D'autre part : $\forall j, R \cap S_j = R_j \cap S_j = \{0\}$, donc $\forall j, x_j = 0$, c'est le résultat recherché.

Rassemblons les résultats.

$$W' = +_{j=1}^{q} G_j = (+_{j=1}^{q} R_j) + (+_{j=1}^{q} S_j) \quad \text{avec : } +_{j=1}^{q} R_j \subset R \text{ et : } (+_{j=1}^{q} S_j) \cap R = \{0\}.$$

Par conséquent, $+_{j=1}^{q} R_j = R$ *i.e.* R est engendré par ses sous-espaces stables R_j. Pour terminer, comme $\forall j \in [\![1,q]\!], R_j \subset G_j \cap G_j^{\perp}$, les R_j sont totalement isotropes. L'espace R est engendré par ses sous-espaces totalement isotropes Γ-stables.

Le deuxième point, pour l'espace W.

Montrons que l'espace W' est engendré par ses propres sous-espaces totalement isotropes stables.

On utilise ici les résultats et notations du point précédent. Comme montré au début de celui-ci, pour tout j de $[\![1,q]\!]$, la représentation de Γ dans $\pi_j(p_1(I_j)) = p_1(I_j)/(I_j \cap W')$ est semi-simple. Il en est donc de même pour celle dans $\pi_j(G_j) \simeq G_j/(I_j \cap W' \cap G_j)$, donc encore pour celle dans G_j/R_j car $R_j = G_j \cap R \subset I_j \cap W' \cap G_j$. Par conséquent, $S_j \cap S_j^{\perp}$ admet dans S_j un supplémentaire S'_j stable modulo R_j. On notera :

$$G'_j = R_j \oplus S'_j, \quad \text{alors : } G'_j \cap G'^{\perp}_j = R_j.$$

Remarquons également que pour tout j, $S'^{\perp}_j \cap (R \cap S)$ est Γ-stable. Soit en effet $s \in S'^{\perp}_j \cap (R \cap S)$, $s' \in S'_j$ et $\gamma \in \Gamma$: $< \gamma(s),s' >=< s,\gamma^{-1}(s') >$. On choisit $\widetilde{s}' \in S'_j$ et $r \in R_j$ tels que $\gamma^{-1}(s') = \widetilde{s}' + r$, alors : $< \gamma(s),s' >=< s,\widetilde{s}' + r >=< s,\widetilde{s}' > + < s,r >= 0$. Le premier terme est nul car $s \in S'^{\perp}_j$, le deuxième car $s \in S = R \perp$ et $r \in R_j \subset R$. On a montré : $\Gamma.s \subset S_j'^{\perp}$. Comme R et S sont stables, $\Gamma.s \subset (R \cap S)$, donc enfin $S_j'^{\perp} \cap (R \cap S)$ est Γ-stable.

D'autre part, par définition de S, l'action de Γ sur $R \cap S$ est semi-simple ; on peut alors choisir, pour tout j de $[\![1,q]\!]$, un supplémentaire stable K_j de $S_j' \cap (R \cap S)$ dans $R \cap S$. L'isomorphisme musical $\flat \; : v \mapsto < v, \cdot >$ fournit alors un morphisme canonique de K_j sur $S_j'^{*}$. Ce morphisme est injectif car $K_j \cap S_j'^{\perp} = \{0\}$; il est surjectif car $K_j + S_j'^{\perp} = R \cap S$ et $S_j' \cap (R \cap S)^{\perp} = S_j' \cap (R + S) = S_j' \cap (G_j \cap (R + S)) \subset S_j' \cap R_j = \{0\}$. Les représentations de Γ dans K_j et $S_j'^{\perp}$ sont donc contragédientes. D'autre part, $S_j'^{\perp}$ et $[(S_j' + R_j)/R_j]^*$ sont canoniquement isomorphes car $R_j \perp S_j'$. Les représentations de Γ dans K_j et $[(S_j' + R_j)/R_j]^*$ sont donc contragédientes, celles dans K_j et $(S_j' + R_j)/R_j$ sont donc équivalentes, *i.e.* il existe φ orthogonal dans $\mathrm{L}(K_j,(S_j' + R_j)/R_j)$, commutant avec l'action de Γ. En composant φ avec l'isomorphisme canonique $S_j' \to (S_j' + R_j)/R_j)$, on obtient $\varphi' \in \mathrm{L}(K_j,S_j')$, orthogonal, commutant modulo R avec l'action de Γ. Par construction : $\forall v,w \in \mathbb{K}_j\,,\ < v,\varphi'(w) > = < \varphi'(v),\varphi'(w) >$. En effet, si on note φ_1 le premier isomorphisme $K_j \to [(S_j' + R_j)/R_j]$ et φ_1 celui $[(S_j' + R_j)/R_j] \to [(S_j' + R_j)/R_j]^*$, la propriété est vérifiée par φ : $< v,\varphi(w) > = [\varphi_1(v)](\varphi(w)) = < [\varphi_1(v)]^{\sharp},\varphi(w) > = < \varphi(v),\varphi(w) >$. On a donc le même résultat avec φ'.

Le graphe $\{v - 2\varphi'(v) \ / \ v \in K_j, \gamma \in \Gamma\}$ de $2\varphi'$ est alors stable modulo R sous l'action de Γ. De plus, J_j est totalement isotrope ; soit en effet $v \in J_j$ et $\gamma \in \Gamma$, alors :

$$\begin{aligned} < v - 2\varphi'(v),v - 2\varphi'(v) > &= \underbrace{< v,v >}_{=0 \text{ car } K_j \text{ est tot. isotrope.}} -4 < \varphi'(v),v > +4 < \varphi'(v),\varphi'(v) > \\ &= -4 < \varphi'(v),\varphi'(v) > +4 < \varphi'(v),\varphi'(v) > \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ce même espace J_j est orthogonal à R_j car $K_j \subset (R \cap S) \subset R^{\perp} \subset R_j^{\perp}$ et $S_j' \subset R_j^{\perp}$. Finalement :

$$J_j + R_j \text{ est totalemet isotrope, stable et : } J_j + R_j \subset (K_j + S_j') + R_j \subset W'.$$

D'autre part introduisons, pour tout j de $[\![1,q]\!]$, $J_j' = G_j \cap G_j^{\perp}$. C'est un espace totalement isotrope, Γ-stable et :

$$\begin{aligned} \pi(J_j') + \pi(J_j) &= \pi(G_j \cap G_j^{\perp}) + \pi(\{v - 2\varphi'(v) \ / \ v \in K_j, \gamma \in \Gamma\}) \\ &= \pi(R_j \oplus (S_j \cap S_j^{\perp})) + \{\underbrace{\pi(v)}_{=0} -2\pi(\underbrace{\varphi'(v)}_{\text{décrit } S_j'}) \ / \ v \in K_j, \gamma \in \Gamma\} \\ &= \pi(S_j \cap S_j^{\perp}) + \pi(S_j') \\ &= \pi((S_j \cap S_j^{\perp}) \oplus S_j') \\ &= \pi(S_j) \\ &= \pi(R_j \oplus S_j) \\ &= \pi(G_j) \\ &= \pi(I_j). \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$+_j(\pi(J'_j) + \pi(J'_j)) = +_j\pi(I_j) = \pi(W').$$

De nouveau par l'affirmation posée en début de démonstration, ceci implique : $+_j(J'_j + J_j) = W'$. L'espace W' est engendré par ses propres sous-espaces totalement isotropes stables.

Le troisième point.

Préliminaire. L'espace R est engendré par ses sous-espaces totalement isotropes stables $(R_j)_{j=1}^q$ introduits plus haut. On peut en fait, en conservant cette propriété, remplacer les $(R_j)_{j=1}^q$ par des espaces $(\widetilde{R}_j)_{j=1}^q$ plus petits ; cette substitution sera utile dans la suite.

On a introduit, pour tout j, le sous-espace G_j de W' et la décomposition : $G_j = R_j \oplus S_j$ où $R_j = G_j \cap R$. Notons alors $\widetilde{G}_j$ le plus petit sous-espace Γ-stable contenant S_j ; c'est un sous-espace totalement isotrope stable, inclus dans G_j. On constate facilement que les $(\widetilde{G}_j)_{j=1}^q$ vérifient, comme les $(G_j)_{j=1}^q$: $\pi(+_j\widetilde{G}_j) = \pi(W')$. Il suit, par le même raisonnement que celui effectué sur les G_j, que R est engendré par les $(\widetilde{G}_j \cap R)_{j=1}^q$. On pose donc pour tout j, $\widetilde{R}_j = \widetilde{G}_j \cap R \subset R_j$; ce sont des sous-espaces isotropes stables de R, engendrant R. De plus ils vérifient :

$$\widetilde{G}_j = \widetilde{R}_j \oplus S_j \ ; \quad (H \text{ stable et } H \subset \widetilde{G}_j) \Rightarrow H = \widetilde{G}_j \text{ ou } H \subset \widetilde{R}_j.$$

Preuve du deuxième point, par l'absurde.

Avertissement : on travaille ici dans R. Notamment, si $A \subset R$, $A^\perp$ désigne l'orthogonal de A dans R.

Soit F un sous-espace de R tel que $F/(F \cap F^\perp$ est irréductible ; prenons F' un supplémentaire quelconque de $K = F \cap F^\perp$ dans F. D'après le sous-lemme 7 page 116, on trouve I et J deux sous-espaces totalement isotropes stables tels que $F \subset I + J$ et $K \subset I \cap J$. On peut de plus choisir I dans une famille de sous-espaces totalement isotropes stables, génératrice, quelconque ; on peut donc supposer que I est l'un des $\widetilde{R}_j$, $j \in [\![1,q]\!]$. Quitte à permuter les indices, on supposera que $I = \widetilde{R}_1$. Toujours d'après le sous-lemme 7, $I = \widetilde{R}_1$ vérifie : $F \cap \widetilde{R}_1^\perp = F \cap I^\perp \subset K$, par conséquent : $F' \cap \widetilde{R}_1^\perp = \{0\}$ et donc : $F'^\perp + \widetilde{R}_1 = R$. Enfin, comme $\widetilde{R}_1 \subset \widetilde{G}_1$: $(F'^\perp \cap \widetilde{G}_1) + \widetilde{R}_1 = \widetilde{G}_1$. On peut donc choisir un sous-espace $\widetilde{S}_1$ de $F'^\perp$, supplémentaire de $\widetilde{R}_1$ dans $\widetilde{G}_1$. On a alors, comme avec le triplet $(\widetilde{G}_1,\widetilde{R}_1,S_1)$:

- $\widetilde{G}_1 = \widetilde{R}_1 \oplus \widetilde{S}_1$,
- par conséquent, $\widetilde{G}_1$ est le plus petit sous-espace stable contenant $\widetilde{S}_1$,
- $\widetilde{R}_1 \subset \widetilde{G}_1 \cap \widetilde{G}_1^\perp$.

Supposons que F' n'est pas réduit à $\{0\}$. Alors $\widetilde{R}_1 = I \not\perp F'$ donc $\widetilde{G}_1 \not\perp F'$; comme d'autre part $\widetilde{G}_1$ est le plus petit sous-espace stable contenant $\widetilde{S}_1$, on trouve γ dans Γ, s dans $\widetilde{S}_1$ et f dans F' tels que : $<\gamma.s,f> \neq 0$. Alors : $<s,\gamma.f> \neq 0$; or on peut écrire $\gamma.f = f' + k$ où $f' \in F'$ et $k \in K$, donc, avec ces vecteurs : $<s,f'> + <s,k> \neq 0$. Mais $<s,f'>= 0$ car $\widetilde{S}_1 \perp F'$ et $<s,k>= 0$ car $K \subset I = \widetilde{R}_1 \perp \widetilde{S}_1$. C'est absurde, donc $F' = \{0\}$, *i.e.* $F = F \cap F^\perp$, *i.e.* F est totalement isotrope. C'est le résultat recherché.

Le quatrième point.

Soit I un sous-espace totalement isotrope stable maximal de R et $\check{I}$ son image dans $R/(R \cap S)$. Comme $R \cap S = R \cap R^\perp$ est stable et que I est maximal, I contient nécessairement $R \cap S$. On note ici $d = \dim I$. Comme R n'a pas de sous-espace F tel que $F/(F \cap F^\perp)$ est irréductible non trivial, et par le sous-lemme 6 page 111 :

$$\dim[R/(R \cap S)] = 2 \dim \check{I} = 2d - 2 \dim(R \cap S).$$

Par conséquent, $\dim R = 2d - \dim(R \cap S)$ et enfin :

$$2d = \dim R + \dim(R \cap S) = \dim R + \dim(W'/R) = \dim W'.$$

D'autre part, I est un sous-espace totalement isotrope stable de dimension d de R, donc de W'. Comme W' est non dégénéré, ses sous-espaces totalement isotropes sont de dimension au plus moitié, *i.e.* au plus d. L'espace I est donc nécessairement totalement isotrope stable, *maximal*. La dimension, commune par le sous-lemme 4 page 111, des sous-espaces totalement isotropes stables maximaux de W' est donc $d = \frac{1}{2} \dim W'$, c'est le quatrième point. □

I.5 Récapitulation : une décomposition de E

Combiné avec un rappel de résultats classiques sur les représentations réelles semi-simples de groupes de Lie, le lemme 2 fournit une décomposition remarquable de E — dans le cas $X = \{0\}$ —, donc de $X^{\perp}/X$ dans le cas général. C'est sur elle que se fondera la construction de coordonnées locales des parties suivantes.

I.5.1 Rappel de résultats classiques

On rassemble ici sous forme d'une proposition-fleuve des résultats classiques de la théorie des groupes de Lie. Cette proposition classifie les composantes isotypiques de la représentation naturelle dans E d'un sous-groupe Σ de $SO(E,< \cdot, \cdot >)$, où E est un espace vectoriel réel muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée $< \cdot, \cdot >$, quand cette représentation naturelle est semi-simple. Attention, il s'agit encore d'un exposé *ad hoc* ; d'une part il n'est que largement partiel, d'autre part il effectue des regroupements arbitraires, utiles seulement pour l'exploitation qu'on veut en faire et sans justification intrinsèque.

La proposition est présentée sans démonstration. Elle repose sur la classification des actions semi-simples d'un groupe de Lie sur un espace vectoriel complexe, intégralement effectuée par J.Tits : *cf* [T67]. Sur la base de cette classification, il «suffit» de complexifier E et d'utiliser le fait qu'une forme non dégénérée $< \cdot, \cdot >$ est préservée pour obtenir la présente classification. Celle-ci peut également s'obtenir de manière directe, par des raisonnements élémentaires mais un peu longs.

Proposition 2 *Soit $(E,< \cdot, \cdot >,\Sigma)$ un R-espace vectoriel E de dimension finie muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée $< \cdot, \cdot >$ et d'un sous-groupe Σ de $SO(E,< \cdot, \cdot >)$ dont la représentation naturelle dans E est semi-simple. Soit G une composante isotypique de E et W le sous-espace de E engendré par les sous-espaces totalement isotropes stables, alors :*

- *G est non dégénéré ou G est totalement isotrope,*
- *$G \subset W$ ou $G \subset W^{\perp}$,*

* *G est de l'un des cinq types suivants :*

$\boxed{\textbf{types 1a et 1b}}$ $G = \overset{\perp}{\underset{1\leq i\leq N}{\oplus}} G_i$, *avec les propriétés suivantes :*

  * *les G_i sont chacun stables, irréductibles, non dégénérés, de signature (p,q) ou (q,p) avec (p,q) la signature de G_1*
  * *il existe un N-uplet $(\varphi_i)_{i=1}^N \in \prod_{i=1}^N \mathrm{L}(G_1,G_i)$ de morphismes orthogonaux — ou antiorthogonaux, selon la signature de chaque G_i —, qui commutent avec l'action de Σ,*
  * *enfin l'action de Σ sur G_1 stabilise $<\cdot,\cdot>_{|G_1}$, et éventuellement d'autres formes bilinéaires réflexives,* i.e. *symétriques ou alternées, non dégénérées.*

La composante sera dite du $\boxed{\textbf{type 1a}}$ *si l'action de Σ sur G_1 ne stabilise que les formes proportionnelles à $<\cdot,\cdot>_{|G_1}$.*

Dans ce cas : *Il existe alors un unique couple (P,Q) d'entiers tels que : $G = \left(\overset{P}{\underset{i=1}{\oplus}} G_i\right) \oplus \left(\overset{P+Q}{\underset{i=P+1}{\oplus}} G_i\right)$ où : $i \in [\![1,P]\!] \Leftrightarrow \varphi_i$ est orthogonal (et donc G_i est de signature (p,q)) et $i \in [\![P+1,P+Q]\!] \Leftrightarrow \varphi_i$ est antiorthogonal (et donc G_i est de signature (q,p)). Comme représentation de Σ :*

$$(G,<\cdot,\cdot>) \simeq (G_1,<\cdot,\cdot>_{|G_1}) \otimes (\mathbb{R}^N,<\cdot,\cdot>_{P,Q}),$$

où $(\mathbb{R}^N,<\cdot,\cdot>_{P,Q})$ est la représentation triviale de Σ dans $\mathbb{R}^N$ muni de la forme quadratique $<\cdot,\cdot>_{P,Q} = \sum_{i=1}^P \mathrm{d}x_i^2 - \sum_{i=P+1}^{P+Q} \mathrm{d}x_i^2$. La paire $\{P,Q\}$ est la signature, définie à l'ordre près de P et Q, du facteur tensoriel trivial de la composante isotypique G.

En particulier : *G contient des sous-espaces totalement isotropes stables* ssi *$\{P,Q\} \neq \{N,0\}$; dans ce cas, G est engendré par eux.*

La composante sera dite du type $\boxed{\textbf{type 1b}}$ *si l'action de Σ sur G_1 stabilise des formes réflexives non proportionnelles à $<\cdot,\cdot>_{|G_1}$. Dans ce cas, la signature de G_1 est nécessairement (p,p) et l'action de Σ sur G_1 commute alors avec une ou plusieurs structures supplémentaires.*

Par exemple, elle stabilise, outre $<\cdot,\cdot>_{|G_1}$, une forme bilinéaire symétrique non dégénérée indépendante de $<\cdot,\cdot>_{|G_1}$ ssi *elle commute avec une structure complexe $J : J, \in \mathrm{L}(G_1,G_1)$, $J^2 = -\mathrm{Id}$, telle qu'il existe une base β de G_1 où : $\mathrm{Mat}_\beta(<\cdot,\cdot>) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Mat}_\beta(J) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. [voir à ce sujet, outre la référence de J. Tits donnée plus haut, dans le chapitre 2 de cette thèse, le théorème 2 page 62 et la définition 4 page 65.]*

Si elle stabilise, outre $<\cdot,\cdot>_{|G_1}$, une forme alternée non dégénérée ω, alors elle commute, selon les cas, avec une certaine structure complexe J ou paracomplexe J^+. [voir encore à ce sujet, au chapitre 2, le théorème 6 page 88 et les définitions 11 page 86, 14 page 92 et 16 page 94.]

Dans ce cas : *Pour* tout *couple (P,Q) tel que $P+Q = N$, comme représentation de σ :*

$$(G,<\cdot,\cdot>) \simeq (G_1,<\cdot,\cdot>_{|G_1}) \otimes (\mathbb{R}^N,<\cdot,\cdot>_{P,Q}).$$

En effet, chaque morphisme φ_i peut être changé en $\varphi_i \circ J^2$ ou $\varphi_i \circ J^+$ selon les cas

et changer de nature vis-à-vis de $< \cdot , \cdot >$. Le facteur tensoriel trivial peut donc être choisi de signature quelconque.
En particulier : *G est engendré par ses sous-espaces totalement isotropes stables.*

types 2a et 2b $G = \overset{\perp}{\underset{1\leq i\leq N}{\oplus}} (G_i \oplus G'_i)$, *avec les propriétés suivantes :*

* *les G_i et G'_i sont de même dimension, chacun stables, irréductibles, totalement isotropes, de somme $G_i \oplus G'_i$ non dégénérée,*
* *il existe un N-uplet $(\varphi_i)_{i=1}^N \in \prod_{i=1}^N \mathrm{L}(G_1,G_i)$ de morphismes orthogonaux — ou antiorthogonaux, selon la signature de chaque G_i —, qui commutent avec l'action de Σ,*
* *enfin l'action de Σ sur G_1 préserve une ou plusieurs — au plus alors trois linéairement indépendantes — formes alternées non dégénérées et aucune forme bilinéaire indépendante de celles-ci.*

Notons alors ω la, ou une des, formes alternées non dégénérées stables sur G_1.
Dans ce cas : *L'isomorphisme ψ de G'_1 dans G_1 défini par*

$$\psi \ : \ G'_1 \xrightarrow{\flat_{<\cdot,\cdot>}} G_1^* \xrightarrow{\sharp_\omega} G_1$$

commute avec l'action de Σ ; G_1 et G'_1 sont donc deux représentations équivalentes (et contragédientes à la fois). Il en est de même, pour tout i, par composition avec les φ_i de G_i et G'_i. Comme représentation de Σ :

$$(G,< \cdot , \cdot >) \simeq \big((G_1,\omega) \otimes (\mathbb{R}^{2N}, \omega_{\mathrm{can}}), \omega \otimes \omega_{\mathrm{can}}\big) ,$$

où $(\mathbb{R}^{2N},\omega_{\mathrm{can}})$ désigne la représentation triviale de Σ dans $\mathbb{R}^{2N}$ muni de sa forme alternée canonique ω_{can}). Notons qu'alors la forme produit tensoriel $\omega \otimes \omega_{\mathrm{can}}$ est symétrique.
En particulier : *G est engendré par ses sous-espace totalement isotropes stables.*

Notons enfin qu'on peut distinguer le **type 2a** *où une seule forme alternée non dégénérée, à proportionnalité près, est préservée sur G_1 et le* **type 2b** *où il y en a plusieurs —des structures particulières commutent alors avec l'action de Σ.*

type 3 *G est totalement isotrope et : $G = \underset{1\leq i\leq N}{\oplus} G_i$, avec les propriétés suivantes :*

* *les G_i sont tous de même dimension et sont chacun stables, irréductibles*
* *il existe un N-uplet $(\varphi_i)_{i=1}^N \in \prod_{i=1}^N \mathrm{L}(G_1,G_i)$ d'isomorphismes qui commutent avec l'action de Σ,*
* *enfin l'action de Σ sur G_1 ne préserve aucune forme bilinéaire réflexive.*

Remarque : *Dans ce cas, nécessairement, E contient une composante isotypique G' vérifiant :*

$$\dim G' = \dim G,\ G' \text{ est totalement isotrope et } G \oplus G' \text{ est non dégénéré.}$$

Alors l'isomorphisme $\flat \ : \ G \xrightarrow{\simeq} G'^*$ commute avec l'action de Σ et donc la représentation de Σ sur G' est la contragédiente de celle sur G. Ces deux représentations ne sont pas *équivalentes car l'action de Σ sur G_1 ne préserve aucune forme bilinéaire réflexive.*

Donnons un aperçu matriciel des composantes isotypique des différents types. Cet aperçu ne prétend pas restituer toute la substance de la proposition. On note ici $\mathfrak{s}$ l'algèbre de Lie de Σ.

On peut trouver dans une composante de type 1 une base dans laquelle :

$$\mathrm{Mat}(<\cdot,\cdot>) = \begin{pmatrix} \pm I_{p,q} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pm I_{p,q} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad s \in \mathfrak{s} \Rightarrow \mathrm{Mat}(s) = \begin{pmatrix} S & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S \end{pmatrix},$$

où la représentation naturelle de $\{S(s) \ / \ s \in \mathfrak{s}\} \subset \mathfrak{so}_{p,q}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^{p+q}$ est simple.

On peut trouver dans une composante de type 2 une base dans laquelle :

$$\mathrm{Mat}(<\cdot,\cdot>) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} I_n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & I_n \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} I_n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & I_n \end{matrix} & 0 \end{array}\right) \quad \text{et}$$

$$s \in \mathfrak{s} \Rightarrow \mathrm{Mat}(s) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} S & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} -{}^tS & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -{}^tS \end{matrix} \end{array}\right),$$

où $n = 2n'$ est pair et où la représentation naturelle de $\{S(s) \ / \ s \in \mathfrak{s}\} \subset \mathfrak{sp}(\mathbb{R}^{2n'},\omega_{\mathrm{can}})$ dans $\mathbb{R}^{2n'}$ est simple et ne préserve aucune forme bilinéaire symétrique de $\mathbb{R}^{2n'}$.

Les composantes de type 3, totalement isotropes, s'associent par paires «duales». On peut trouver une base d'une telle paire, constituée d'une base de chacune des deux composantes isotypiques, dans laquelle les matrices de $<\cdot,\cdot>$ et de $s \in \mathfrak{s}$ ont la même forme que ci-dessus. Cette fois cependant, la décomposition de l'espace en deux sous-espaces totalement isotropes est canonique (ce sont les deux composantes isotypiques) , n est quelconque et la représentation naturelle de $\{S(s) \ / \ s \in \mathfrak{s}\} \subset \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n,\omega_{\mathrm{can}})$ dans $\mathbb{R}^n$ est simple et ne préserve aucune forme bilinéaire symétrique ou alternée de $\mathbb{R}^n$.

I.5.2 La décomposition annoncée

On exploite les données de la précédente proposition-fleuve par l'intermédiaire d'un dernier résultat auxiliaire. On reprend les objets usuels $(E,<\cdot,\cdot>,\Gamma)$, X, W, R, S et on suppose toujours $X = \{0\}$. Ce résultat est essentiellement une suite de remarques simples ; il est donné sans démonstration.

Sous-lemme 8 *Soit $S = \oplus_{j=1}^q F_j$ la décomposition de S en composantes isotypiques. Alors : $S \cap R = \oplus_{j=1}^q (F_j \cap R)$. Par conséquent, S' est un supplémentaire stable de $S \cap R$ dans S*

ssi $S' = \oplus_{j=1}^{q} F'_j$, *où pour tout* j, F'_j *est un supplémentaire stable de* $F_j \cap R$ *dans* F_j.

Par conséquent, si F_j *est une composante isotypique, soit* $F_j \subset R \cap S$, *soit* $F_j/(F_j \cap R)$ *est non trivial ; ce quotient est alors d'un des cinq types possibles donnés par la proposition 2 qui précède.*

Enfin, pour tout j, $F_j \subset W$ *ou* $F_j \subset W^{\perp}$, *plus précisément :*

• $F_j \subset W^{\perp}$ ssi F_j *est non dégénérée, de type 1a, avec un facteur tensoriel trivial de signature* $\{N{,}0\}$,

• $F_j \subset W$ *dans tous les autres cas.*

Récapitulation.

Rappel : On suppose toujours $X = \{0\}$. Dans un espace E où ce n'est pas le cas, l'exposé s'applique donc au quotient $X^{\perp}/X$. Cette récapitulation est en outre un xposé *ad hoc*, en vue de la construction des coordonnées. Elle n'est pas nécessairement l'exposé algébrique le plus canonique sur la situation.

Récapitulons la plupart des résultats dans un dernier lemme. Dans ces dernières pages, les sous-espaces canoniques sont désignés par les capitales simple, les sous-espaces non nécessairement canoniques sont accentués : repérés par «prime» ou «seconde».

Lemme 3 *L'espace* E *sur lequel agit* Γ *est muni des sous-espaces canoniques* W, $W^{\perp}$, S *et* $R = S^{\perp}$, *et* S *de sa décomposition canonique* $S = \oplus_{j=1}^{q} F_j$ *en composantes isotypiques. On choisit alors un supplémentaire stable* quelconque $S' = \oplus_{j=1}^{q} F'_j$ *de* $S \cap R$ *dans* S, *où pour tout* j, F'_j *est un supplémentaire stable* quelconque *de* $F_j \cap (S \cap R)$ *dans* F_j. S' *est non dégénéré. On note* $W' = S'^{\perp}$. *Alors* E *admet la décomposition, non nécessairement unique,* Γ*-stable :*

$$\boxed{E = S' \overset{\perp}{\oplus} W'}$$

avec :

• $\begin{cases} W^{\perp} \subset S' \subset S \\ R \subset W' \subset W \end{cases}$

• W' *est de dimension paire, il est engendré par ses sous-espaces totalement isotropes stables, qui sont de dimension moitié,*

• *le plus grand sous-espace semi-simple de* W' *est* $R \cap S$, *totalement isotrope,*

• S' *est semi-simple, non dégénéré et sa structure est donc décrite par la proposition 2 page 124.*

Matriciellement. Notons $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de Γ et $d_{\mathbf{S \cap R}}$ la dimension de $S \cap R$. Il existe par exemple une base de E dans laquelle :

$$\mathrm{Mat}(< \cdot , \cdot >) = \begin{array}{c} \overbrace{\qquad\quad}^{S'}\ \ \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{W'} \\ \left(\begin{array}{c||c|c|c} M_{S'} & 0 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline\hline 0 & 0 & 0 & I_{d_{\mathbf{S}\cap\mathbf{R}}} \\ \hline & 0 & M_{W'} & 0 \\ \cline{2-4} 0 & I_{d_{\mathbf{S}\cap\mathbf{R}}} & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{S} \\ \qquad\quad \underbrace{\qquad\qquad\quad}_{R} \end{array} \qquad \text{et :}$$

$$g \in \mathfrak{g} \Rightarrow \mathrm{Mat}(g) = \left(\begin{array}{c||c|c|c} G_{S'} & 0 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline\hline 0 & \begin{matrix} S_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_n \end{matrix} & * & * \\ \hline & 0 & G_{W'} & * \\ \cline{2-4} 0 & 0 & 0 & \begin{matrix} -{}^tS_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -{}^tS_k \end{matrix} \end{array}\right).$$

Les matrices $M_{S'}$ et $G_{S'}$ sont diagonales par blocs, avec des blocs correspondant à une décomposition de S' en composantes irréductibles. La forme de ces blocs est alors donnée en fin de section I.5.1 page 127. Le quotient $R/(R \cap S)$ est engendré par ses sous-espaces totalement isotropes stables maximaux et ceux-ci y sont de dimension moitié. La base de E peut donc être telle que les matrices $M_{W'}$ et $G_{W'}$ soient de la forme donnée en fin de section I.3.3 page 115. (On aurait pu aussi proposer directement de telles matrices sur W' entier.) Enfin, la représentation naturelle des algèbres de matrices $\{S_i(g) \ / \ g \in \mathfrak{g}\}$ dans $\mathbb{R}^{d_i}$ (d_i = taille des matrices) est semi-simple pour tout i.

Naturellement, si E est un espace où X n'est pas réduit à $\{0\}$, il existe une base de E dans laquelle :

$$\mathrm{Mat}(< \cdot , \cdot >) = \begin{array}{c} \overbrace{\qquad\qquad\quad}^{X^\perp} \\ \overbrace{\quad}^{X}\qquad\qquad\quad \\ \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & I_{d_{\mathbf{X}}} \\ \hline 0 & M & 0 \\ \hline I_{d_{\mathbf{X}}} & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \quad \text{et : } g \in (g) \Rightarrow \mathrm{Mat}(g) = \left(\begin{array}{c|c|c} * & * & * \\ \hline 0 & G & * \\ \hline 0 & 0 & * \end{array}\right),$$

où M et G sont respectivement les matrices de $< \cdot , \cdot >$ et de g sur $X^\perp/X$; elles sont du type donné plus haut.

Précisions. On peut également expliquer, avec les objets introduits, comment s'expriment W et $W^\perp$. Introduisons deux notations suplémentaires.

- $Y' = \mathrm{vect}\{F'j \ / \ F'_j$ de type 1a ou 1b selon les notations de la proposition 2 page 124.$\} \subset S'$

• $W'' = \text{vect}\{F'j \ / \ F'_j$ est de type 2a, 2b ou 3 selon les notations de la proposition 2 page 124.$\} \subset S'$
Alors E admet la décomposition, non nécessairement canonique, en sous-espace stables :

$$E = W' \overset{\perp}{\oplus} W'' \overset{\perp}{\oplus} Y',$$

avec :

$$\begin{cases} Y' = (Y' \cap W) \oplus (Y' \cap W^{\perp}) & \text{(Cette décomposition de } Y' \text{ est, elle, canonique.)} \\ W = W' \overset{\perp}{\oplus} W'' \overset{\perp}{\oplus} (Y' \cap W) \\ W^{\perp} = Y' \cap W^{\perp} \end{cases}$$

Précisons la première égalité :

$Y' \cap W^{\perp} = \text{vect}\{F'j \ / \ F_j$ est non dégénérée et F'_j est de type 1a, avec un facteur tensoriel trivial de signature $\{N,0\}$ selon les notations de la proposition 2 page 124.$\}$

$$Y' \cap W = \text{vect}\{F'j \ / \ F'_j \text{ est dans tout autre cas.}\}$$

De plus :

• W'' est semi-simple, non dégénéré, somme de composantes isotypiques de deux types :
  * Des composantes de type 2 selon les notation de la proposition 2. Ces composantes sont non dégénérées et admettent une décomposition, non unique, en somme de deux sous-espaces totalement isotropes stables.
  * Des composantes de type 2 selon les notation de la proposition 2. Ces composantes sont totalement isotropes. Elles s'associent par paires de deux représentations contragédientes ; la somme des deux composantes d'une telle paire est alors non dégénérée, orthogonale à toutes les autres composantes.

C'est espace admet une décomposition $W'' = I'' \oplus J''$ en deux sous-espaces totalement isotropes stables semi-simples, les composantes isotypiques totalement isotropes étant contenues dans I'' ou J'', celles non dégénérées étant «à cheval» sur les deux.

• Y' est semi-simple, somme de composantes isotypiques non dégénérées, du type $\overset{\perp}{\oplus}_i G_i$, les G_i stables, irréductibles, non dégénérés.

N.B. Cette décomposition, partiellement artificielle, de S' en $W'' \overset{\perp}{\oplus} Y'$ est essentiellement donnée en vue de la suite ; on le verra par exemple en début de partie II.

I.5.3 Pour reprendre cette étude ...

Comme répété plusieurs fois, le lemme algébrique proposé ici n'est qu'un premier éclairage, partiel d'une part et en partie arbitraire d'autre part, du problème qu'il aborde. Nous ajoutons ici quelques remarques en vue d'un éventuel traitement plus canonique de la situation.

• Un exposé définitif devrait considérer tout l'espace E et pas seulement le quotient $X^{\perp}/X$, autrement dit, ne pas se restreindre au cas $X = \{0\}$. Est-il souhaitable ou pas dans cette perspective de traiter d'abord le quotient $X^{\perp}/X$, puis tout l'espace? Ce n'est pas évident.

• Dans le cas où on choisirait de garder le présent exposé comme étape, une étape suivante naturelle est d'introduire le plus petit sous-espace Γ-stable X' de $X^{\perp}$ tel que

$\pi(X') = \pi(X^\perp)$. On obtient alors le nouveau réseau :

$$\{0\} \subset X' \cap X'^\perp \left\{ \begin{array}{l} X' \\ X \subset X'^\perp \end{array} \right\} \subset X' + X'^\perp \subset E$$

qui possède quelques propriétés intéressantes, permettant de poursuivre l'étude.

De façon générale dans l'étude d'actions de groupes stabilisant des drapeaux, les espaces du type de X' sont intéressants à exhiber. Si l'étude fait alors apparaître de nouveaux drapeaux stables, on peut même alors itérer le raisonnement (exhiber à nouveau un espace du type de X'), pour espérer dégager par récurrence la structure de la représentation.

• Un intérêt du drapeau $\{0\} \subset X \subset X^\perp \subset E$ est lié au fait que $X^\perp = W + W^\perp$. Les vecteurs hors de $X^\perp$ ne sont donc, ni engendrés par les espaces totalement isotropes stables, ni orthogonaux à tous ces derniers. Ceci fournit des informations sur l'action de Γ hors des quotients successifs $X/\{0\}$, $X^\perp/X$ et $E/X^\perp$. Par exemple, on obtient qu'en un sens, dans le cas où $X \neq \{0\}$, la diagonale du bloc supérieur droit de la matrice générique de $\mathfrak{g}$ (voir page 129) est «pleine».

• L. Bérard Bergery m'a tout récemment proposé une autre manière de traiter le problème depuis le départ. on peut considérer S et R respectivement le plus grand sous-espace semi-simple et le plus petit sous-espace de quotient semi-simple *de l'espace* E, puis recommencer ce travail dans le quotient, non dégénéré, R/S. On itère le procédé par récurence, un nombre fini de fois car la dimension de E est finie ; il se dégage un drapeau canonique $\{0\} \subset \widetilde{X} \subset \widetilde{X}^\perp \subset E$. Il est remarquable alors de constater que : $X \subset \widetilde{X}$. Quoi qu'il en soit la réflexion sur ce point est en chantier et nous ne la traiterons pas plus avant ici.

• Sur un principe semblable, la bonne manière, s'il y en a une, de traiter W' serait sans doute d'effectuer sur lui le raisonnement qui a été tenu ici pour E. On obtient alors une décomposition canonique de W' qui permet d'itérer le raisonnement. Par récurrence, on dégage ainsi la structure de la représentation de Γ sur W'. Le lemme 1 (*cf.* page 113) est en effet particulièrement insatisfaisant du point de vue de la théorie des représentations.

II Un lemme analytique

II.1 Introduction, notations, rappel sur le travail de Walker et mise à profit du lemme algébrique

Comme exposé dans l'introduction générale, cette partie et la suivante sont directement consacrées à la construction des coordonnées annoncées. La présente introduction reprend les résultats fournis par le lemme algébrique qui précède ; elle les applique à la situation géométrique qui nous occupe : les variétés pseudo-riemanniennes localement réductibles, indécomposables. Elle introduit notamment ainsi plusieurs familles de feuilletages de $\mathcal{M}$ qui seront au cœur de la problématique du reste du chapitre.

Cette partie est ensuite consacrée à un résultat intermédiaire qui jouera un rôle-clé dans la construction des coordonnées. Ce résultat a, formellement, une relative autonomie par rapport au théorème sur les coordonnées lui-même. Aussi en avons-nous fait, sous forme de lemme, l'objet d'une partie propre.

Commençons par introduire le système de notations qui sera celui du reste du chapitre.

II.1.1 Quelques conventions générales

De façon générale, sur une variété $\mathcal{M}$, on désignera :

- par des *minuscules latines*, les point de $\mathcal{M}$: m, p...

- par des *CAPITALES MAIGRES* les vecteurs ou les champs de vecteurs : X,Y,Z,A,V...

- par des *minuscules latines*, éventuellement indexées, des fonctions coordonnées : x,y_i,z...

- dans le cas où on dispose d'un système complet de coordonnées, par les *CAPITALES MAIGRES CORRESPONDANTES* les vecteurs-coordonnées : $\partial/\partial x = X$, $\partial/\partial y = Y$...

- par des **CAPITALES GRASSES** les distributions de sous-espaces dans le fibré tangent ou les sous-espaces d'un espace tangent en un point : $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$; dans le cas des distributions, la même lettre, indexée par un point m, désigne la fibre en m de cette distribution : $\mathbf{X}_m \subset T_m\mathcal{M}$, $\mathbf{Y}_m \subset T_m\mathcal{M}$,

- dans le cas où une distribution $\mathbf{A}$ est intégrable, par la $\mathcal{CAPITALE\ CURSIVE}$ correspondante, le feuilletage intégral, ici $\mathcal{A}$; la même lettre, indexée par un point m, désignant la feuille de ce feuilletage passant par le point m : $\mathcal{A}_m$.

- par des $\mathfrak{CAPITALES\ GOTHIQUES}$, diverses familles d'objets de même nature : $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ ...

- par des $\mathfrak{minuscules\ gothiques}$, les algèbres de Lie des groupes de Lie notés par les capitales maigres correspondantes : $\mathfrak{so}$, $\mathfrak{h}$ ...

On désignera également :

- si A est un vecteur ou un champ de vecteurs sur $\mathcal{M}$, par le symbole $L_A f$ la dérivée de Lie dans la direction A d'une fonction f définie sur $\mathcal{M}$: $(L_A f)_{|m} = (\mathrm{d}f)_{|m}.A$,

- si $\mathcal{M}$ est munie d'une métrique g, par D sa dérivée covariante et par R son tenseur de courbure, habituellement considéré ici comme un (1,3)-tenseur.

II.1.2 Une construction des coordonnées de Walker

Comme il est rappelé dans l'introduction de ce chapitre, le physicien anglais A. G. Walker avait déjà proposé un système particulier de coordonnées sur des variétés pseudo-riemanniennes dont l'holonomie restreinte stabilise un sous-espace totalement isotrope. Nous proposons ici une construction de ces coordonnées — par un procédé différent de celui de Walker —, elle permettra une familiarisation avec les objets manipulés tout au long du chapitre et fera aussi mieux comprendre la spécificité des coordonnées de cette thèse.

Nous n'abordons que le plus simple des deux cas traités par Walker : $\mathcal{M}$ est une variété pseudo-riemannienne, m un de ses points, on suppose que $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$ admet un sous-espace $\mathbf{X}_m$ totalement isotrope, stable par holonomie restreinte ; les coordonnées construites veulent alors tenir compte du drapeau stable :

$$\{0\} \subset \mathbf{X}_m \subset \mathbf{X}_m^\perp \subset \mathrm{T}_m\mathcal{M}.$$

On notera d la dimension de $\mathcal{M}$, d_1 celle de $\mathbf{X}_m$ et d_2 celle de $\mathbf{X}_m^\perp/\mathbf{X}_m$; $d = 2d_1 + d_2$.

Toujours comme rappelé en introduction, Walker propose dans cette situation des coordonnées, qu'on notera ici $((x_i)_{i=1}^{d_1},(y_j)_{j=1}^{d_2},(z_k)_{k=1}^{d_1})$ telles que :

- les coordonnées $(x_i)_{i=1}^{d_1}$ paramètrent les feuilles de $\mathcal{X}$, le feuilletage intégral de la distribution parallèle $\mathbf{X}$,
- les coordonnées $((x_i)_{i=1}^{d_1},(y_j)_{j=1}^{d_2})$ paramètrent les feuilles de $\mathcal{X}^\perp$, le feuilletage intégral de la distribution parallèle $\mathbf{X}^\perp$,
- dans la matrice des vecteurs-coordonnées, la métrique prend la forme :

$$\mathrm{Mat}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_{d_1} \\ 0 & A & H \\ I_{d_1} & {}^tH & B \end{pmatrix},$$

où les sous-matrices A et B sont symétriques et où A et H ne dépendent pas des coordonnées $(x_i)_{i=1}^{d_1}$.

Notons π la projection canonique $\mathcal{M} \to \mathcal{M}/\mathcal{X}$ et surmontons d'un tchetch les objets quotient : $\check{\mathcal{M}} = \pi(\mathcal{M})$, $\check{\mathcal{X}}_{\check{m}} = \pi(\mathcal{X}_m)$ ... Les coordonnées de Walker admettent la construction suivante, illustrée dans le cas $d_1 = d_2 = 1$ par la figure 1 page 134 :

- On choisit au voisinage de $\check{m}$ sur $\check{\mathcal{M}}$ des coordonnées $((\check{y}_j)_{j=1}^{d_2},(\check{z}_k)_{k=1}^{d_1})$ induites par une carte **quelconque** de $\check{\mathcal{M}}$ vue comme un feuilleté en $\check{\mathcal{X}}^\perp$. Les coordonnées $(\check{y}_j)_{j=1}^{d_2}$ paramètrent les feuilles de $\check{\mathcal{X}}^\perp$, les coordonnées $(\check{z}_k)_{k=1}^{d_1}$ les complètent en un système complet de coordonnées.
- On choisit une section σ de π, envoyant $\check{m}$ sur m, **quelconque**. Le reste de la construction est alors déterminé par les deux choix effectués.
- Les coordonnées $((\check{y}_j)_{j=1}^{d_2},(\check{z}_k)_{k=1}^{d_1})$ se relèvent alors par σ en des coordonnées $((y_j)_{j=1}^{d_2}, (z_k)_{k=1}^{d_1})$ de l'image $\mathcal{S}$ de σ, au voisinage de m.
- En tout point p de $\mathcal{S}$, notons $(X_i)_{i=1}^{d_1}$ la base de $\mathbf{X}_p$, duale de $(Z_k)_{k=1}^{d_1}$ *i.e.* telle que : $\forall(i,k) \in [\![1,d_1]\!]^2, g(X_i,Z_k) = \delta_{i,k}$. Une telle base est parallèle le long des feuilles de $\mathcal{X}^\perp \cap \mathcal{S}$. Or on vérifie que, le long de chaque feuille du feuilletage $\mathcal{X}^\perp$, la distribution $\mathbf{X}$ est point par point parallèle (c'est une des affirmations du sous-lemme9 page 137). Ceci permet, le long

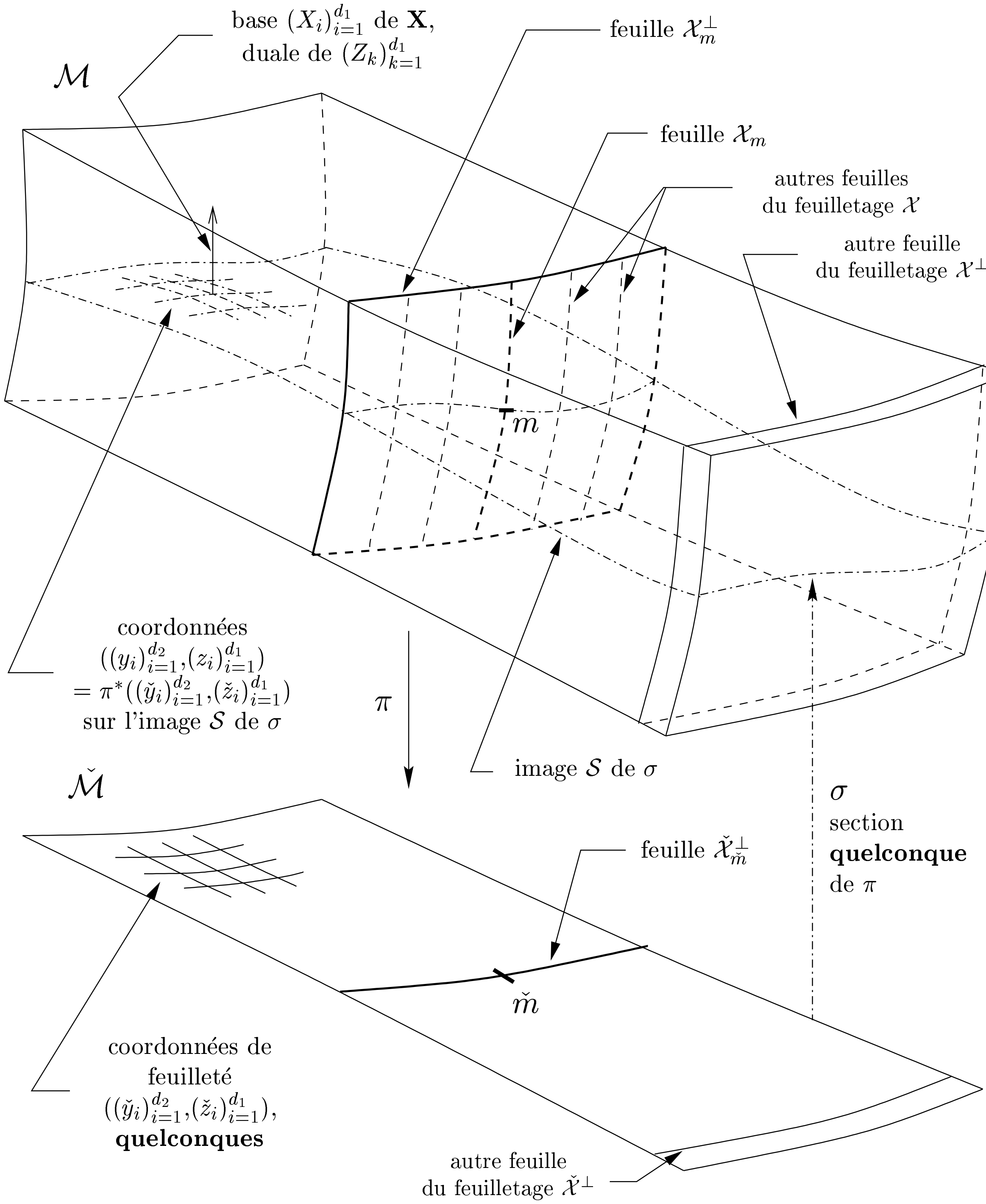


FIGURE 1 – *Construction des coordonnées de Walker*

de chaque feuille de $\mathcal{X}^\perp$, de prolonger la base $(X_i)_{i=1}^{d_1}$ par transport parallèle ; elle est ainsi définie sur tout un voisinage de m dans $\mathcal{M}$ et les flots des champs X_i commutent. Ces flots permettent alors de propager les coordonnées $((y_j)_{j=1}^{d_2},(z_k)_{k=1}^{d_1})$ à tout un voisinage de m dans $\mathcal{M}$; les coordonnées $(x_i)_{i=1}^{d_1}$, posées nulles le long de $\mathcal{S}$, se déduisent des champs $(X_i)_{i=1}^{d_1}$.

Par construction , les champs $(X_i)_{i=1}^{d_1}$ sont tangents aux feuilles de $\mathcal{X}$ et donc les coordonnées $(x_i)_{i=1}^{d_1}$ paramètrent les feuilles de $\mathcal{X}$. Par construction également, les coordonnées

$(\check{y}_j)_{j=1}^{d_2}$ paramètrent les feuilles de $\check{\mathcal{X}}^\perp$ de $\check{\mathcal{M}}$; les coordonnées $(y_j)_{j=1}^{d_2}$ paramètrent donc les feuilles de $\mathcal{X}^\perp \cap \mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$. Elles sont propagées par les flots des champs X_i, donc enfin les coordonnées $((x_i)_{i=1}^{d_1},(y_j)_{j=1}^{d_2})$ paramètrent les feuilles de $\mathcal{X}^\perp$. La métrique est donc de la forme :

$$\mathrm{Mat}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & C \\ 0 & A & H \\ {}^t\!C & {}^t\!H & B \end{pmatrix}.$$

La base $(X_i)_{i=1}^{d_1}$ a été choisie duale de $(Z_k)_{k=1}^{d_1}$ le long de $\mathcal{S}$, donc le long de $\mathcal{S}$: $C = I_{d_1}$. On vérifie alors que le parallélisme des X_i le long des feuilles de $\mathcal{X}$ implique que A, H et C sont indépendantes des coordonnées $(x_i)_{x=1}^{d_1}$. Le résultat attendu en découle.

Remarque. A chaque choix de coordonnées de feuilleté quelconques $((\check{y}_j)_{j=1}^{d_2},(\check{z}_k)_{k=1}^{d_1})$ de $\check{\mathcal{M}}$ et d'une section quelconque σ de π, correspond de façon bi-univoque un système de coordonnées «de Walker» de $\mathcal{M}$ au voisinage de m. Le principe du travail effectué ici sera d'exhiber un choix particulier de coordonnées de $\check{\mathcal{M}}$ et un choix particulier de section σ, induisant des propriétés plus contraignantes sur les coordonnées correspondantes. Il est à noter que ces deux choix seront alors, dans le cas général (précisément quand l'action de l'holonomie sur $\mathbf{X}$ n'est pas triviale), indissolublement liés : on ne pourrait, pour obtenir les coordonnées recherchées, les effectuer indépendamment l'un de l'autre. C'est malhaureusement une des raisons de la complication des raisonnements.

II.1.3 La situation sur l'espace tangent en m : application du lemme algébrique et introduction des objets de base

Dans cette partie, $(\mathcal{M},g)$ est une variété pseudo-riemannienne localement réductible, indécomposable et H son groupe d'holonomie restreint. Soit m un point de $\mathcal{M}$. L'application du lemme algébrique à $(\mathrm{T}_m\mathcal{M},g_{|m},H)$ va permettre de dégager divers feuilletages dont $\mathcal{M}$ est naturellement munie et sur lesquels s'appuiront les coordonnées construites en partie III. En reprenant les notations du lemme algébrique, on note $\mathbf{X}_m$ l'intersection des sous-espaces totalement isotropes de $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$ stables sous l'action de H, maximaux.

notation : Partout, on notera $\boldsymbol{\pi}$, indifféremment la projection canonique : $\mathbf{X}_m^\perp \to \mathbf{X}_m^\perp/\mathbf{X}_m$, la projection intégrale : $\mathcal{X}_m^\perp \to \mathcal{X}_m^\perp/\mathcal{X}$ ou encore la projection : $\mathcal{U} \to \mathcal{U}/\mathcal{X}$, où $\mathcal{U}$ est un ouvert de carte de $\mathcal{M}$, ou encore toute restriction de ces projections. On surmontera d'un tchetch «ˇ» les objets quotient modulo π, les classes modulo π d'objets de $\mathrm{T}\mathcal{M}$ ou de $\mathcal{M}$, par exemple : $\pi(\mathbf{X}_m^\perp) = \check{\mathbf{X}}_{\check{m}}^\perp$, $\pi(\mathcal{X}_m^\perp) = \check{\mathcal{X}}_{\check{m}}^\perp$ etc ...

La partie I fournit une décomposition H-stable, non nécessairement canonique, de $\mathbf{X}_m^\perp/\mathbf{X}_m$:

$$\mathbf{X}_m^\perp/\mathbf{X}_m = \check{\mathbf{W}}'_{\check{m}} \overset{\perp}{\oplus} \check{\mathbf{W}}''_{\check{m}} \overset{\perp}{\oplus} \check{\mathbf{Y}}'_{\check{m}},$$

où le sens des différents termes est donné dans le lemme 3 page 128.

Pour des raisons techniques détaillées à la fin du chapitre (voir page 214), nous supposerons successivement que $\mathcal{M}$ vérifie la première des deux propriétés suivantes, puis les deux :

$\check{\mathbf{W}}'_{\check{m}}$ admet une décomposition en deux sous-espaces totalement isotropes stables supplémentaires. **(P1)**

$$\dim \mathbf{X}_m = 1 \qquad \textbf{(P2)}$$

Dans le cas où $\mathcal{M}$ satisfait **(P1)**, on peut alors écrire : $\check{\mathbf{W}}'_{\check{m}} = \check{\mathbf{U}}'_{\check{m}} \oplus \check{\mathbf{V}}'_{\check{m}}$, où $\check{\mathbf{U}}'_{\check{m}}$ et $\check{\mathbf{V}}'_{\check{m}}$ sont totalement isotropes, stables par holonomie. L'isomorphisme musical $\flat$ fournit alors un isomorphisme canonique de $\check{\mathbf{V}}'_{\check{m}}$ dans le dual de $\check{\mathbf{U}}'_{\check{m}}$:$\check{\mathbf{V}}'_{\check{m}} \xrightarrow[\simeq]{\flat} \check{\mathbf{U}}'^{*}_{\check{m}}$; l'action de l'holonomie H commute avec cet isomorphisme. On peut alors choisir une décomposition — non unique en général !— de $\check{\mathbf{U}}'_{\check{m}}$ en somme directe de sous-espaces stables indécomposables : $\check{\mathbf{U}}'_{\check{m}} = \oplus_r \check{\mathbf{U}}'^{r}_{\check{m}}$. Il lui correspond une décomposition duale de $\check{\mathbf{U}}'^{*}_{\check{m}}$, donc de $\check{\mathbf{V}}'_{\check{m}}$; $\check{\mathbf{V}}'_{\check{m}} \oplus_r \check{\mathbf{V}}'^{r}_{\check{m}}$. $\check{\mathbf{W}}'_{\check{m}}$ se décompose donc en la somme directe orthogonale stable suivante :

$$\check{\mathbf{W}}'_{\check{m}} = \overset{\perp}{\oplus}_r \check{\mathbf{W}}'^{r}_{\check{m}} \text{ où} : \forall r, \check{\mathbf{W}}'^{r}_{\check{m}} = \check{\mathbf{U}}'^{r}_{\check{m}} \oplus \check{\mathbf{V}}'^{r}_{\check{m}},$$

avec $\check{\mathbf{U}}'^{r}_{\check{m}}$ et $\check{\mathbf{V}}'^{r}_{\check{m}}$ totalement isotropes, stables, indécomposables —mais non irréductibles car, par construction, le plus grand sous-espace semi-simple de $\check{\mathbf{W}}'_{\check{m}}$ est totalement isotrope.

D'autre part, par définition, l'action de H sur $\check{\mathbf{W}}''_{\check{m}}$ est semi-simple et cet espace peut s'écrire :

$$\check{\mathbf{W}}''_{\check{m}} = \overset{\perp}{\oplus}_r \check{\mathbf{W}}''^{r}_{\check{m}} \text{ où} : \forall r, \check{\mathbf{W}}'^{r}_{\check{m}} = \check{\mathbf{U}}''^{r}_{\check{m}} \oplus \check{\mathbf{V}}''^{r}_{\check{m}},$$

avec $\check{\mathbf{U}}'^{r}_{\check{m}}$ et $\check{\mathbf{V}}'^{r}_{\check{m}}$ totalement isotropes, stables, irréductibles. (Une telle décomposition résulte de deux successives :

- une première, canonique, en composantes isotypiques,
- une deuxième, arbitraire, de chaque composante isotypique en somme directe de sous-espaces irréductibles.)

En renumérotant, on peut alors écrire :

$$\check{\mathbf{W}}'_{\check{m}} \oplus \check{\mathbf{W}}''_{\check{m}} = \overset{\perp}{\underset{1 \leq r \leq N}{\oplus}} \check{\mathbf{W}}^{r}_{\check{m}} \text{ où} : \forall r, \check{\mathbf{W}}^{r}_{\check{m}} = \check{\mathbf{U}}^{r}_{\check{m}} \oplus \check{\mathbf{V}}^{r}_{\check{m}},$$

avec $\check{\mathbf{U}}^{r}_{\check{m}}$ et $\check{\mathbf{V}}^{r}_{\check{m}}$ totalement isotropes, stables, indécomposables (irréductibles ou non : dans la construction de coordonnées locales qui va suivre, ils seront traités de la même manière). On notera d_r la dimension, commune, de $\check{\mathbf{U}}^{r}_{\check{m}}$ et de $\check{\mathbf{V}}^{r}_{m}$

Enfin, chaque espace $\check{\mathbf{U}}^{r}_{\check{m}}$ admet, relativement à l'action de l'holonomie H, des suites de Jordan-Hölder. On note n_r la longueur de ces suites, qui est aussi celle des suites de $\check{\mathbf{V}}^{r}_{\check{m}}$, où H agit de façon contragédiente. Si on *choisit* une quelconque $(\check{\mathbf{U}}^{r,k}_{\check{m}})^{n_r}_{k=0}$ des suites de Jordan-Hölder de $\check{\mathbf{U}}^{r}_{\check{m}}$:

$$\begin{gathered}\text{les } \check{\mathbf{U}}^{r,k}_{\check{m}} \text{ sont stables par holonomie,}\\ \{0\} = \check{\mathbf{U}}^{r,0}_{\check{m}} \subsetneq \check{\mathbf{U}}^{r,1}_{\check{m}} \subsetneq \ldots \subsetneq \check{\mathbf{U}}^{r,n_r}_{\check{m}} = \check{\mathbf{U}}^{r}_{\check{m}} \text{ et} : \forall k,\ \check{\mathbf{U}}^{r,k}_{\check{m}} / \check{\mathbf{U}}^{r,k-1}_{\check{m}} \text{ est irréductible.}\end{gathered}$$

On notera également d^k_r la dimension de chaque $\check{\mathbf{U}}^{r,k}_{\check{m}}$: $0 = d^0_r < d^1_r < \ldots < d^{n_r}_r = d_r$. Pour tout k, on introduit alors : $\check{\mathbf{V}}^{r,k}_{\check{m}} = \check{\mathbf{V}}^{r}_{\check{m}} \cap (\check{\mathbf{U}}^{r,k}_{\check{m}})^{\perp}$; alors :

$$\begin{gathered}\text{les } \check{\mathbf{V}}^{r,k}_{\check{m}} \text{ sont stables par holonomie,}\\ \{0\} = \check{\mathbf{V}}^{r,n_r}_{\check{m}} \subsetneq \check{\mathbf{V}}^{r,n_r-1}_{\check{m}} \subsetneq \ldots \subsetneq \check{\mathbf{V}}^{r,0}_{\check{m}} = \check{\mathbf{V}}^{r}_{\check{m}} \text{ et} : \forall k,\ \check{\mathbf{V}}^{r,k-1}_{\check{m}} / \check{\mathbf{V}}^{r,k}_{\check{m}} \text{ est irréductible.}\end{gathered}$$

i.e. $(\check{\mathbf{V}}^{r,k}_{\check{m}})^{0}_{k=n_r}$ est une suite de Jordan-Hölder de $\check{\mathbf{V}}^{r}_{\check{m}}$; c'est la suite duale de $(\check{\mathbf{U}}^{r,k}_{\check{m}})^{k=n_r}_{0}$.

D'autre part, on notera désormais $\check{\mathbf{Y}}'_{\check{m}}$ simplement $\check{\mathbf{Y}}_{\check{m}}$, la raison de son accentuation dans la partie précédente n'ayant plus lieu ici. Par définition, $\check{\mathbf{Y}}_{\check{m}}$ est semi-simple et peut s'écrire :

$$\check{\mathbf{Y}}_{\check{m}} = \overset{\perp}{\bigoplus_{0\leq s\leq N'}} \check{\mathbf{Y}}^s_{\check{m}}$$

où pour tout $s \geq 1$, $\check{\mathbf{Y}}^s_{\check{m}}$ est non dégénéré, stable et irréductible par holonomie et où $\check{\mathbf{Y}}^0_{\check{m}} = \ker \mathfrak{h}_{|\check{\mathbf{Y}}_{\check{m}}}$ est le noyau, éventuellement réduit à $\{0\}$, de l'action de l'algèbre d'holonomie sur $\check{\mathbf{Y}}_{\check{m}}$. On notera d'_s la dimension de chaque $\check{\mathbf{Y}}^s_{\check{m}}$. (De nouveau, une telle décomposition résulte de deux successives :

- une première, canonique, de $\check{\mathbf{Y}}_{\check{m}}$ en composantes isotypiques,
- une deuxième, arbitraire, de chaque composante isotypique, sauf celle correspondant à l'action triviale, en somme directe de sous-espaces irréductibles. L'éventuelle composante isotypique $\check{\mathbf{Y}}^0_{\check{m}}$ de l'action triviale est ici singularisée ; elle fait en effet l'objet d'un traitement particulier dans la construction des coordonnées qui suit.)

Enfin, on notera $\mathfrak{F}$ l'ensemble des feuilletages $\{\mathcal{U}^{r,k}, \mathcal{V}^{r,k}, \mathcal{Y}^s \ / \ (r,s) \in [\![1,N]\!]\times[\![0,N']\!]$ et $k \leq n_r \}$. Ce sont les feuilletages intégraux, à feuilles totalement géodésiques, engendrés par les distributions $\mathbf{U}^{r,k}$, $\mathbf{V}^{r,k}$ et $\mathbf{Y}^s$ introduites plus haut.

II.1.4 Le but visé dans cette partie

Le but de cette partie est de construire une forme différentielle auxiliaire sur la feuille $\mathcal{X}^\perp_m$, qui jouera un rôle central en partie III dans la construction des coordonnées locales au voisinage de m. Plus exactement, à tout couple (Z,T) de champs de vecteurs de $\mathrm{T}\mathcal{M}$ le long de $\mathcal{X}^\perp_m$, on associera un forme différentielle $\rho_{Z,T}$ sur $\mathcal{X}^\perp_m$,

- dont certaines dérivées donnent des éléments du tenseur $< R(Z,\cdot)T,\cdot >$
- vérifiant certaines propriétés supplémentaires qui la rendent «la plus unique» possible.

II.2 Trois résultats préliminaires

On aura besoin pour montrer l'existence d'une telle forme $\rho_{Z,T}$ de trois premiers résultats. Le premier rassemble les remarques effectuables de premier abors au sujet des divers feuilletages introduits plus haut. Le deuxième introduit un système particulier de coordonnées locales de $\mathcal{X}^\perp_m$ au voisinage de m ; ces coordonnées simplifieront la démonstration du lemme 4 et seront ensuite reprises dans la démonstration du théorème III lui-même. Le troisième rappelle enfin un résultat classique de calcul différentiel.

Sous-lemme 9 *Soit $(\mathcal{M},g)$ une variété pseudo-riemannienne localement réductible, indécomposable vérifiant la propriété* (**P1**). *On reprend les notations introduites plus haut.*

Il correspond à la décomposition de $T_{\check{m}}(\check{\mathcal{X}}^\perp_{\check{m}})$ une décomposition locale de la variété $\check{\mathcal{X}}^\perp_{\check{m}}$ en produit riemannien : $\check{\mathcal{X}}^\perp_{\check{m}}$ est canoniquement isométrique, une fois choisie la décomposition $\check{\mathbf{X}}^\perp_{\check{m}} = (\overset{\perp}{\oplus}_r \check{\mathbf{W}}^r_{\check{m}}) \overset{\perp}{\oplus} (\overset{\perp}{\oplus}_s \check{\mathbf{Y}}^s_{\check{m}})$, au produit riemannien $(\prod_r \check{\mathcal{W}}^r_{\check{m}}) \times (\prod_s \check{\mathcal{Y}}^s_{\check{m}})$. De plus, une fois choisie la décomposition $\check{\mathbf{X}}^\perp_{\check{m}} = (\oplus_r \check{\mathbf{U}}^r_{\check{m}}) \oplus (\oplus_r \check{\mathbf{V}}^r_{\check{m}}) \oplus (\oplus_s \check{\mathbf{Y}}^s_{\check{m}})$, $\check{\mathcal{X}}^\perp_{\check{m}}$ est canoniquement difféomorphe à $(\prod_r \check{\mathcal{U}}^r_{\check{m}}) \times (\prod_r \check{\mathcal{V}}^r_{\check{m}}) \times (\prod_s \check{\mathcal{Y}}^s_{\check{m}})$. Quelques remarques enfin :

1. *En un point $p \in \mathbf{X}^\perp_m$, si $A \in \mathbf{A}_p$ et $B \in \mathcal{B}_p$ avec $\mathbf{A}_p$ et $\mathbf{B}_p$ deux sous-espaces de $\mathbf{X}^\perp_p$ stables par holonomie, alors : $\mathbf{A}_p \perp \mathbf{B}_p \Rightarrow R(A,B) = 0$. De plus : $R(\mathbf{X}^\perp_p,\mathbf{Y}^0_p) = \{0\}$.*

2. Si $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{B}$ *sont deux distributions parmi les distributions* $\check{X}$, $\mathbf{U}^r$, $r \in [\![1,N]\!]$, $\mathbf{V}^r$, $r \in [\![1,N]\!]$ *et* $\mathbf{Y}^s$, $s \in [\![0,N']\!]$ *alors, si* ($\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$ *ou* $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$ *ou* $\mathbf{A} = \mathbf{Y}^0$), *la distribution* $\mathbf{A}$ *est point par point parallèle le long des feuilles de* $\mathcal{B}$. *En particulier* $\mathbf{X}$ *et plus généralement* $\mathbf{Y}^0$ *sont des distributions parallèles le long de* $\mathcal{X}_m^\perp$.

Démonstration : Il suffit de montrer les deux remarques.

1. Soient A et B comme dans l'énoncé et Cet D deux vecteurs quelconques de $\mathrm{T}_p\mathcal{M}$. Par le théorème d'Ambrose-Singer, $R(C,D) \in \mathfrak{h}$ où $\mathfrak{h}$ est l'algèbre d'holonomie restreinte de $\mathcal{M}$. Par conséquent, $R(C,D).A \in \mathbf{A}_p$ et donc $< R(C,D).A,B >= 0$. Mais $< R(C,D).A,B >=< A,B).C,D >$ et les vecteurs C et D sont quelconques donc : $R(A,B) = 0$. Avec les mêmes C et D et $(Y,Y^0) \in \mathbf{X}_p^\perp \times \mathbf{Y}_p^0$, comme l'holonomie agit trivialement modulo $\mathbf{X}_p$ sur $\mathbf{Y}_p^0$ et encore par le théorème d'Ambrose-Singer : $< R(C,D).Y^0,X >= 0$. Le résultat suit semblablement.

2. Prenons p un point de $\mathcal{X}_m^\perp$. Supposons déjà $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$ et prenons A un vecteur de $\mathbf{A}_p$ et B_1 et B_2 deux vecteurs de $\mathbf{B}_p$. Par la deuxième identité de Bianchi, $< R(B_1,B_2).A = - < R(B_2,A).B_1 - < R(A,B_1).B_2 = 0$ par le point précédent. C'est le résultat voulu : le vecteur A peut être prolongé par transport parallèle le long des feuilles de $\mathcal{B}$, le feuilletage intégral de $\mathbf{B}$. Supposons maintenant $\mathbf{A} \not\perp \mathbf{B}$ et $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$. Nécessairement alors pour un certain indice r : $\mathbf{A} = \mathbf{U}^r$ et $\mathbf{B} = \mathbf{V}^r$ ou vice-versa. Alors $\mathbf{B} \perp \mathbf{B}$ et par le premier point : $\forall (B_1,B_2) \in (\mathbf{B}_p)^2, R(B_1,B_2) = 0$ donc tout vecteur peut être prolongé par transport parallèle le long des efuilles de $\mathcal{B}$. Supposons enfin que $\mathbf{A} = \mathbf{Y}^0$ et prenons A dans $\mathbf{A}$ et B_1 et B_2 dans $\mathbf{B}_p$. Toujours par l'identité de Bianchi : $< R(B_1,B_2).A = - < R(B_2,A).B_1 - < R(A,B_1).B_2 = 0$ par le point précédent. Le vecteur A peut être prolongé par transport parallèle le long des feuilles de $\mathcal{B}$. □

Construisons à présent des coordonnées particulières sur $\mathcal{X}_m^\perp$. On reprend toujours les mêmes notations.

Précision : Attention, la décomposition de $\mathbf{X}_m^\perp/\mathbf{X}_m$ dont il est question n'est pas obtenue sous l'action de l'holonomie H' de la variété pseudo-riemannienne $\mathcal{X}_m^\perp/\mathcal{X}$, mais bien par l'action de H le groupe d'holonomie restreint de $\mathcal{M}$, action qui passe au quotient. En particulier par exemple, l'éventuel facteur $\check{\mathbf{Y}}^0$ est certes plat pour l'holonomie de $\mathcal{X}_m^\perp/\mathcal{X}$, donc inclus dans le facteur plat de $T_{\check{m}}(\mathcal{X}_m^\perp/\mathcal{X})$, mais l'inclusion peut être stricte. D'autre part, en général, l'action de H sur $T_{\check{m}}(\mathcal{X}_m^\perp/\mathcal{X})$ n'est pas l'action d'une des holonomies pseudo-riemanniennes possibles de la variété $\mathcal{X}_m^\perp/\mathcal{X}$. En particulier par exemple, elle ne se décompose pas en action produit dès qu'elle préserve un sous-espace non dégénéré.

Sous-lemme 10 *On se donne :*

- *une section* $\sigma_\mathcal{U}^r$ *de chaque fibré* $\mathcal{U}_m^r \to \mathcal{U}_m^r/\mathcal{X}$, *une section* $\sigma_\mathcal{V}^r$ *de chaque fibré* $\mathcal{V}_m^r \to \mathcal{V}_m^r/\mathcal{X}$ *et une section* $\sigma_\mathcal{Y}^r$ *de chaque fibré* $\mathcal{Y}_m^r \to \mathcal{Y}_m^r/\mathcal{X}$, *les sections* $\sigma_\mathcal{U}^r$, $\sigma_\mathcal{V}^r$ ($r \in [\![1,N]\!]$) *et* $\sigma_\mathcal{Y}^0$ *des fibrés plats respectifs* $\mathcal{U}_m^r$, $\mathcal{V}_m^r$ *et* $\mathcal{Y}_m^0$ *étant choisies affines,*
- *en* $\check{m}$, *pour tout* $r \in [\![1,N]\!]$, $\{0\} = \check{\mathbf{U}}_{\check{m}}^{r,0} \subset \check{\mathbf{U}}_{\check{m}}^{r,1} \subset \check{\mathbf{U}}_{\check{m}}^{r,2} \subset \ldots \subset \check{\mathbf{U}}_{\check{m}}^{r,n_r} = \check{\mathbf{U}}_{\check{m}}^r$ *une suite de Jordan-Hölder de* $\check{\mathbf{U}}_{\check{m}}^r$ *pour l'action de* H *et* $(\check{\mathbf{V}}_{\check{m}}^{r,k})_{k=n_r}^0 = ((\check{\mathbf{U}}_{\check{m}}^{r,k})^\perp \cap \check{\mathbf{V}}_{\check{m}}^r)_{k=n_r}^0$ *la suite de Jordan-Hölder associée de* $\check{\mathbf{V}}_{\check{m}}^r$.

Alors il existe un système local de coordonnées $((x_i)_{i=1}^{d_\mathbf{X}},((u_i^r)_{i=1}^{d_r},(v_i^r)_{i=1}^{d_r})_{r=1}^N,((y_i^r)_{i=1}^{d'_r})_{r=0}^{N'})$ *de* $\mathcal{X}_m^\perp$ *autour de* m, *nul en* m, *de classe* C^{R-2} *si* $\mathcal{M}$ *est de classe* C^R *et tel que, en notant* $((X_i)_{i=1}^{d_\mathbf{X}},((U_i^r)_{i=1}^{d_r},(V_i^r)_{i=1}^{d_r})_{r=1}^N,((Y_i^s)_{i=1}^{d'_s})_{r=0}^{N'})$ *les vecteurs-coordonnées correspondants :*

(a) *Les coordonnées* $(x_i)_{i=1}^{d_\mathbf{X}}$ *paramètrent les feuilles de* $\mathcal{X}$ *; pour chaque* r *de* $[\![1,N]\!]$ *et pour tout* k *de* $[\![1,n_r]\!]$, *les coordonnées* $((x_i)_{i=1}^{d_\mathbf{X}},(u_i^r)_{i=1}^{d_r^k})$ *paramètrent les feuilles de* $\mathcal{U}^{r,k}$ *et* *les coordonnées* $((x_i)_{i=1}^{d_{\mathbf{X}}},(v_i^r)_{i=d_r^k+1}^{d_r})$ *celles de* $\mathcal{V}^{r,k}$ *; pour chaque* s *de* $[\![0,N']\!]$*, les coordonnées* $((x_i)_{i=1}^{d_{\mathbf{X}}},(y_i^s)_{i=1}^{d'_s})$ *celles de* $\mathcal{Y}^s$*. Autrement dit, en tout point* p *:*

* $(X_i)_{i=1}^{d_{\mathbf{X}}}$ *est une base de* $\mathbf{X}_p$.
* *Pour tout* r *de* $[\![1,N]\!]$*, tout* k *de* $[\![1,n_r]\!]$*,* $((X_i)_{i=1}^{d_{\mathbf{X}}},(U_i^r)_{i=1}^{d_r^k})$ *est une base de* $\mathbf{U}_p^{r,k}$ *et* $((X_i)_{i=1}^{d_{\mathbf{X}}},(V_i^r)_{i=d_r^k+1}^{d_r})$ *une base de* $\mathbf{V}_p^{r,k}$.
* *Pour tout* s *de* $[\![0,N']\!]$*,* $((X_i)_{i=1}^{d_{\mathbf{X}}},(Y_i^s)_{i=1}^{d_s})$ *est une base de* $\mathbf{Y}_p^s$.

(b) *En tout point* p*, si* A *est un vecteur-coordonnée appartenant à* $\mathbf{A}_p$ *l'un des espaces de* $\mathfrak{E} = \{\mathbf{U}_p^r, \mathbf{V}_p^r, \mathbf{Y}_p^s \,/\, r \in [\![1,N]\!]$ *et* $s \in [\![0,N']\!]\}$*, alors :* $\forall \mathbf{B}_p \in \mathfrak{E}, (\mathbf{B}_p \neq \mathbf{A}_p$ *ou* $\mathbf{A}_p = \mathbf{Y}_p^0) \Rightarrow D_{\mathbf{B}_p} A = \{0\}$*. De plus, pour tout* $r \in [\![1,N]\!]$*, les champs* $(U_i^r)_{i=1}^{d_r}$ *sont parallèles le long de* $\mathcal{U}_m^r$*,* i.e. *:* $\forall p \in \mathcal{U}_m^r, \forall i \in [\![1,d_r]\!], D_{\mathbf{U}_p} U_i^r = \{0\}$.

(c) *En* m*, pour tout* r*,* $(\check{V}_i^r)_{i=1}^{d_r}$ *est une base de* $\check{\mathbf{V}}_m^r$*, duale de la base* $(\check{U}_i^r)_{i=1}^{d_r}$ *de* $\check{\mathbf{U}}_m^r$ *; pour tout* s*,* $(\check{Y}_i^s)_{i=1}^{d'_s}$ *est une base pseudo-orthonormée de* $\check{\mathbf{Y}}_{\check{m}}^s$.

Remarque : en particulier, on tire de **(b)** que, pour tout vecteur coordonnée A : $\forall i \in [\![1,d_{\mathbf{X}}]\!], \forall j \in [\![1,d'_0]\!], D_A X_i = D_{X_i} A = D_A Y_j^0 = D_{Y_j^0} A = 0$. Les champs $(X_i)_{i=1}^{d_{\mathbf{X}}}$ et $(Y_j^0)_{j=1}^{d'_0}$ sont parallèles, et toutes les coordonnées sont parallèles le long des feuilles de $\mathcal{Y}^0$.

Démonstration : On construit déjà des coordonnées au voisinage de $\check{m}$ sur le quotient $\check{\mathcal{X}}_{\check{m}}^{\perp}$. La variété $\check{\mathcal{X}}_{\check{m}}^{\perp}$ étant canoniquement isométrique au produit riemannien $\left(\prod_{r=1}^{N} \check{\mathcal{W}}_{\check{m}}^r\right) \times \left(\prod_{r=0}^{N'} \check{\mathcal{Y}}_{\check{m}}^r\right)$, il suffit de construire des cordonnées sur chaque $\check{\mathcal{W}}_{\check{m}}^r$ pour $r \in [\![1,N]\!]$ et sur chaque $\check{\mathcal{Y}}_{\check{m}}^r$ pour $r \in [\![0,N']\!]$. Sur chacun de ces derniers, et pour $r \neq 0$, on choisit des coordonnées $(\check{y}_i^r)_{i=1}^{n_r}$, nulles en $\check{m}$ et telles que, en $\check{m}$, les vecteurs coordonnées associés $(\check{Y}_i^r)_{i=1}^{d'_r}$ constituent une base pseudo-orthonormée de $\check{\mathbf{Y}}_{\check{m}}^r$: $\check{g}_{|\check{\mathbf{Y}}_{\check{m}}^r}(\check{m}) = \sum_i \varepsilon_i^r (\,\mathrm{d}\check{y}_i^r)^2$ avec $\varepsilon_i^r = \pm 1$. Pour le reste, le choix est arbitraire. On choisit sur $\check{\mathcal{Y}}_{\check{m}}^0$, plat, des coordonnées affines plates pseudo-orthonormées.

Chaque $\check{\mathcal{W}}_{\check{m}}^r$ est canoniquement difféomorphe à $\check{\mathcal{U}}_{\check{m}}^r \times \check{\mathcal{V}}_{\check{m}}^r$, il suffit donc enfin de construire des coordonnées sur les $\check{\mathcal{U}}_{\check{m}}^r$ et les $\check{\mathcal{V}}_{\check{m}}^r$. Soit $r \in [\![1,N]\!]$ et $\{0\} = \check{\mathbf{U}}_{\check{m}}^{r,0} \subset \check{\mathbf{U}}_{\check{m}}^{r,1} \subset \check{\mathbf{U}}_{\check{m}}^{r,2} \subset \ldots \subset \check{\mathbf{U}}_{\check{m}}^{r,n_r} = \check{\mathbf{U}}_{\check{m}}^r$ la décomposition de Jordan-Hölder choisie de $\check{\mathbf{U}}_{\check{m}}^r$ et $(\check{U}_i^r)_{i=1}^{d_r}$ une base de $\check{\mathbf{U}}_{\check{m}}^r$ adaptée à cette décomposition, *i.e.* t.q. : $\exists (d_r^k)_{k=1}^{n_r} : \forall k \in [\![1,n_r]\!], \check{\mathbf{U}}_{\check{m}}^{r,k} = \mathrm{vect}((\check{U}_i^r)_{i=1}^{d_r^k})$. La feuille $\check{\mathcal{U}}_{\check{m}}^r$ étant plate, cette base fournit sur elle, par transport parallèle, un système de coornonnées $(\check{u}_i^r)_{i=1}^{d_r}$; on notera encore $(\check{U}_i^r)_{i=1}^{d_r}$ les vecteurs-coordonnées associés. On note alors $(\check{V}_i^r)_{i=1}^{d_r} = ((\check{U}_i^r)^{*\sharp})_{i=1}^{d_r}$ la base de $\check{\mathbf{V}}_{\check{m}}^r$, duale de $(\check{U}_i^r)_{i=1}^{d_r}$. Il lui est associé de la même façon un système $(\check{v}_i^r)_{i=1}^{d_r}$ de coordonnées de la feuille, plate, $\check{\mathcal{V}}_{\check{m}}^r$. Le difféomorphisme canonique $\check{\mathcal{W}}_{\check{m}}^r \simeq \check{\mathcal{U}}_{\check{m}}^r \times \check{\mathcal{V}}_{\check{m}}^r$ cité plus haut permet alors de prolonger les $(\check{u}_i^r)_{i=1}^{d_r}$ et les $(\check{v}_i^r)_{i=1}^{d_r}$ à $\check{\mathcal{W}}_{\check{m}}^r$ entier.

Remarque : en $\check{m}$, si on note $\check{\mathbf{V}}_{\check{m}}^{r,j} = \check{\mathbf{V}}_{\check{m}}^r \cap (\check{\mathbf{U}}_{\check{m}}^{r,j})^{\perp}$, alors $\{0\} = \check{\mathbf{V}}_{\check{m}}^{r,n_r} \subset \check{\mathbf{V}}_{\check{m}}^{r,n_r-1} \subset \ldots \subset \check{\mathbf{V}}_{\check{m}}^{r,0} = \check{\mathbf{V}}_{\check{m}}^r$ est une suite de Jordan-Hölder de $\check{\mathbf{V}}_{\check{m}}^r$ et en $\check{m}$: $\forall j \leq n_r$, $\mathrm{vect}((V_i^r)_{i=d_r^j+1}^{d^r}) = \check{\mathbf{V}}_{\check{m}}^{r,j}$. La base $(V_i^r)_{i=1}^{d^r}$ est adaptée à la suite $(\check{\mathbf{V}}_{\check{m}}^{r,j})_{j=n_r}^0$. D'autre part, les suites de Jordan-Hölder $(\check{\mathbf{U}}_{\check{m}}^{r,j})_{j=0}^{n_r}$ et $(\check{\mathbf{V}}_{\check{m}}^{r,j})_{j=n_r}^0$ étant parallèles, les bases $(U_i^r)_{i=1}^{d^r}$ et $(V_i^r)_{i=1}^{d^r}$ respectivement, leur sont en tout point adaptées.

Notons alors respectivement U_i^r, V_i^r et Y_i^r les vecteurs $\mathrm{d}\sigma\check{U}_i^r$, définis pour chaque r sur l'image de $\sigma_{\mathcal{U}}^r$, $\mathrm{d}\sigma\check{V}_i^r$, définis pour chaque s sur l'image de $\sigma_{\mathcal{V}}^r$ et $\mathrm{d}\sigma\check{Y}_i^r$définis pour chaque r sur l'image de $\sigma_{\mathcal{Y}}^s$; par transport parallèle le long des feuilles de $\mathcal{X}$, chaque famille $(U_i^r)_{i=1}^{d_r}$, $(V_i^r)_{i=1}^{d_r}$ et $(Y_i^r)_{i=1}^{d'_r}$ se polonge respectivement, à toute la sous-variété $\mathcal{U}_m^r$, $\mathcal{V}_m^r$ ou $\mathcal{Y}_m^r$. Par transport parallèle le long des autres feuilles de ce type, ils se prolongent à $\mathcal{X}_m^\perp$ tout entière.

Remarquons au passage qu'alors en tout point : $\forall r,i$, $\mathrm{d}\pi(U_i^r) = \check{U}_i^r$, $\mathrm{d}\pi(V_i^r) = \check{V}_i^r$ et $\mathrm{d}\pi(Y_i^r) = \check{Y}_i^r$ car π est parallèle. Enfin, on choisit une base quelconque $(X_i)_{i=1}^{d_{\mathbf{X}}}$ de $\mathbf{X}_m$; propagée par transport parallèle, elle fournit une base de chaque $\mathbf{X}_p$ pour $p \in \mathcal{X}_m^\perp$.

Tous les champs obtenus commutent. En effet, désignons dans la suite par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux feuilletages différents parmi les $\mathcal{U}^r$, $\mathcal{V}^r$ et $\mathcal{Y}^r$. En un point de $\mathcal{X}^\perp$, si A est un vecteur-coordonnée de $\mathcal{A}$ — *i.e.* un X_i, un U_i^r, un V_i^r ou un Y_i^r — et B un vecteur-coordonnée de $\mathcal{B}$, alors : $D_A B = D_B A = 0$ par construction, donc $[A,B] = 0$. D'autre part :

- notons $\sigma_{\mathcal{A}}$ la section ($\sigma_{\mathcal{U}}^r$, $\sigma_{\mathcal{V}}^r$ ou $\sigma_{\mathcal{Y}}^r$, selon qui est $\mathcal{A}$), définie de $\check{\mathcal{A}}_{\check{m}}$ dans $\mathcal{A}_m$. Soient A_1 et A_2 deux vecteurs-coordonnées tangents en un point à $\sigma_{\mathcal{A}}(\check{\mathcal{A}}_{\check{m}})$, alors : $[A_1,A_2] = [\mathrm{d}\sigma_{\mathcal{A}}(\check{A}_1), \mathrm{d}\sigma_{\mathcal{A}}(\check{A}_2)] = \mathrm{d}\sigma_{\mathcal{A}}([\check{A}_1,\check{A}_2]) = \mathrm{d}\sigma_{\mathcal{A}}(0) = 0$,
- enfin si, en un point, A_1 et A_2 sont tangents à une feuille de $\mathcal{A}$ et B à une feuille de $\mathcal{B}$ alors : $[B,A_1] = -D_{A_1}B \in \mathbf{B}$ et donc : $D_B[A_1,A_2] = D_B(D_{A_1}A_2 - D_{A_2}A_1) = R(A_1,B)A_2 - R(A_2,B)A_1 - D_{[B,A_1]}A_2 + D_{[B,A_2]}A_1 + D_{A_1}(D_B A_2) - D_{A_2}(D_B A_1) = 0$. Les quatre derniers termes sont en effet nuls par construction ; pour les deux premiers :
  - ∗ soit $\mathcal{A} \perp \mathcal{B}$; dans ce cas, par le sous-lemme 9, $R(A_1,B)A_2 = R(A_2,B)A_1 = 0$,
  - ∗ soit $\mathcal{A} = \mathcal{U}^r$ et $\mathcal{B} = \mathcal{V}^r$, ou vice-versa, pour un certain r. Dans ce cas, par la première identité de Bianchi, puis le sous-lemme 9 : $R(A_1,B)A_2 - R(A_2,B)A_1 = R(A_2,A_1)B = 0$.

Ainsi, partout, $[A_1,A_2] = [A_1,A_2]_{|\mathrm{T}\sigma_{\mathcal{A}}(\check{\mathcal{A}}_{\check{m}})} = 0$.

Il suffit alors de poser par convention que toutes les coordonnées du point m sont nulles pour obtenir des coordonnées $((x_i)_{i=1}^{d_{\mathbf{X}}},((u_i^r)_{i=1}^{d_r},(v_i^r)_{i=1}^{d_r})_{r=1}^N,(y_i^r)_{i=1}^{d'_r})_{r=0}^{N'})$ dont les vecteurs coordonnées associés sont les $(X_i)_{i=1}^{d_{\mathbf{X}}}$, les U_i^r, les V_i^r et les Y_i^r respectivement. Par construction, comme pour tout vecteur-coordonnée A : $\mathrm{d}\pi(A) = \check{A}$, on obtient, pour chaque coordonnée, ici notée a : $a = \check{a}\circ\pi$. Vu la construction des coordonnées $(((\check{u}_i^r)_{i=1}^{d_r},(\check{v}_i^r)_{i=1}^{d_r})_{r=1}^N,(\check{y}_i^r)_{i=1}^{d'_r})_{r=0}^{N'})$, cela fournit le point **(a)** et le point **(c)** annoncés. De plus si $\mathcal{M}$ est de classe C^R, les différents champs de vecteurs-coordonnées sont construits par prolongation par transport parallèle, avec une condition initiale qu'on peut prendre de régularité maximale, *i.e.* C^{R-1}. Ces champs sont donc au moins C^{R-2} et il en est de même des coordonnées.

Par construction enfin, si A et B sont deux vecteurs-coordonnée tangents en un point, respectivement à $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux feuilletages différents comme donnés plus haut : $D_A B = D_B A = 0$. Les vecteurs $(Y_i^0)_{i=1}^{d'_0}$ vérifient de surcroît : $\forall i \in [\![1,d'_0]\!], D_{\mathbf{X}^\perp} Y_j^0 = \{0\}$. En effet, les $\check{Y}_i^0$ sont choisis parallèles sur $\check{\mathcal{Y}}_{\check{m}}^0$ et la section $\sigma_{\mathcal{Y}}^0$ est affine ; les Y_i^0 sont donc parallèles le long de $\mathcal{Y}_m^0$. Ils sont ensuite propagés par tansport parallèle le long des feuilles de $\mathcal{W}^r$ et $\mathcal{Y}^s$, $s \neq 0$. Ils sont donc parallèles sur $\mathcal{X}_m^\perp$. Enfin, les $\check{\mathcal{U}}_i^r$ sont choisis parallèles sur $\check{\mathcal{U}}_{\check{m}}^r$ et la section $\sigma_{\mathcal{U}}^r$ est affine ; les U_i^r sont donc parallèles le long de $\mathcal{U}_{\check{m}}^r$. Le point **(b)** est vérifié.□

Rappelons également un résultat de calcul différentiel.

Sous-lemme 11 *Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et B un champ de formes bilinéaire sur E. Alors B est le hessien* – i.e. *ici la dérivée seconde — d'une fonction*

$f\ : E \to \mathbb{R}$ ssi *:*

- *B est un champ de formes bilinéaire symétriques*
- *B est de différentielle nulle,* i.e. *:*

$$\mathrm{d}B = ((V,V',V'') \mapsto (D_V B)(V',V'') - (D_{V'}B)(V,V'')) = 0$$

Démonstration : On notera $(V_i)_{i=1}^n$ un champ parallèle de bases de E. Supposons que $B = \mathrm{Hess}\, f$; B est symétrique par le lemme de Schwarz. Pour tout (i,j,k) de $[\![1,n]\!]^3$:

$$\mathrm{d}B(V_i,V_j,V_k) = \frac{\partial B(V_j,V_k)}{\partial V_i} - \frac{\partial B(V_i,V_k)}{\partial V_i} = \frac{\partial^3 f}{\partial V_i \partial V_j \partial V_k} - \frac{\partial^3 f}{\partial V_j \partial V_i \partial V_k} = 0.$$

D'où la partie directe. On suppose maintenent que B vérifie les prorpiétés exposées. Soit V un champ de vecteurs parallèle sur E. Par la deuxième propriété, le forme $\psi_V = B(\,\cdot\,,V)$ est fermée, donc on trouve une fonction g_V nulle en 0 et t.q. : $\psi_V = \mathrm{d}g_V$. La fonction ϕ : $V \mapsto g_V$ est alors une forme linéaire sur E. Comme B est symétrique, elle est fermée :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \frac{\partial \phi(V_i)}{\partial V_j} = B(v_j,v_i) = B(v_i,v_i) = \frac{\partial \phi(V_j)}{\partial V_i}.$$

On trouve donc une fonction f telle que $\mathrm{d}f = \phi$; par construction, $\mathrm{Hess}\, f = B$. □

II.3 Le lemme analytique

Notation. Introduisons encore deux sous-variétés de $\underset{\sim}{\mathcal{X}_m^\perp}$ qui interviennent dans le lemme et dans la suite. Si p est un point de $\mathcal{M}$, on notera $\widetilde{\mathcal{U}}_p$ et $\widetilde{\mathcal{V}}_p$ les sous-variétés de $\mathcal{M}$ définies, au moins au voisinage de p, par :

$$\widetilde{\mathcal{U}}_p = \pi^{-1}\left((\prod_{r=1}^{N} \check{\mathcal{U}}_{\check{p}}^r) \times (\prod_{s=0}^{N'} \check{\mathcal{Y}}_{\check{p}}^s) \right)$$

et :

$$\widetilde{\mathcal{V}}_p = \pi^{-1}\left((\prod_{r=1}^{N} \check{\mathcal{V}}_{\check{p}}^r) \times (\prod_{s=0}^{N'} \check{\mathcal{Y}}_{\check{p}}^s) \right).$$

Lemme 4 *Soit $(\mathcal{M},g)$ une variété pseudo-riemannienne de classe C^R avec $R \geq 4$, localement réductible, indécomposable, vérifiant la propriété* (**P1**)*. On reprend les notations introduites plus haut.*

Soient Z et T deux champs de vecteurs de classe C^{R-1} le long de $\mathcal{X}_m^\perp$;

soit $\mathfrak{R} = (((\overline{\mathbf{U}}^{r,k})_{k=1}^{n_r})_{r=1}^N,((\overline{\mathbf{V}}^{r,k})_{k=1}^{n_r})_{r=1}^N)$ une famille de relevés des drapeaux $(X,(\mathbf{U}_m^{r,k})_{k=0}^{n_r})$ et $(X,(\mathbf{V}_m^{r,k})_{k=n_r}^0)$, $r \in [\![1,N]\!]$, i.e. *une famille de décompositions*

$$\mathbf{U}_m^r = \mathbf{X}_m \oplus (\underset{1\leq k\leq n_r}{\oplus} \overline{\mathbf{U}}^{r,k}) \ \text{et}\ \mathbf{V}_m^r = \mathbf{X}_m \oplus (\underset{1\leq k\leq n_r}{\oplus} \overline{\mathbf{V}}^{r,k})$$

telle que :

$$\forall r \in [\![1,N]\!], \forall k_0 \in [\![0,n_r]\!], \mathbf{U}_m^{r,k_0} = \mathbf{X}_m \oplus (\underset{1\leq k\leq k_0}{\oplus} \overline{\mathbf{U}}^{r,k}) \ \text{et}\ \mathbf{V}_m^{r,k_0} = \mathbf{X}_m \oplus (\underset{n_r\geq k > k_0}{\oplus} \overline{\mathbf{V}}^{r,k}).$$

Alors :

(a) *si p est un point de $\mathcal{M}$ et si $(A,B) \in \mathbf{A}_p \times \mathbf{B}_p$ avec $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ dans $\mathfrak{F}$ et ($\mathcal{A} \perp \mathcal{B}$ ou $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{F}^0$), si Z_1 et Z_2 sont dans $T_p\mathcal{M}$, $R(A,Z_1,B,Z_2) = R(B,Z_1,A,Z_2)$*

(b) *il existe sur $\mathcal{X}_m^\perp$ au voisinage de m une forme linéaire $\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}}$ de classe C^{R-2}, nulle en m et telle que :*

* $$\begin{gathered}\forall p \in \mathcal{X}_m^\perp, \forall \mathcal{A},\mathcal{B} \in \mathfrak{F}, (\mathcal{A} \perp \mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{F}^0) \Rightarrow \\ \forall (A,B) \in \mathbf{A}_p \times \mathbf{B}_p, R(Z,A,T,B) = (D\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}})(A,B) = (D\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}})(B,A).\end{gathered}$$

* *en tout point de $\widetilde{\mathcal{U}}_m \cup \widetilde{\mathcal{V}}_m$, $\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}}$ est de différentielle nulle. En particulier, $\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}}$ induit par restriction une forme fermée sur $\widetilde{\mathcal{U}}_m$ et sur $\widetilde{\mathcal{V}}_m$.*

* $\forall k,l, \overline{\mathbf{U}}^{r,k} \not\perp \overline{\mathbf{V}}^{r,l} \Rightarrow \forall U \in \overline{\mathbf{U}}^{r,k}, \forall V \in \overline{\mathbf{V}}^{r,l}, \begin{cases} (D\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}})_{|m}(U,V) = 0 \\ (D\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}})_{|m}(V,U) = 0 \end{cases}$

(c) *Une telle forme $\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}}$ est définie modulo $\pi^*\left(\prod_{s=1}^{N'} \mathrm{Z}^1(\mathrm{T}^*\check{\mathcal{Y}}_{\check{m}}^s)\right)$,* i.e. *modulo l'image réciproque par π d'une forme produit fermée de $\check{\mathcal{X}}_{\check{m}}^\perp \simeq (\prod_r \check{\mathcal{W}}_{\check{m}}^r) \times (\prod_s \check{\mathcal{Y}}_{\check{m}}^s)$, nulle sur le facteur $(\prod_r \check{\mathcal{W}}_{\check{m}}^r) \times \check{\mathcal{Y}}_{\check{m}}^0$.*

(d) *De plus,*

* *Si l'holonomie agit trivialement sur $\mathbf{X}$, $\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}}$ est alors image réciproque par π d'une forme linéaire $\check{\rho}_{Z,T,m}$ de la variété quotient $\check{\mathcal{X}}_{\check{m}}^\perp$:*

$$\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}} = \pi^*(\check{\rho}_{Z,T,m}).$$

* *bien sûr,$\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}}$ dépend de (Z,T) de façon bilinéaire symétrique.*

Quelques matrices. Pour faciliter la compréhension de l'objet $\mathfrak{R}$, donnons quelques matrices où cet objet intervient : pour un r quelconque, la matrice de $< \cdot, \cdot >$ et la matrice générale de l'holonomie, en restriction à $\mathbf{W}_m^r$. On suppose que $n_r = 3$, alors $d_r^3 = d_r$. Une base de $\mathbf{U}_m^r$ formée d'une base de $\mathbf{U}_m^{r,1}$ complétée en base de $\mathbf{U}_m^{r,2}$ puis de $\mathbf{U}_m^{r,3}$, peut être complétée par sa base duale dans $\mathbf{V}_m$ pour former une base de $\mathbf{W}_m^r$. Notons $((u_i^r)_{i=1}^{d_r},(v_i^r)_{i=1}^{d_r})$ une telle base. Elle définit un n-uplet $\mathfrak{R}$ comme dans l'énoncé par :

$$\forall k \in [\![1,3]\!], \overline{\mathbf{U}}^{r,k} = \mathrm{vect}\left((u_i^r)_{i=d_r^{k-1}+1}^{d_r^k}\right) \quad \text{et } \overline{\mathbf{V}}^{r,k} = \mathrm{vect}\left((v_i^r)_{i=d_r^{k-1}+1}^{d_r^k}\right).$$

(Attention ce relevé est particulier car : $\forall k \in [\![1,3]\!], \forall l > k, \overline{\mathbf{V}}^{r,k} \perp \overline{\mathbf{U}}^{r,l}$.) Les matrices de la métrique et de l'holonomie dans cette base sont présentées dans le diagramme 4 page suivante.

II.4 Démonstration du lemme

Prenons (A,B) dans $\mathbf{A}_p \times \mathbf{B}_p$, avec $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ dans $\mathfrak{F}$ et ($\mathcal{A} \perp \mathcal{B}$ ou $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{Y}^0$) ; on choisit d'autre part Z_1 et Z_2 dans $T_p\mathcal{M}$. Alors :

$$\begin{aligned} R(A,Z_1,B,Z_2) &= -R(Z_1,B,A,Z_2) - R(B,A,Z_1,Z_2) \quad \text{(identité de Bianchi)} \\ &= R(B,Z_1,A,Z_2) + < R(Z_1,Z_2)A,B > \end{aligned}$$

L'espace $\mathbf{A}_p$ est stable par holonomie donc $R(Z_1,Z_2)A \in \mathbf{A}_p$. Donc, si $\mathcal{A} \perp \mathcal{B}$, $R(Z_1,Z_2)A \in \mathbf{A}_p \perp B$. Si $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{Y}^0$, $R(Z_1,Z_2)A \in \mathbf{X}^\perp \perp B$. Dans tous les cas, $< R(Z_1,Z_2)A,B >= 0$,

$$\mathrm{Mat}(<\cdot,\cdot>) = \begin{array}{cccccc}
\multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx}}^{\mathbf{U}_m^{r,3}=\mathbf{U}_m^r}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx}}^{\mathbf{V}_m^{r,0}=\mathbf{V}_m^r}} \\
\multicolumn{2}{l}{\overbrace{\hphantom{xxxxxxxxxxxxxx}}^{\mathbf{U}_m^{r,2}}} & & & \multicolumn{2}{r}{\overbrace{\hphantom{xxxxxxxxxxxxxx}}^{\mathbf{V}_m^{r,1}}} \\
\overbrace{\hphantom{xxxxxx}}^{\mathbf{U}_m^{r,1}} & & & & & \overbrace{\hphantom{xxxxxx}}^{\mathbf{V}_m^{r,2}} \\
\multicolumn{6}{c}{\left(\begin{array}{ccc||ccc}
 & & & I_{d_r^1} & 0 & 0 \\
 & 0 & & 0 & I_{d_r^2-d_r^1} & 0 \\
 & & & 0 & 0 & I_{d_r^3-d_r^2} \\
\hline\hline
I_{d_r^1} & 0 & 0 & & & \\
0 & I_{d_r^2-d_r^1} & 0 & & 0 & \\
0 & 0 & I_{d_r^3-d_r^2} & & &
\end{array}\right)} \\
\underbrace{\hphantom{xxxxxx}}_{\overline{\mathbf{U}}_m^{r,1}} & \underbrace{\hphantom{xxxxxx}}_{\overline{\mathbf{U}}_m^{r,2}} & \underbrace{\hphantom{xxxxxx}}_{\overline{\mathbf{U}}_m^{r,3}} & \underbrace{\hphantom{xxxxxx}}_{\overline{\mathbf{V}}_m^{r,1}} & \underbrace{\hphantom{xxxxxx}}_{\overline{\mathbf{V}}_m^{r,2}} & \underbrace{\hphantom{xxxxxx}}_{\overline{\mathbf{V}}_m^{r,3}}
\end{array} \quad \text{et}$$

$$h \in \mathfrak{h} \Rightarrow \mathrm{Mat}(h_{|\mathbf{W}_m^r}) = \left(\begin{array}{ccc||ccc}
A_{1,1}^r & A_{1,2}^r & A_{1,3}^r & & & \\
0 & A_{2,2}^r & A_{2,3}^r & & 0 & \\
0 & 0 & A_{3,3}^r & & & \\
\hline\hline
 & & & -{}^tA_{1,1}^r & 0 & 0 \\
 & 0 & & -{}^tA_{1,2}^r & -{}^tA_{2,2}^r & 0 \\
 & & & -{}^tA_{1,3}^r & -{}^tA_{2,3}^r & -{}^tA_{3,3}^r
\end{array}\right).$$

DIAGRAMME 4 – *Espace W_m^r, cas $n_r = 3$: matrices de la métrique et de l'holonomie*

d'où le premier point du lemme.

<u>Construction de coordonnées auxiliaires.</u> Pour montrer le deuxième point, on utilise des coordonnées de $\mathcal{M}$ au voisinage de m, respectant les feuilletages de $\mathfrak{F}$. Construisons un tel système.

Soit déjà $(\overline{z}_i)_{i=1}^{d\mathbf{x}}$ un système quelconque de coordonnées d'un voisinage $\overline{\mathcal{O}}$ de la classe de m dans la variété quotient $\mathcal{M}/\mathcal{X}^\perp$. Pour poursuivre, on a besoin du sous-lemme suivant :

Sous-lemme 12 *Si une variété $\mathcal{M}$ de classe C^R est munie d'une famille de feuilletages $(\mathcal{A}^r)_{r=1}^N$ de classe C^R, telle qu'en tout point p, $\mathcal{A}_p^1 \subsetneq \mathcal{A}_p^2 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathcal{A}_p^{N-1} \subsetneq \mathcal{A}_p^N = \mathcal{M}$, alors il existe des coordonnées C^R $((a_i^r)_{i=1}^{d_r})_{r=1}^N$ de $\mathcal{M}$ telles que, pout tout r, les ensembles du type $\{\forall k > r, a_i^k = cte\}$ sont les feuilles de $\mathcal{A}^r$. De plus, les $(a_i^{n-1})_{i=1}^{d_{n-1}}$ sont alors un système de coordonnées de $\mathcal{A}^N/\mathcal{A}^{n-1}$, qu'on peut choisir quelconque.*

Démonstration du sous-lemme. On le montre par récurrence sur N. Il est trivial pour $N = 1$. Supposons le vrai jusqu'au rang $N-1$. On trouve donc des coordonnées $((\check{a}_i^r)_{i=1}^{d_r})_{r=1}^N$ de $\check{\mathcal{M}} = \mathcal{M}/\mathcal{A}^1$ vérifiant la propriété annoncée, avec $(a_i^{n-1})_{i=1}^{d_{n-1}} = (\overline{a}_i^{n-1})_{i=1}^{d_{n-1}}$, où $(\overline{a}_i^{n-1})_{i=1}^{d_{n-1}}$ est un système de coordonnées arbitraire de $\mathcal{A}^N/\mathcal{A}^{n-1}$. On choisit alors un feuilletage $\mathcal{B}$ de classe C^R transverse à $\mathcal{A}^1$, m un point de $\mathcal{M}$ et des coordonnées C^R quelconques (a_i^1) de $\mathcal{A}_m^1$. Si $p \in \mathcal{M}$, on note $((a_i^r)_{i=1}^{d_r})_{r=1}^N$ ses coordonnées, où :

- $(a_i^r)_{i=1}^{d_r}$ sont les coordonnées, dans $\mathcal{A}_m^1$, de l'unique point de $\mathcal{B}_p \cap \mathcal{A}^1$ (Ce point est une fonction C^R du point p, par transversalité de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{A}_1$.),
- $\forall r > 1, (a_i^r)_{i=1}^{d_r} = (\check{a}_i^r)_{i=1}^{d_r}$ où les $(\check{a}_i^r)_{i=1}^{d_r}$ sont les coordonnées de $\check{p}$ dans $\check{\mathcal{M}}$.

Alors, si $r > 1$, les ensembles du type $\{\forall r, a_i^k = \text{cte}\}$ sont les ensembles $\pi^{-1}(\{\forall k > r, \check{a}_i^k = \text{cte}\})$ où $\pi : \mathcal{M} \to \check{\mathcal{M}}$, donc, par hypothèse de récurrence, les feuilles de $\pi^{-1}(\check{\mathcal{A}}^r)$, c'est-à-dire enfin les feuilles $\mathcal{A}^r$ car $\mathcal{A}^1 \subset \mathcal{A}^r$. D'autre part, par construction, les ensembles type $\{\forall k > 1, a_i^k = \text{cte}\}$ sont les feuilles de $\mathcal{A}^1$. Enfin, les coordonnées $(a_i^{n-1})_{i=1}^{d_{n-1}}$ restent inchangées, égales à $(\overline{a}_i^{n-1})_{i=1}^{d_{n-1}}$. Comme π est C^R, les coordonnées obtenues le sont aussi. La récurrence est propagée au rang N. C.Q.F.D.

On choisit alors une section σ_1 de $\pi_1 : \check{\mathcal{M}} = (\mathcal{M}/\mathcal{X}) \to (\mathcal{M}/\mathcal{X}^\perp)$, telle que $\sigma_1(\pi_1(\check{m})) = \check{m}$. Remarquons alors que chaque feuille $\check{\mathcal{X}}^\perp_{\sigma_1(p)}$ de $\check{\mathcal{M}} = \mathcal{M}/\mathcal{X}$ est canoniquement difféomorphe au produit $(\prod_r \check{\mathcal{U}}^r_{\sigma_1(p)}) \times (\prod_r \check{\mathcal{V}}^r_{\sigma_1(p)}) \times (\prod_s \check{\mathcal{Y}}^s_{\sigma_1(p)})$. Construisons des coordonnées de $\check{\mathcal{M}}$. On note :

- $\mathcal{S}^r_{\mathcal{U}} = \cup_{p\in\overline{\mathcal{O}}} \check{\mathcal{U}}^r_{\sigma_1(p)} \subset \check{\mathcal{M}} = \mathcal{M}/\mathcal{X}$ (Dans chaque feuille $\check{\mathcal{X}}^\perp_{\sigma_1(p)}$ de $\check{\mathcal{M}}$, $\mathcal{S}^r_{\mathcal{U}} \cap \check{\mathcal{X}}^\perp_{\sigma_1(p)} = \check{\mathcal{U}}^r_{\sigma_1(p)}$),
- $\mathcal{S}^r_{\mathcal{V}} = \cup_{p\in\overline{\mathcal{O}}} \check{\mathcal{V}}^r_{\sigma_1(p)} \subset \check{\mathcal{M}} = \mathcal{M}/\mathcal{X}$.
- $\mathcal{S}^s_{\mathcal{Y}} = \cup_{p\in\overline{\mathcal{O}}} \check{\mathcal{Y}}^s_{\sigma_1(p)} \subset \check{\mathcal{M}} = \mathcal{M}/\mathcal{X}$.

Pour chaque r, la variété $\mathcal{S}^r_{\mathcal{U}}$ admet les feuilletages emboîtés : $\check{\mathcal{U}}^{r,1} \subsetneq \check{\mathcal{U}}^{r,2} \subsetneq \ldots \subsetneq \check{\mathcal{U}}^{r,n_r} \subsetneq \mathcal{S}^r_{\mathcal{U}}$. Par le sous-lemme, on trouve donc des coordonnées $((\check{\tilde{u}}_i^r)_{i=1}^{d_r},(\check{\tilde{z}}_i)_{i=1}^{d_{\mathbf{X}}})$ de $\mathcal{S}^r$, telles que les pour tout k de $[\![1,n_r]\!]$, les coordonnées $(\check{\tilde{u}}_i^r)_{i=1}^{d_r^k}$ paramètrent les feuilles de $\check{\mathcal{U}}^{r,k}$, et avec : $\forall i \le d_{\mathbf{X}}, \check{\tilde{z}}_i = \pi_1 \circ \overline{z}_i$. On construit des coordonnées semblables $((\check{\tilde{v}}_i^r)_{i=1}^{d_r},(\check{\tilde{z}}_i)_{i=1}^{d_{\mathbf{X}}})$ sur les $\mathcal{S}^r_{\mathcal{V}}$, qui admettent les feuilletages emboîtés : $\check{\mathcal{V}}^{r,1} \subsetneq \check{\mathcal{V}}^{r,2} \subsetneq \ldots \subsetneq \check{\mathcal{V}}^{r,n_r} \subsetneq \mathcal{S}^r_{\mathcal{V}}$ et $((\check{\tilde{y}}_i^s)_{i=1}^{d'_s},(\check{\tilde{z}}_i)_{i=1}^{d_{\mathbf{X}}})$ sur les $\mathcal{S}^s_{\mathcal{Y}}$, qui admettent le feuilletage : $\check{\mathcal{Y}}^{s,1} \subsetneq \mathcal{S}^s_{\mathcal{Y}}$.

La famille de difféomorphismes : $\check{\mathcal{X}}^\perp_{\sigma_1(p)} \simeq (\prod_r \check{\mathcal{U}}^r_{\sigma_1(p)}) \times (\prod_r \check{\mathcal{V}}^r_{\sigma_1(p)}) \times (\prod_s \check{\mathcal{Y}}^s_{\sigma_1(p)})$ remarquée plus haut permet de prolonger les coordonnées construites ci-dessus en coordonnées $(((\check{\tilde{u}}_i^r)_{i=1}^{d_r},(\check{\tilde{v}}_i^r)_{i=1}^{d_r})_{r=1}^N,((\check{\tilde{y}}_i^s)_{i=1}^{d'_s})_{s=0}^{N'},(\check{\tilde{z}}_i)_{i=1}^{d_{\mathbf{X}}})$ d'un voisinage de $\check{m}$ dans $\check{\mathcal{M}}$, respectant les feuilletages $\check{\mathcal{U}}^{r,k}$, $\check{\mathcal{V}}^{r,k}$, $\check{\mathcal{Y}}^s$ et $\check{\mathcal{X}}^\perp$, et où : $\forall i \le d_{\mathbf{X}}, \check{\tilde{z}}_i = \pi_1 \circ \overline{z}_i$.

Enfin, on choisit une section locale σ en $\check{m}$ de $\pi : \mathcal{M} \to \check{\mathcal{M}} = \mathcal{M}/\mathcal{X}$ et un champ de bases $(\widetilde{X}_i)_{i=1}^{d_{\mathbf{X}}}$ de $\mathbf{X}$ le long de l'image de σ. Les feuilles du feuilletage $\mathcal{X}$ étant plates, ces bases fournissent un système local de coordonnées affines $(\widetilde{x}_i)_{i=1}^{d_{\mathbf{X}}}$ des $\mathcal{X}_p$, pour p voisin de m sur l'image de σ. Ces coordonnées ont sur $\mathcal{M}$ même régularité que le champ de bases $(X_i)_{i=1}^{d_{\mathbf{X}}}$. Enfin, en posant : $\forall r \in [\![1,N]\!], \forall i \in [\![1,d_r]\!], \widetilde{u}_i^r = \pi \circ \check{\tilde{u}}_i^r$ et $\widetilde{u}_i^r = \pi \circ \check{\tilde{u}}_i^r$, $\forall s \in [\![0,N']\!], \forall i \in [\![1,d_s]\!], \widetilde{y}_i^s = \pi \circ \check{\tilde{y}}_i^s$, et : $\forall i \in [\![1,d_{\mathbf{X}}]\!], \widetilde{z}_i = \pi \circ \check{\tilde{z}}_i$, le système :

$$((\widetilde{x}_i)_{i=1}^{d_{\mathbf{X}}}((\widetilde{u}_i^r)_{i=1}^{d_r},(\widetilde{v}_i^r)_{i=1}^{d_r})_{r=1}^N,((\widetilde{y}_i^s)_{i=1}^{d'_s})_{s=0}^{N'},(\widetilde{z}_i)_{i=1}^{d_{\mathbf{X}}})$$

est un système local de coordonnées de $\mathcal{M}$ au voisinage de m, de classe C^R, respectant les feuilletages $\mathcal{X}$, $\mathcal{U}^{r,k}$, $\mathcal{V}^{r,k}$, $\mathcal{Y}^s$ et $\mathcal{X}^\perp$, *i.e.* tel que, au voisinage de m dans $\mathcal{M}$:

- les coordonnées $(\widetilde{x}_i)_{i=1}^{d_{\mathcal{X}}}$ paramètrent les feuilles de $\mathcal{X}$.
- Pour tout r de $[\![1,N]\!]$ et tout k de $[\![1,n_r]\!]$, les coordonnées $(\widetilde{u}_i^r)_{i=1}^{d_r^k}$ paramètrent les feuilles de $\mathcal{U}^{r,k}$ et les coordonnées $(\widetilde{v}_i^r)_{i=1}^{d_r^k}$ celles de $\mathcal{V}^{r,k}$.
- Pour tout s de $[\![0,N']\!]$, les coordonnées $(\widetilde{y}_i^s)_{i=1}^{d'_s}$ paramètrent les feuilles de $\mathcal{Y}^s$.
- Les coordonnées $((\widetilde{x}_i)_{i=1}^{d_{\mathcal{X}}}((\widetilde{u}_i^r)_{i=1}^{d_r},(\widetilde{v}_i^r)_{i=1}^{d_r})_{r=1}^N,((\widetilde{y}_i^s)_{i=1}^{d'_s})_{s=0}^{N'}$ paramètrent les feuilles de $\mathcal{X}^\perp$.

On notera $\mathcal{O}$ l'ouvert autour de m où ces coordonnées sont définies.

Il suffit maintenant de montrer le résultat annoncé pour deux champs $\widetilde{Z}_{k_1}$ et $\widetilde{Z}_{k_2}$ de vecteurs-coordonnées le long de $\mathcal{X}_m^\perp$. On les notera Z et T pour alléger.

Affirmation 1. La forme $\alpha = (D_Z T)^\flat_{|\mathbf{X}^\perp}$ définie dans $\mathcal{O}$ le long de $\mathcal{X}_m^\perp$ est de classe C^{R-2} et vérifie alors, pour tous $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de $\mathfrak{F}$:

$$\begin{array}{c}(\mathcal{A} \perp \mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{F}^0) \Rightarrow \forall p \in \mathcal{X}_m^\perp, \\ \forall (A,B) \in \mathbf{A}_p \times \mathbf{B}_p, (D_A\alpha)(B) = (D_B\alpha)(A) = R(Z,A,T,B)\end{array} . \tag{$*$}$$

Les champs de vecteurs-coordonnées ont un ordre de régularité de moins que les coordonnées et sont donc de classe C^{R-1}. Le champ $D_Z T$ et par là la forme α est sont donc de classe C^{R-2}. L'expression est tensorielle en A et B ; d'autre part, les coordonnées construites plus haut fournissent en tout point p une base de vecteurs-coordonnées de chaque espace $\mathbf{A}_p$ pour $\mathcal{A} \in \mathfrak{F}$. Il suffit donc de vérifier la propriété pour A et B de tels vecteurs-coordonnées en p. On suppose donc A et B de tels vecteurs, alors :

$$R(Z,A,T,B) = < D_A D_Z T, B > - < D_Z D_A T, B > .$$

car les champs de vecteurs manipulés sont associés à des coordonnées, donc commutent ; ils commutent aussi avec les champs T et Z, d'où : $D_A T = D_T A$. Or le champ A est dans la distribution parallèle $\mathbf{A}$, il en est donc de même pour $D_T A$, et de nouveau pour $D_Z D_T A$. Si $\mathcal{A} \perp \mathcal{B}$, $B \in \mathbf{B}_p \perp \mathbf{A}_p$, donc le second terme du membre de droite est nul. Si $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{F}^0$, et par construction des coordonnées, $D_T A \in \mathbf{X}_p$. $\mathbf{X}_p$ est stable par holonomie, donc de nouveau $D_Z D_T A \in \mathbf{X}_p$ et $B \perp D_Z D_T A$. Dans tous les cas le second terme du membre de droite est nul. D'autre part :

$$\begin{aligned}(D_A\alpha)(B) &= L_A(\alpha(B)) - \alpha(D_A B) \\ &= L_A < D_Z T, B > - < D_Z T, D_A B > \\ &= < D_A D_Z T, B >\end{aligned}$$

D'où : $(D_A\alpha)(B) = R(Z,A,T,B)$. Par le premier point du lemme enfin, $R(Z,A,T,B) = R(Z,B,T,A)$, d'où la première affirmation.

Affirmation 2. Il existe alors au voisinage de m sur $\mathcal{X}_m^\perp$ une forme différentielle β de classe C^{R-2} qui vérifie :

- au point m, $\beta_{|m} = \alpha_{|m}$,
- pour tout $\mathcal{A}$ et tout $\mathcal{B}$ de $\mathfrak{F}$:

$$(\mathcal{A} \perp \mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{F}^0) \Rightarrow \forall p \in \mathcal{X}_m^\perp, \forall (A,B) \in \mathbf{A}_p \times \mathbf{B}_p, (D_A\beta)(B) = (D_B\beta)(A) = 0 \tag{$*0$}$$

- en tout point de $\widetilde{\mathcal{U}}_m \cup \widetilde{\mathcal{V}}_m$, $\mathrm{d}\beta = \mathrm{d}\alpha$ *i.e.* :

$$\forall p \in \widetilde{\mathcal{U}}_m \cup \widetilde{\mathcal{V}}_m, \forall A,B \in \mathbf{X}_p^\perp, \mathrm{d}\beta(A,B) = \mathrm{d}\alpha(A,B). \tag{$**$}$$

Pour construire cette forme auxiliaire, on choisit déja, pour chaque $r \in [\![1,N]\!]$, une section $\sigma_{\mathcal{U}}^r$ de chaque fibré $\mathcal{U}_m^r \to \mathcal{U}_m^r/\mathcal{X}$ et une section $\sigma_{\mathcal{V}}^r$ de chaque fibré $\mathcal{V}_m^r \to \mathcal{V}_m^r/\mathcal{X}$, et pour chaque $s \in [\![0,N']\!]$, une section $\sigma_{\mathcal{Y}}^r$ de chaque fibré $\mathcal{Y}_m^r \to \mathcal{Y}_m^r/\mathcal{X}$. On choisit affines les sections $\sigma_{\mathcal{U}}^r$, $\sigma_{\mathcal{V}}^r$ ($r \in [\![1,N]\!]$) et $\sigma_{\mathcal{Y}}^0$ des fibrés plats respectifs $\mathcal{U}_m^r$, $\mathcal{V}_m^r$ et $\mathcal{Y}_m^0$. On choisit de plus les $\sigma^r_{\mathcal{U}}$ et les $\sigma^r_{\mathcal{V}}$ telles que les relevés $(((\overline{\mathbf{U}}^{r,k})_{k=1}^{n_r})_{r=1}^{N},((\overline{\mathbf{V}}^{r,k})_{k=1}^{n_r})_{r=1}^{N})$ introduits dans l'énoncé soient dans leur image, *i.e.* telles que : $\forall r \in [\![1,N]\!], \forall k \in [\![1,n_r]\!], (\,\mathrm{d}\sigma^r_{\mathcal{U}})_{|m}(\check{\overline{\mathbf{U}}}^{r,k}) = \overline{\mathbf{U}}^{r,k}$ et $(\,\mathrm{d}\sigma^r_{\mathcal{V}})_{|m}(\check{\overline{\mathbf{V}}}^{r,k}) = \overline{\mathbf{V}}^{r,k}$. Toutes les sections sont enfin choisies appliquant m sur $\check{m}$. On notera pour tout r de $[\![1,N]\!]$, $\mathcal{S}^r_{\mathcal{U}} = \sigma^r_{\mathcal{U}}(\check{\mathcal{U}}^r_{\check{m}})$ et $\mathcal{S}^r_{\mathcal{V}} = \sigma^r_{\mathcal{V}}(\check{\mathcal{V}}^r_{\check{m}})$, et pour tout s de $[\![0,N']\!]$, $\mathcal{S}^s_{\mathcal{Y}} = \sigma^s_{\mathcal{Y}}(\check{\mathcal{Y}}^s_{\check{m}})$.

Le sous-lemme 10 fournit alors des coordonnées $((x_i)_{i=1}^{d_{\mathbf{X}}},((u^r_i)_{i=1}^{d_r},(v^r_i)_{i=1}^{d_r})_{r=1}^{N},(y^r_i)_{i=1}^{d'_r})_{r=0}^{N'})$ de classe C^R de $\mathcal{X}^\perp_m$ au voisinage de m :

- Adaptées aux feuilletages $\mathcal{X}$, $\mathcal{U}^{r,k}$, $\mathcal{V}^{r,k}$ et $\mathcal{Y}^s$, *i.e.* t.q. les coordonnées $(x_i)_{i=1}^{d_{\mathbf{X}}}$ paramètrent les feuilles de $\mathcal{X}$, les coordonnées $((x_i)_{i=1}^{d_{\mathbf{X}}}(u^r_i)_{i=1}^{d^k_r})$ celles de $\mathcal{U}^{r,k}$ et les coordonnées $((x_i)_{i=1}^{d_{\mathbf{X}}}(v^r_i)_{i=d^k_r+1}^{d_r})$ celles de $\mathcal{V}^{r,k}$, pour tout r de $[\![1,N]\!]$ et tout k de $[\![1,n_r]\!]$ et les coordonnées $((x_i)_{i=1}^{d_{\mathbf{X}}}(y^s_i)_{i=1}^{d'_s})$ celles de $\mathcal{Y}^s$, pour tout s de $[\![0,N']\!]$.
- Telles que : $\forall r \in [\![1,N]\!], \{p\,/\,\forall i, x_i = 0\} \cap \mathcal{U}^r_m = \mathcal{S}^r_{\mathcal{U}}$, $\forall r \in [\![1,N]\!], \{p\,/\,\forall i, x_i = 0\} \cap \mathcal{V}^r_m = \mathcal{S}^r_{\mathcal{V}}$ et $\forall s \in [\![0,N']\!], \{p\,/\,\forall i, x_i = 0\} \cap \mathcal{Y}^s_m = \mathcal{S}^s_{\mathcal{Y}}$.
- Vérifiant toutes les autres propriétés annnoncées dans le lemme.

On notera alors enfin $\mathcal{S} = \{\forall i, x_i = 0\,\}$ et, pour tout r, $\mathcal{S}^r_{\mathcal{W}} = \mathcal{S} \cap \mathcal{W}^r_m$. Alors, en particulier : $\forall r, \mathcal{U}^r_m \cap \mathcal{S} = \mathcal{S}^r_{\mathcal{U}}$, $\forall r, \mathcal{V}^r_m \cap \mathcal{S} = \mathcal{S}^r_{\mathcal{V}}$ et $\forall s, \mathcal{Y}^s_m \cap \mathcal{S} = \mathcal{S}^s_{\mathcal{Y}}$.

On construit alors β :

(I) On pose, pour chaque feuilletage $\mathcal{A}$ parmi les $\mathcal{W}^r$ et les $\mathcal{Y}^s$: $(D_\beta)(\mathbf{A}^\perp,\mathbf{A}) = \{0\}$ *i.e.* $\beta_{|\mathbf{A}}$ parallèle le long de $\mathcal{A}^\perp_m$. C'est possible car la distribution $\mathbf{A}$ est parallèle le long des feuilles de $\mathcal{A}^\perp$, *cf.* sous-lemme 9. Il suffit alors de définir $\beta_{|\mathbf{A}}$ sur l'image d'une section de $\mathcal{A} \to \check{\mathcal{A}}$; ce sont les points **(II)** et **(III)**.

(II) On pose : $\beta_{|\mathbf{X}_m} = \alpha_{|\mathbf{X}_m}$ et $(D\beta)(\mathbf{X}^\perp,\mathbf{X}) = \{0\}$, *i.e.* $\beta_{|\mathbf{X}}$ parallèle le long de $\mathcal{X}^\perp_m$. C'est possible car la distribution $\mathbf{X}$ est parallèle le long de $\mathcal{X}^\perp_m$. Il reste alors à définir la restriction de β au fibré tangent d'une section de chaque $\mathcal{A} \to \check{\mathcal{A}}$.

(III) Pour chaque r, on définit la restriction β^r de $\beta_{|\mathbf{W}^r}$ à $\mathrm{T}\mathcal{S}^r_{\mathcal{W}}$ et pour chaque s, la restiction β'^s de $\beta_{|\mathbf{Y}^s}$ à $\mathrm{T}\mathcal{S}^s_{\mathcal{Y}}$.

Remarque : β est alors de classe C^{R-2} *ssi* chaque β^r et chaque β'^s l'est. On le vérifiera simplement.

Sur la feuille plate $\check{\mathcal{Y}}^0_{\check{m}}$, on pose $\beta'^0_{|m} = \alpha_{|\mathrm{T}_m\mathcal{S}^0_{\mathcal{Y}}}$ et $D\beta'^0 = 0$, *i.e.* β'^0 est une forme parallèle de la sous-variété, plate, $\mathcal{S}^0_{\mathcal{Y}}$, égale à $\alpha_{|\mathrm{T}_m\mathcal{S}^0_{\mathcal{Y}}}$ en m. Comme α, β'^0 est donc C^{R-2}.

Sur chaque $\mathcal{S}^s_{\mathcal{Y}}$, $s \in [\![1,N']\!]$, on pose $\beta'^s = \alpha_{|\mathrm{T}\mathcal{S}^s_{\mathcal{Y}}}$, *i.e.* pour tout Y de $\mathrm{T}\mathcal{S}^s_{\mathcal{Y}}$, $\beta'^s(Y) = \alpha(Y)$. De la même façon,
β'^s est C^{R-2}.

Sur chaque $\mathcal{S}^r_{\mathcal{W}}$, on définit β^r par les trois points suivants :

(i) les restrictions $\beta^r_{|\mathbf{U}^r\cap\mathrm{T}\mathcal{S}^r_{\mathcal{W}}}$ et $\beta^r_{|\mathbf{V}^r\cap\mathrm{T}\mathcal{S}^r_{\mathcal{W}}}$ sont parallèles, respectivement le long des feuilles de $\mathcal{U}^r \cap \mathcal{S}^r_{\mathcal{W}}$ et de $\mathcal{V}^r \cap \mathcal{S}^r_{\mathcal{W}}$, *i.e.* : $\forall p \in \mathcal{S}^r_{\mathcal{W}}, \forall U \in \mathbf{U}^r_p \cap \mathrm{T}_p\mathcal{S}^r_{\mathcal{W}}, D_U\beta^r_{|\mathbf{U}^r_p\cap\mathrm{T}_p\mathcal{S}^r_{\mathcal{W}}} = 0$ et $\forall V \in \mathbf{V}^r_p \cap \mathrm{T}_p\mathcal{S}^r_{\mathcal{W}}, D_V\beta^r_{|\mathbf{V}^r_p\cap\mathrm{T}_p\mathcal{S}^r_{\mathcal{W}}} = 0$. C'est possible car en tout point p : $R(\mathbf{U}^r_p,\mathbf{U}^r_p) = R(\mathbf{V}^r_p,\mathbf{V}^r_p) = \{0\}$,

(ii) on définit β^r et $D\beta^r$ en m,

(iii) on définit, le long respectivement de $\mathcal{S}^r_{\mathcal{U}}$ et $\mathcal{S}^r_{\mathcal{V}}$,la dérivée seconde de $\beta^r_{|\mathbf{V}^r\cap\mathrm{T}\mathcal{S}^r_{\mathcal{W}}}$ et de $\beta^r_{|\mathbf{U}^r\cap\mathrm{T}\mathcal{S}^r_{\mathcal{W}}}$.

Ces trois points définissent sur $\mathcal{S}^r_{\mathcal{W}}$, d'une part $\beta^r_{|\mathbf{U}^r\cap\mathrm{T}\mathcal{S}^r_{\mathcal{W}}}$, d'autre part $\beta^r_{|\mathbf{V}^r\cap\mathrm{T}\mathcal{S}^r_{\mathcal{W}}}$, donc définissent β^r sur $\mathcal{S}^r_{\mathcal{W}}$. La forme β^r est alors C^{R-2} *ssi* la dérivée seconde de $\beta^r_{|\mathbf{V}^r\cap\mathrm{T}\mathcal{S}^r_{\mathcal{W}}}$ et de $\beta^r_{|\mathbf{U}^r\cap\mathrm{T}\mathcal{S}^r_{\mathcal{W}}}$ dont il est question au point **(iii)** est C^{R-4}. On le vérifiera. Précisons les étapes **(ii)** et **(iii)**.

• **L'étape (ii)**. On pose :

- $\beta^r_{|m} = \alpha_{|\mathrm{T}_m\mathcal{S}^r_{\mathcal{W}}}$,
- $\forall k \in [\![1,n_r]\!], (D\beta^r)_{|m}(\mathbf{U}^{r,k}_m\cap\mathrm{T}_m\mathcal{S}^r_{\mathcal{W}},(\mathbf{U}^{r,k}_m)^\perp\cap\mathrm{T}_m\mathcal{S}^r_{\mathcal{W}}) = (D\beta^r)_{|m}(\mathbf{V}^{r,k}_m\cap\mathrm{T}_m\mathcal{S}^r_{\mathcal{W}},(\mathbf{V}^{r,k}_m)^\perp\cap\mathrm{T}_m\mathcal{S}^r_{\mathcal{W}}) = \{0\}$. En particulier :
  - ∗ $(D\beta^r)_{|m}(\mathbf{U}^r_m\cap\mathrm{T}_m\mathcal{S}^r_{\mathcal{W}},(\mathbf{U}^r_m)^\perp\cap\mathrm{T}_m\mathcal{S}^r_{\mathcal{W}}) = (D\beta^r)_{|m}(\mathbf{V}^r_m\cap\mathrm{T}_m\mathcal{S}^r_{\mathcal{W}},(\mathbf{V}^r_m)^\perp\cap\mathrm{T}_m\mathcal{S}^r_{\mathcal{W}}) = \{0\}$ (le point **(ii)** est donc compatible avec le point **(i)**) et :
  - ∗ $\forall k \in [\![1,n_r]\!], (D\beta^r)_{|m}(\mathbf{U}^{r,k}_m\cap\mathrm{T}_m\mathcal{S}^r_{\mathcal{W}},(\mathbf{V}^{r,k}_m)\cap\mathrm{T}_m\mathcal{S}^r_{\mathcal{W}}) = (D\beta^r)_{|m}(\mathbf{V}^{r,k}_m\cap\mathrm{T}_m\mathcal{S}^r_{\mathcal{W}},(\mathbf{U}^{r,k}_m)\cap\mathrm{T}_m\mathcal{S}^r_{\mathcal{W}}) = \{0\}$.
- $\forall k \in [\![1,n_r]\!], \forall l \leq k, \begin{cases} (D\beta^r)_{|m}(\overline{\mathbf{U}}^{r,k},\overline{\mathbf{V}}^{r,l}) = (D\alpha)_{|m}(\overline{\mathbf{U}}^{r,k},\overline{\mathbf{V}}^{r,l}) \\ (D\beta^r)_{|m}(\overline{\mathbf{V}}^{r,k},\overline{\mathbf{U}}^{r,l}) = (D\alpha)_{|m}(\overline{\mathbf{V}}^{r,k},\overline{\mathbf{U}}^{r,l}), \end{cases}$

  c'est-à-dire :

$$\forall k,l, \overline{\mathbf{U}}^{r,k} \not\perp \overline{\mathbf{V}}^{r,l} \Rightarrow \forall U \in \overline{\mathbf{U}}^{r,k}, \forall V \in \overline{\mathbf{V}}^{r,l}, \begin{cases} (D\beta^r)_{|m}(U,V) = (D\alpha)_{|m}(U,V) \\ (D\beta^r)_{|m}(V,U) = (D\alpha)_{|m}(V,U) \end{cases}.$$

  Comme le point qui précède définit les $(D\beta^r)_{|m}(\overline{\mathbf{U}}^{r,k},\overline{\mathbf{V}}^{r,l})$ et les $(D\beta^r)_{|m}(\overline{\mathbf{V}}^{r,k},\overline{\mathbf{U}}^{r,l})$ pour $\overline{\mathbf{U}}^{r,k} \perp \overline{\mathbf{V}}^{r,l}$, on a donc défini :

$$(D\beta^r)_{|m}(+_{r,k}\overline{\mathbf{U}}^{r,k}, +_{r,k}\overline{\mathbf{V}}^{r,l}) \text{ et } (D\beta^r)_{|m}(+_{r,k}\overline{\mathbf{V}}^{r,k}, +_{r,k}\overline{\mathbf{U}}^{r,l}),$$

  c'est-à-dire, par définition des sections $\sigma^r_{\mathcal{U}}$ et $\sigma^r_{\mathcal{V}}$:

$$(D\beta^r)_{|m}(\mathrm{T}_m\mathcal{S}^r_{\mathcal{U}},\mathrm{T}_m\mathcal{S}^r_{\mathcal{V}}) \text{ et } (D\beta^r)_{|m}(\mathrm{T}_m\mathcal{S}^r_{\mathcal{V}},\mathrm{T}_m\mathcal{S}^r_{\mathcal{U}}).$$

• **L'étape (iii)**. La forme β^r est définie en m ; par le point **(i)**, $\beta^r_{|\mathbf{U}^r\cap\mathrm{T}\mathcal{S}^r_{\mathcal{W}}} = \beta^r_{|\mathrm{T}\mathcal{S}^r_{\mathcal{U}}}$ est donc définie le long de la variété $\mathcal{S}^r_{\mathcal{U}}$. Par le point **(I)**, c'est donc $\beta_{|\mathbf{U}^r}$ qui est définie le long de $\mathcal{S}^r_{\mathcal{U}}$. Définissons la dérivée seconde de $\beta^r_{|\mathbf{V}^r\cap\mathrm{T}\mathcal{S}^r_{\mathcal{W}}}$ le long de $\mathcal{S}^r_{\mathcal{U}}$. Il suffit la définir sur les champs de coordonnées $(V^r_i)_{i=1}^{d_r}$, qui en tout point forment une base de $\mathbf{V}^r \cap \mathrm{T}\mathcal{S}^r_{\mathcal{W}}$. Soit $i \in [\![1,d_r]\!]$; le vecteur-coordonnée V^r_i est un champ de vecteurs parallèle le long de $\mathcal{U}^r_m$ (*cf.* lemme 10, **(b)**). On pose alors :

$$\forall p \in \mathcal{S}^r_{\mathcal{U}}, \forall j,k \in [\![1,d_r]\!], L_{U^r_j}L_{U^r_k}(\beta^r(V^r_i)) = L_{U^r_j}\,\mathrm{d}\alpha(U^r_k,V^r_i) + \beta(R(U^r_j,V^r_i).U^r_k).$$

Cela définit la dérivée seconde de $\beta^r(V^r_i)$ le long de $\mathcal{S}^r_{\mathcal{U}}$. En effet, d'une part $R(U^r_j,V^r_i).U^r_k \in \mathbf{U}^r_p$ donc $\beta(R(U,V).U')$ est bien définie, d'autre part, par le sous-lemme 11, une forme bilinéaire B sur un espace plat est le hessien d'une fonction *ssi* :

∗ B est symétrique,

$*$ $\mathrm{d}B = ((U,U',U'') \mapsto (D_U B)(U',U'') - (D_{U'} B)(U,U'')) = 0,$

et on vérifie qu'effectivement :

$*$ $L_{U_j^r}\,\mathrm{d}\alpha(U_k^r,V_i^r)$ et $\beta(R(U_j^r,V_i^r).U_k^r)$ sont symétriques en U_j^r et U_k^r,

$*$ Pour tout l de $[\![1,d_r]\!]$, $L_{U_l^r} L_{U_j^r}\,\mathrm{d}\alpha(U_k^r,V_i^r) = L_{U_j^r} L_{U_l^r}\,\mathrm{d}\alpha(U_k^r,V_i^r)$ et $L_{U_l^r}(\beta(R(U_j^r,V_i^r).U_k^r)) = L_{U_j^r}(\beta(R(U_l^r,V_i^r).U_k^r))$.

(Partout, on profite du fait que les U_j^r, U_k^r, U_l^r et V_i^r commutent et sont parallèles le long de $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}^r$ plat pour remlacer les dérivées covariantes D par des dérivées de Lie L. Cela allège les calculs qui suivent.)

Vérifions donc les propriétés annoncées.

- $R(U,V).U'$ est symétrique en U et U' par le premier point du lemme.

- Vérifions la symétrie en j et k de $L_{U_j^r}\,\mathrm{d}\alpha(U_k^r,V_i^r)$.

$$\begin{aligned}
L_{U_i^r}\,\mathrm{d}\alpha(U_j^r,V_k^r) &= L_{U_i^r}(L_{U_j^r}\alpha(V_k^r) - L_{V_k^r}\alpha(U_j^r)) \\
&= L_{U_i^r}L_{U_j^r}\alpha(V_k^r) - L_{V_k^r}L_{U_i^r}\alpha(U_j^r) \\
&= L_{U_i^r}L_{U_j^r}\alpha(V_k^r) - L_{V_k^r}((D_{U_i^r}\alpha)(U_j^r)) + L_{V_k^r}(\alpha(D_{U_i^r}U_j^r)) \\
&= L_{U_i^r}L_{U_j^r}\alpha(V_k^r) - L_{V_k^r}((D_{\mathrm{d}\sigma.U_i^r}\alpha)(\mathrm{d}\sigma.U_j^r)) + L_{V_k^r}(\alpha(D_{U_i^r}U_j^r))
\end{aligned}$$

Le premier terme est symétrique en i et j par le lemme de Schwartz (U_i^r et U_j^r sont des vecteurs-coordonnées), le deuxième par l'affirmation 1 et le troisième encore parce que U_i^r et U_j^r sont des vecteurs-coordonnées : $D_{U_i^r}U_j^r - D_{U_j^r}U_i^r = [U_i^r,U_j^r] = 0$. Pour tout l de $[\![1,d_r]\!]$, $L_{U_l^r}L_{U_j^r}\,\mathrm{d}\alpha(U_k^r,V_i^r) = L_{U_j^r}L_{U_l^r}\,\mathrm{d}\alpha(U_k^r,V_i^r)$ et $L_{U_l^r}(\beta(R(U_j^r,V_i^r).U_k^r)) = L_{U_j^r}(\beta(R(U_l^r,V_i^r).U_k^r))$.

- Pour tout l de $[\![1,d_r]\!]$, $L_{U_l^r}L_{U_j^r}\,\mathrm{d}\alpha(U_k^r,V_i^r) = L_{U_j^r}L_{U_l^r}\,\mathrm{d}\alpha(U_k^r,V_i^r)$: c'est le lemme de Schwartz.

- Pour tout l de $[\![1,d_r]\!]$, $L_{U_l^r}(\beta(R(U_j^r,V_i^r).U_k^r)) = L_{U_j^r}(\beta(R(U_l^r,V_i^r).U_k^r))$. Cela découle de la deuxième identité de Bianchi.

$$\begin{aligned}
L_{U_l^r}(\beta(R(U_j^r,V_i^r).U_k^r)) &= (D_{U_l^r}\beta)(R(U_j^r,V_i^r).U_k^r) + \beta((D_{U_l^r}R)(U_j^r,V_i^r).U_k^r) \\
&\quad + \beta(R(D_{U_l^r}U_j^r,V_i^r).U_k^r) + \beta(R(U_j^r,D_{U_l^r}V_i^r).U_k^r) \\
&\quad + \beta(R(U_j^r,V_i^r).(D_{U_l^r}U_k^r)) \\
&= \beta((D_{U_l^r}R)(U_j^r,V_i^r).U_k^r).
\end{aligned}$$

En effet, par le point **(i)** de la construction de β, $D_\beta(\mathbf{U}^r,\mathbf{U}^r) = \{0\}$, or $U_l^r \in \mathbf{U}^r$ et $R(U_j^r,V_i^r).U_k^r \in \mathbf{U}^r$, donc le premier terme est nul. D'autre part, les coordonnées utilisées, fournies par le sous-lemme 10, sont telles que, le long de $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}^r$, $D_{U_l^r}U_j^r = D_{U_l^r}U_k^r = D_{U_l^r}V_i^r = 0$, d'où la nullité des derniers termes. Alors, par la deuxième identité de Bianchi :

$$\begin{aligned}
L_{U_l^r}(\beta(R(U_j^r,V_i^r).U_k^r)) &= \beta((D_{U_l^r}R)(U_j^r,V_i^r).U_k^r) \\
&= -\beta((D_{V_i^r}R)(U_l^r,U_j^r).U_k^r) - \beta((D_{U_j^r}R)(V_i^r,U_l^r).U_k^r) \\
&= -\beta(L_{V_i^r}(\underbrace{R(U_l^r,U_j^r)}_{\equiv 0 \text{ sur } \mathcal{X}_m^\perp}.U_k^r) - R(D_{V_i^r}U_l^r,U_j^r).U_k^r - R(U_l^r,D_{V_i^r}U_j^r).U_k^r \\
&\qquad - R(U_l^r,U_j^r).(D_{V_i^r}U_k^r)) + \beta((D_{U_j^r}R)(U_l^r,V_i^r).U_k^r) \\
&= \beta((D_{U_j^r}R)(U_l^r,V_i^r).U_k^r) \\
&= L_{U_l^r}(\beta(R(U_j^r,V_i^r).U_k^r)) \qquad \text{par le même raisonnement,} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{en sens contraire.}
\end{aligned}$$

Enfin, la forme α est C^{R-2} donc $L_{U_j^r}\,\mathrm{d}\alpha(U_k^r,V_i^r)$ est de classe C^{R-4} le long de $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}^r$. La restriction $\beta^r_{|\mathbf{U}^r\cap \mathrm{T}\mathcal{S}_{\mathcal{W}}^r}$ est définie par les points **(ii)** et **(ii)** comme le prolongement par transport parallèle de $\alpha_{|\mathbf{U}_m^r\cap \mathrm{T}_m\mathcal{S}_{\mathcal{W}}^r}$ le long de $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}^r$, elle est donc de classe C^{R-2}. Comme le tenseur R est également C^{R-2}, l'expression $\beta(R(U_j^r,V_i^r).U_k^r)$ est encore C^{R-2}. Finalement donc $L_{U_j^r}L_{U_k^r}(\beta^r(V_i^r))$ est de classe C^{R-4} le long de $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}^r$ et donc $\beta^r_{|\mathbf{V}^r\cap \mathrm{T}\mathcal{S}_{\mathcal{W}}^r}$ est de classe C^{R-4} le long de $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}^r$.

La forme auxiliaire β est donc construite au voisinage de m dans $\mathcal{X}_m^\perp$. Vérifions à présent qu'elle satisfait **(∗0)** :

$$\begin{gathered}
\forall \mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathfrak{F}, (\mathcal{A}\perp\mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{A}=\mathcal{B}=\mathcal{F}^0) \Rightarrow \\
\forall p\in\mathcal{X}_m^\perp, \forall (A,B)\in\mathbf{A}_p\times\mathbf{B}_p, (D_A\beta)(B) = (D_B\beta)(A) = 0
\end{gathered} \tag{$*0$}$$

Par le point **(I)** de la construction de β et en reprenant les notations ci-dessus, si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux distincts des feuilletages $((\mathcal{W}^r)_{r=1}^N,(\mathcal{Y}^s)_{s=0}^{N'})$, $D\beta(\mathbf{A}_p,\mathbf{B}_p) = D\beta(\mathbf{B}_p,\mathbf{A}_p) = 0$, c'est le résultat voulu. Reste donc à prouver la propriété :

- pour $\mathcal{A}=\mathcal{B}=\mathcal{Y}^0$. Par construction, $\beta_{|\mathbf{Y}^0}$ est parallèle le long de $\check{\mathcal{Y}}_m^0$ donc en tout point de $\mathcal{S}_{\mathcal{Y}}^0$: $(D_{\mathbf{Y}^0}\beta)(\mathbf{Y}^0) = (D_{\mathbf{Y}^0}\beta)(\mathbf{Y}^0) = 0$. L'égalité est alors vraie le long de $\mathcal{X}_m^\perp$ tout entier car par **(I)**, $\beta_{|\mathbf{Y}^0}$ est parallèle le long des feuilles de $(\mathcal{Y}^0)^\perp$.

- pour $\mathcal{A}=\mathcal{B}=\mathcal{U}^r$, $r\in[\![1,N]\!]$. $\beta_{\mathbf{U}^r}$ étant parallèle le long des feuilles de $(\mathcal{W}^r)^\perp$ (point **(I)**), il suffit encore de vérifier la propriété sur $\mathrm{T}\mathcal{S}_{\mathcal{W}}^r$. Sur cette variété, elle est alors vraie par le point **(i)** de la construction de β^r.

- pour $\mathcal{A}=\mathcal{U}^{r,k}$ et $\mathcal{B}=\mathcal{V}^{r,k}$, $r\in[\![1,N]\!]$, $k\in[\![1,n_r]\!]$. Il suffit comme au point précédent de vérifier la propriété pour β^r sur $\mathrm{T}\mathcal{S}_{\mathcal{W}}^r$.

∗ Elle est vraie au point m par le point **(ii)** de la construction de β^r.

∗ Elle est vraie le long $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}^r$. Vu le point précédent, il suffit de le vérifier sur les dérivées de $(D\beta)(\mathbf{U}^{r,k}\cap \mathrm{T}\mathcal{S}_{\mathcal{W}}^r,\mathbf{V}^{r,k}\cap \mathrm{T}\mathcal{S}_{\mathcal{W}}^r)$; on le fait avec les vecteurs-coordonnées $(U_i^r)_{i=1}^{d_r}$ et $(V_i^r)_{i=1}^{d_r}$. Soient $i\in[\![1,d_r]\!]$, $j\in[\![1,d_r^k]\!]$ et $l\in[\![d_r^k+1,d_r]\!]$ (*i.e.* i quelconque, j tel que

$U_j^r \in \mathbf{U}^{r,k}$ et l tel que $V_l^r \in \mathbf{V}^{r,k}$). Alors, par le point **(iii)** de la construction de β :

$$\begin{aligned} L_{U_i^r}((D_{U_j^r}\beta^r)(V_l^r)) &= L_{U_i^r}L_{U_j^r}(\beta^r(V_l^r)) - L_{U_i^r}(\beta^r(\underbrace{D_{U_j^r}V_l^r}_{=0 \text{ par le lemme 10, } \textbf{(b)}})) \\ &= L_{U_i^r}(\,\mathrm{d}\alpha(U_j^r,V_l^r)) + \beta(R(U_j^r,V_l^r)U_i^r). \end{aligned}$$

Mais $\mathrm{d}\alpha(U_j^r,V_l^r) = (D\alpha)(U_j^r,V_l^r) - (D\alpha)(V_l^r,U_j^r) \equiv 0$ par l'affirmation 1 et $R(U_j^r,V_l^r)U_i^r \equiv 0$ par le sous-lemme 9.

$*$ Elle est vraie enfin sur $\mathrm{T}\mathcal{S}_{\mathcal{W}}^r$. Il suffit de montrer que pour tout p de $\mathcal{S}_{\mathcal{W}}^r$ et pour tout i de $[\![1,d_r^k]\!]$ (*i.e.* i t.q. $U_i^r \in \mathbf{U}^{r,k}$) : $(D_{U_i^r}\beta^r)_{|\mathbf{V}_p^{r,k}\cap \mathrm{T}_p\mathcal{S}_{\mathcal{W}}^r} = 0$. Or, si $j \in [\![1,d_r]\!]$ et $l \in [\![d_r^k+1,d_r]\!]$ (*i.e.* j quelconque et l t.q. $V_l^r \in \check{\mathbf{V}}^{r,k}$) :

$$\begin{aligned} L_{V_j^r}((D_{U_i^r}\beta^r)(V_l^r)) &= L_{V_j^r}L_{U_i^r}(\beta(V_l^r)) - L_{V_j^r}(\beta^r(\underbrace{D_{U_i^r}V_l^r}_{=0})) \\ &= L_{U_i^r}L_{V_j^r}(\beta^r(V_l^r)) \\ &= L_{U_i^r}((D_{V_j^r}\beta^r)(V_l^r)) + L_{U_i^r}(\beta^r(D_{V_j^r}V_l^r)) \\ &= (D_{U_i^r}\beta^r)(D_{V_j^r}V_l^r) + \beta(D_{U_i^r}D_{V_j^r}V_l^r) \\ &= (D_{U_i^r}\beta^r)(D_{V_j^r}V_l^r) + \beta(D_{U_i^r}D_{V_l^r}V_j^r) \\ &= (D_{U_i^r}\beta^r)(D_{V_j^r}V_l^r) + \beta(\underbrace{R(V_l^r,U_i^r)}_{=0 \text{ par le ss-lemme 9.}}V_j^r) + \beta^r(D_{V_l^r}\underbrace{D_{U_i^r}V_j^r}_{=0}) \\ &= (D_{U_i^r}\beta^r)(D_{V_j^r}V_l^r). \end{aligned}$$

Notons $\Psi_j = ((V_l^r)_{l=d_k+1}^{d_r} \mapsto (D_{V_j^r}V_l^r)_{l=d_k+1}^{d_r}) \in \mathrm{L}(\mathbf{V}^{r,k}\cap \mathrm{T}\mathcal{S}_{\mathcal{W}}^r)$, alors le (d_r-d_k)-uplet $(D_{U_i^r}\beta^r)((V_l^r)_{l=d_k+1}^{d_r})$ satisfait le système différentiel linéaire (non autonome) d'ordre un suivant :

$$\begin{aligned} L_{V_j^r}((D_{U_i^r}\beta^r)((V_l^r)_{l=d_k+1}^{d_r})) &= (D_{U_i^r}\beta^r)(\Psi_j((V_l^r)_{l=d_k+1}^{d_r})) \\ &= ({}^t\Psi_j(D_{U_i^r}\beta^r))((V_l^r)_{l=d_k+1}^{d_r}). \end{aligned}$$

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, la solution nulle est l'unique solution pour une condition initiale nulle. Or enfin, sur $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}^r$, $(D_{U_i^r}\beta^r)((V_l^r)_{l=d_k+1}^{d_r}) \equiv 0$ par le point précédent. On montre alors par récurrence sur q que $(D_{U_i^r}\beta^r)((V_l^r)_{l=d_k+1}^{d_r}) \equiv 0$ sur $\Phi_q(\Phi_{q-1}(\ldots(\Phi_1(\check{\mathcal{U}}_m^r))))$, où $\Phi_j(\mathcal{E})$ désigne l'orbite d'un sous-ensemble ensemble $\mathcal{E}$ de $\mathcal{S}_{\mathcal{W}}^r$ sous le flot du champ V_j^r. Pour $q = d_r$, $\Phi_{d_r}(\Phi_{d_r-1}(\ldots(\Phi_1(\mathcal{S}_{\mathcal{U}}^r)))) = \mathcal{S}_{\mathcal{W}}^r$, donc :

$$(D_{U_i^r}\beta^r)((V_l^r)_{l=d_k+1}^{d_r}) \equiv (0)_{l=d_k+1}^{d_r},\ i.e.\ (D_{U_i^r}\beta^r)_{|\check{\mathbf{V}}^{r,k}} \equiv 0, \text{ le long de } \mathcal{S}_{\mathcal{W}}^r.$$

La forme β satisfait donc la propriété visée, et β satisfait donc **($*$0)**.

Vérifions enfin que β satisfait **($**$)**. Comme la propriété **($**$)** est tensorielle en A et B et que $\mathbf{X}^\perp = (+_r\mathbf{W}^r) + (+_s\mathbf{Y}^s)$, il suffit de la vérifier pour les vecteurs de ces distributions, *i.e.* pour les couples (A,B) de vecteurs tangents respectivements à $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux des feuilletages $((\mathcal{W}^r)_r,(\mathcal{Y}^s)_s)$. Comme β satisfait **($*$0)** et α **($*$)**, alors si $\mathcal{A} \perp \mathcal{B}$ ou $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{Y}^0$:

$$\mathrm{d}\beta(A,B) = (D_A\beta)(B) - (D_B\beta)(A) = 0 = (D_A\alpha)(B) - (D_B\alpha)(A) = \mathrm{d}\alpha(A,B).$$

Il reste donc à vérifier **(**)** pour $(A,B) \in \mathbf{A}_p \times \mathbf{B}_p$ avec $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ parmi $((\mathcal{W}^r)_r,(\mathcal{Y}^s)_s)$, tels que $\mathcal{A} \not\perp \mathcal{B}$ et $\mathcal{Y}^0 \notin \{\mathcal{A},\mathcal{B}\}$ *i.e.* avec $\mathcal{A} = \mathcal{B} \neq \mathcal{Y}^0$.

Ajoutons quelques remarques pour restreindre encore l'étude. $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ étant toujours deux des feuilletages $((\mathcal{W}^r)_r,(\mathcal{Y}^s)_s)$:

$$\mathcal{A} \neq \mathcal{B} \Rightarrow \forall p \in \mathcal{X}_m^\perp, \forall A \in \mathbf{A}_p, (D_A\,\mathrm{d}\alpha)(\mathbf{B}_p,\mathbf{B}_p) = \{0\}. \qquad \mathbf{(1)}$$

D'autre part, par l'affirmation 1 :

$$\forall p \in \mathcal{X}_m^\perp, \mathbf{X}_p \subset \ker\, \mathrm{d}\alpha_{|p}. \qquad \mathbf{(2)}$$

En effet, si $X \in \mathbf{X}_p$ et $Y \in \mathbf{X}_p^\perp$: $\mathrm{d}\alpha(X,Y) = (D_X\alpha)(Y) - (D_Y\alpha)(X) = 0$. Vérifions à présent **(1)**. Soit $p \in \mathcal{X}_m^\perp$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux distincts des feuilletages cités, $A \in \mathbf{A}_p$ et $(B,B') \in \mathbf{B}_p$. On peut choisir sans préjudice A, B et B' parmi les vecteurs-coordonnées $(((U_i^r)_{i=1}^{d_r},(V_i^r)_{i=1}^{d_r})_{r=1}^N,((Y_i^s)_{i=1}^{d'_s})_{s=0}^{N'})$, dont on peut en tout point extraire une base de $\mathbf{A}_p$ et de $\mathbf{B}_p$. Alors en particulier, $D_A B = 0$ et $D_A B' = 0$. De plus, $\mathcal{A} \perp \mathcal{B}$.

$$\begin{aligned}
(D_A\,\mathrm{d}\alpha)(B,B') &= L_A((D\alpha)(B,B')) - D\alpha(D_AB,B') - D\alpha(B,D_AB') \\
&= L_A((D\alpha)(B,B')) \\
&= L_A(L_B\alpha(B') - \alpha(D_BB')) \\
&= L_BL_A\alpha(B') - L_A(\alpha(D_BB')) \\
&= L_B(D\alpha(A,B')) + L_B(\alpha(D_AB')) - L_A(\alpha(D_BB')) \\
&= L_B(D\alpha(B',A)) + L_B(\alpha(D_AB')) - L_A(\alpha(D_BB')) \qquad \text{par l'affirmation 1} \\
&= L_BL_{B'}\alpha(A) - L_B(\alpha(D_AB')) + L_B(\alpha(D_AB')) - L_A(\alpha(D_BB')) \\
&= L_BL_{B'}\alpha(A) - L_A(\alpha(D_BB'))
\end{aligned}$$

qui est une expression symétrique en B et B'. Par conséquent :

$$(D_A\,\mathrm{d}\alpha)(B,B') = (D_A(D\alpha))(B,B') - (D_A(D\alpha))(B',B) = 0.$$

C'est le résultat **(1)** recherché.

Enfin, il découle respectivement du point **(II)** et du point **(I)** de la construction de β, appliqués à la différentielle de β :

$$\forall p \in \mathcal{X}_m^\perp, \mathbf{X}_p \subset \ker\, \mathrm{d}\beta_{|p}. \qquad \mathbf{(2')}$$

$$\mathcal{A} \neq \mathcal{B} \Rightarrow \forall p \in \mathcal{X}_m^\perp, \forall A \in \mathbf{A}_p, (D_A\,\mathrm{d}\beta)(\mathbf{B}_p,\mathbf{B}_p) = \{0\}. \qquad \mathbf{(1')}$$

Par **(1)** et **(1')**, la forme $\mathrm{d}(\alpha - \beta)$ est en particulier parallèle le long des feuilles de $\mathcal{X}$; il suffit donc de vérifier **(**)** le long d'une section de $\pi : \mathcal{X}_m^\perp \to \mathcal{X}_m^\perp/\mathcal{X}$, par exemple le long de $\mathcal{S}$ ($\mathcal{S} = \{p \in \mathcal{X}_m^\perp \ / \ (x_i(p))_{i=1}^{d_{\mathbf{X}}} = 0\}$, *cf.* p.146). Par **(2)** et **(2')**, il suffit de vérifier **(**)** modulo $\mathbf{X}$ donc, par exemple, sur les seuls vecteurs de $\mathrm{T}\mathcal{S}$, *i.e.* de vérifier, pour chaque feuilletage $\mathcal{A}$ parmi $((\mathcal{W}^r)_r,(\mathcal{Y}^s)_s)$:

$$\forall p \in \left(\widetilde{\mathcal{U}}_m \cup \widetilde{\mathcal{V}}_m\right) \cap \mathcal{S}, \forall A,B \in \mathbf{A}_p \cap \mathrm{T}_p\mathcal{S},\ \mathrm{d}\beta(A,B) = \mathrm{d}\alpha(A,B).$$

Enfin par **(1)** et **(1')** à nouveau, il suffit, pour chaque feuilletage $\mathcal{A}$, de vérifier l'égalité ci-dessus le long de la feuille $\mathcal{A} \cap \mathcal{S}$. Elle se propage à $\mathcal{X}_m^\perp$ entier par transport parallèle le long de $\mathcal{A}^\perp$, par **(1)** et **(1')**.

Vérifions donc :

- $\forall s \in [\![1,N']\!], \forall p \in \mathcal{S}_\mathcal{Y}^s, \forall A,B \in \mathrm{T}_p\mathcal{S}_\mathcal{Y}^s$, $\mathrm{d}\beta(A,B) = \mathrm{d}\alpha(A,B)$.

C'est immédiat : par définition de β : $\forall s \in [\![1,N']\!], \beta_{|\mathrm{T}\mathcal{S}_/^s YY} = \alpha_{|\mathrm{T}\mathcal{S}_/^s YY}$.

- $\forall r \in [\![1,N]\!], \forall p \in \mathcal{S}_\mathcal{U}^r \cup \mathcal{S}_\mathcal{V}^r, \forall A,B \in \mathrm{T}_p\mathcal{S}_\mathcal{W}^s$, $\mathrm{d}\beta(A,B) = \mathrm{d}\alpha(A,B)$.

Soit donc $r \in [\![1,N]\!]$. Utilisons le système de coordonnées $((u_i^r)_i,(u_i^r)_i))$ de la feuille $\mathcal{S}_\mathcal{W}^r$. Rappelons qu'entre autres, les vecteurs-coordonnées vérifient en tout point : $\forall i,j, D_{U_i^r}V_j^r = 0$, et en tout point de $\mathcal{S}_\mathcal{U}^r$: $\forall i,j, D_{U_i^r}U_j^r = 0$. Pour tous i et j et en tout point de $\mathcal{S}_\mathcal{W}^r$: $\mathrm{d}\beta(U_i^rU_j^r) = (D_{U_i^r}\beta)(U_j^r) - (D_{U_j^r}\beta)(U_i^r) = 0 = (D_{U_i^r}\alpha)(U_j^r) - (D_{U_j^r}\alpha)(U_i^r) = \mathrm{d}\alpha(U_i^rU_j^r)$, par **(*0)** et **(*)** et car $\mathbf{U}^r \perp \mathbf{U}^r$. On obtient symétriquement le même résultat pour V_i^r et V_j^r. Reste donc à vérifier : $\forall p \in \mathcal{S}_\mathcal{U}^r \cup \mathcal{S}_\mathcal{V}^r$, $\mathrm{d}(\beta-\alpha)_{|p}(\mathbf{U}_p^r \cap \mathrm{T}_p\mathcal{S}_\mathcal{W}^r, \mathbf{V}_p^r \cap \mathrm{T}_p\mathcal{S}_\mathcal{W}^r) = \{0\}$. C'est vrai en m par le point **(ii)** de la construction de β ; soient alors $(i,j,k) \in [\![1,d_r]\!]^3$, en tout point de $\mathcal{S}_\mathcal{U}^r$ on a, avec le point **(iii)** de la construction de β :

$$\begin{aligned}
L_{U_i^r}(\,\mathrm{d}\beta(U_j^r,V_k^r)) &= L_{U_i^r}(L_{U_j^r}(\beta(V_k^r)) - L_{V_k^r}(\beta(U_j^r)))\\
&= L_{U_i^r}(\,\mathrm{d}\alpha(U_j^r,V_k^r)) + \beta(R(U_i^r,V_k^r)U_j^r) - L_{V_k^r}L_{U_i^r}(\beta(U_j^r))\\
&= L_{U_i^r}(\,\mathrm{d}\alpha(U_j^r,V_k^r)) + (\beta(D_{V_k^r}D_{U_i^r}U_j^r) - \beta(D_{U_i^r}\underbrace{D_{V_k^r}U_j^r}_{\equiv 0}))\\
&\qquad - (\beta(D_{V_k^r}D_{U_i^r}U_j^r) + (D_{V_k^r}\beta)(\underbrace{D_{U_i^r}U_j^r}_{=0}))\\
&= L_{U_i^r}(\,\mathrm{d}\alpha(U_j^r,V_k^r)).
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tous j et k, $\mathrm{d}\beta(U_j^r,V_k^r) = \mathrm{d}\alpha(U_j^r,V_k^r)$ sur $\mathcal{S}_\mathcal{U}^r$ et donc, sur $\mathcal{S}_\mathcal{U}^r$: $\mathrm{d}(\beta-\alpha)(\mathbf{U}^r \cap \mathrm{T}\mathcal{S}_\mathcal{W}^r, \mathbf{V}_p^r \cap \mathrm{T}\mathcal{S}_\mathcal{W}^r) = \{0\}$, c'est le résultat cherché. On l'obtient symétriquement le long de $\check{\mathcal{V}}_m^s$.

<u>*Conclusion.*</u> Posons alors $\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}} = \alpha - \beta$. Il reste à rassembler les résultats. Au point m, $\beta'_{|m} = \alpha_{|m} - \beta_{|m}$:

- sur $\mathbf{X}_m$ par le point **(II)**,
- sur chaque $\mathrm{T}_m\mathcal{S}_\mathcal{W}^r$ et chaque $\mathrm{T}_m\mathcal{S}_\mathcal{Y}^s$, donc sur $\mathrm{T}_m\mathcal{S}$ par le point **(III)**,

donc $\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}}$ est nulle en m.

D'autre part, α vérifie **(*)** et β vérifie **(*0)** donc :

$$\begin{gathered}
* \ \forall p \in \mathcal{X}_m^\perp, \forall \mathcal{A},\mathcal{B} \in \mathfrak{F}, (\mathcal{A} \perp \mathcal{B} \text{ ou } \ \mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{F}^0) \Rightarrow\\
\forall (A,B) \in \mathbf{A}_p \times \mathbf{B}_p, R(Z,A,T,B) = (D\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}})(A,B) = (D\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}})(B,A).
\end{gathered}$$

Ensuite, β vérifie **(**)**, donc $\mathrm{d}\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}}$ est nulle le long de $\widetilde{\mathcal{U}}_m \cup \widetilde{\mathcal{V}}_m$.
Enfin, le point **(ii)** de la construction de β donne directement :

$$\forall k,l, \overline{\mathbf{U}}^{r,k} \not\perp \overline{\mathbf{V}}^{r,l} \Rightarrow \forall U \in \overline{\mathbf{U}}^{r,k}, \forall V \in \overline{\mathbf{V}}^{r,l}, \left\{ \begin{array}{l} (D\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}})_{|m}(U,V) = 0 \\ (D\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}})_{|m}(V,U) = 0 \end{array} \right.$$

Comme α et β sont de classe C^{R-2}, $\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}}$ l'est aussi et le deuxième point du lemme est démontré.

<u>*La* classe de $\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}}$.</u> Vu ses propriétés, $\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}}$ est définie à une 1-forme δ près telle que :

(i) $\forall p \in \mathcal{X}_m^\perp, \forall \mathcal{A},\mathcal{B} \in \mathfrak{F}, (\mathcal{A} \perp \mathcal{B}$ ou $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{F}^0) \Rightarrow$
$\forall (A,B) \in \mathbf{A}_p \times \mathbf{B}_p, (D\delta)(A,B) = (D\delta)(B,A) = 0.$

En particulier donc : $D_{\mathbf{X}}\delta = \{0\}$ et $\delta_{|\mathbf{X}} = 0$; δ est donc l'image réciproque par π d'une forme sur $\mathbf{X}_m^\perp$:

$$\delta = \pi^*(\check{\delta}).$$

Si ensuite $\check{\mathcal{A}}$ et $\check{\mathcal{B}}$ sont deux distincts, donc orthogonaux, parmi les feuilletages $((\check{\mathcal{W}}^r)_r,(\check{\mathcal{Y}}^s)_s)$: $\check{B} \in \check{\mathbf{B}}_{\check{p}} \Rightarrow D_{\check{B}}\check{\mathbf{A}} = \{0\}$, donc $\check{\delta}_{|\check{\mathbf{A}}}$ est parallèle le long des feuilles de $\check{\mathcal{B}}$, *i.e.* $\check{\delta}$ est égale à une forme produit $(\prod_r \check{\delta}^r) \times (\prod_s \check{\delta}'^s)$ où pour tout r, $\check{\delta}^r \in \Gamma(\mathrm{T}^*\check{\mathcal{W}}^r_{\check{m}})$ et pour tout s, $\check{\delta}'^s \in \Gamma(\mathrm{T}^*\check{\mathcal{Y}}^s_{\check{m}})$. Toujours par la même propriété avec $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{Y}^0$, $\check{\delta}'^s$ est parallèle le long de la feuille (plate) $\check{\mathcal{Y}}^0_{\check{m}}$ et pour chaque r, $\check{\delta}^r_{|\check{\mathbf{U}}}$ est parallèle le long de la feuille (plate) $\check{\mathcal{U}}^r_{\check{m}}$ et $\check{\delta}^r_{|\check{\mathbf{V}}}$ le long de la feuille (plate) $\check{\mathcal{V}}^r_{\check{m}}$. Enfin, pour chaque r, par la propriété avec $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{U}^r$ ou $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{V}^r$, $\check{\delta}_{|\check{\mathbf{U}}^r}$ est parallèle le long de $\check{\mathcal{U}}^r_{\check{m}}$ et $\check{\delta}_{|\check{\mathbf{V}}^r}$ le long de $\check{\mathcal{V}}^r_{\check{m}}$. De plus en $\check{m}$: $\forall k \in [\![1,n_r]\!], D\check{\delta}(\check{\mathbf{U}}^{r,k}_{\check{m}},\check{\mathbf{V}}^{r,k}_{\check{m}}) = D\check{\delta}(\check{\mathbf{V}}^{r,k}_{\check{m}},\check{\mathbf{U}}^{r,k}_{\check{m}}) = \{0\}$.

(ii) $\forall r, \forall k,l, \overline{\mathbf{U}}^{r,k} \not\perp \overline{\mathbf{V}}^{r,l} \Rightarrow \forall U \in \overline{\mathbf{U}}^{r,k}, \forall V \in \overline{\mathbf{V}}^{r,l}, \begin{cases} (D\delta)_{|m}(U,V) = 0 \\ (D\delta)_{|m}(V,U) = 0 \end{cases}$

Par conséquent : $\forall r, \forall k,l, \check{\overline{\mathbf{U}}}^{r,k} \not\perp \check{\overline{\mathbf{V}}}^{r,l} \Rightarrow \forall \check{U} \in \check{\overline{\mathbf{U}}}^{r,k}, \forall \check{V} \in \check{\overline{\mathbf{V}}}^{r,l}, \begin{cases} (D\check{\delta})_{|\check{m}}(\check{U},\check{V}) = \{0\} \\ (D\check{\delta})_{|\check{m}}(\check{V},\check{U}) = \{0\} \end{cases}$ En combinant avec la dernière remarque du point précédent, on obtient :

$$\forall r \in [\![1,N]\!], (D\check{\delta})_{|\check{m}}(\check{\mathbf{U}}^r_{\check{m}},\check{\mathbf{V}}^r_{\check{m}}) = (D\check{\delta})_{|\check{m}}(\check{\mathbf{V}}^r_{\check{m}},\check{\mathbf{U}}^r_{\check{m}})\{0\} \text{ et donc} : \forall r \in [\![1,N]\!], (D\check{\delta}^r)_{|\check{m}} = 0.$$

(iii) $\check{\delta}$ *est nulle en* $\check{m}$.
Notamment donc, comme $\check{\delta}'^0$ est parallèle, elle est nulle. Semblablement, pour tout r de $[\![1,N]\!]$, $\check{\delta}_{|\check{\mathbf{U}}^r}$ est nulle sur $\check{\mathcal{U}}^r_{\check{m}}$ et $\check{\delta}_{|\check{\mathbf{V}}^r}$ sur $\check{\mathcal{V}}^r_{\check{m}}$.

(iv) $\forall p \in \widetilde{\mathcal{U}}_m \cup \widetilde{\mathcal{V}}_m, \forall Y,Y' \in \mathrm{T}_p\mathcal{M}, \mathrm{d}\delta(Y,Y') = 0.$
Par conséquent, les formes $\check{\delta}'^s, s \in [\![1,N']\!]$ sont fermées. Par conséquent également, pour tout r, pour tout (i,j,k) de $[\![1,n_r]\!]$, le long de $\check{\mathcal{V}}^r_{\check{m}}$:

$$\begin{aligned}
L_{\check{V}^r_i}L_{\check{V}^r_j}(\check{\delta}^r(\check{U}^r_k)) &= L_{\check{V}^r_i}L_{\check{U}^r_k}(\check{\delta}^r(\check{V}^r_j)) \\
&= L_{\check{U}^r_k}L_{\check{V}^r_i}(\check{\delta}^r(\check{V}^r_j)) \\
&= L_{\check{U}^r_k}(\underbrace{(D_{\check{V}^r_i}\check{\delta}^r)(\check{V}^r_j)}_{\equiv 0 \text{ sur } \check{\mathcal{W}}^r_{\check{m}}.} + \check{\delta}^r(D_{\check{V}^r_i}\check{V}^r_j)) \\
&= (D_{\check{U}^r_k}\check{\delta}^r)(\underbrace{D_{\check{V}^r_i}\check{V}^r_j}_{\equiv 0 \text{ sur } \check{\mathcal{V}}^r_{\check{m}}.}) - \check{\delta}^r(D_{\check{U}^r_k}D_{\check{V}^r_i}\check{V}^r_j) \\
&= -(\check{\delta}^r(R(\check{V}^r_i,\check{U}^r_k).\check{V}^r_j) + \check{\delta}^r(D_{\check{V}^r_i}\underbrace{D_{\check{U}^r_k}\check{V}^r_j}_{\equiv 0 \text{ sur } \check{\mathcal{W}}^r_{\check{m}}.}) \\
&= -\check{\delta}^r(R(\check{V}^r_i,\check{U}^r_k).\check{V}^r_j)
\end{aligned}$$

Mais $R(\check{V}_i^r,\check{U}_k^r).\check{V}_j^r \in \mathbf{V}^r$ et par le point précédent, $\check{\delta}^r_{|\check{\mathbf{V}}^r}$ est nulle le long de $\check{\mathcal{V}}^r_{\check{m}}$, donc, le long de $\check{\mathcal{V}}^r_{\check{m}}$: $L_{\check{V}_i^r} L_{\check{V}_j^r}(\check{\delta}^r(\check{U}_k^r)) = -\check{\delta}^r(R(\check{V}_i^r,\check{U}_k^r).\check{V}_j^r) = 0$. Or en $\check{m}$, $D\check{\delta}^r = 0$, en particulier, pour tous j et k, $L_{\check{V}_j^r}(\check{\delta}^r(\check{U}_k^r))_{|\check{m}} = 0$. Par conséquent, pour tout k, le long de $\check{\mathcal{V}}^r_{\check{m}}$: $\check{\delta}^r(\check{U}_k^r) = 0$ *i.e.* $\check{\delta}^r_{|\check{\mathbf{U}}^r} = 0$. Comme par ailleurs sur $\check{\mathcal{W}}^r_{\check{m}}$, $D\check{\delta}^r(\check{\mathbf{U}}^r,\check{\mathbf{U}}^r) = 0$, $\check{\delta}^r_{|\check{\mathbf{U}}^r}$ est nulle le long de $\check{\mathcal{W}}^r_{\check{m}}$. Symétriquement, $\check{\delta}^r_{|\check{\mathbf{V}}^r}$ l'est aussi, et donc : $\check{\delta}^r = 0$.

La forme $\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}}$ est donc définie à une forme δ près qui vérifie nécessairement : $\delta = \pi^*\left((\prod_r \check{\delta}^r) \times (\prod_s \check{\delta}'^s)\right)$ où pour tout r, $\check{\delta}^r$ est la fome nulle sur $\check{\mathcal{W}}^r_{\check{m}}$, où $\check{\delta}'^0$ est la fome nulle sur $\check{\mathcal{Y}}^0_{\check{m}}$ et où pour tout $s \leq 1$, $\check{\delta}'^s$ est une forme fermée sur $\check{\mathcal{Y}}^s_{\check{m}}$. Réciproquement, si δ satisfait ces propriétés, on vérifie immédiatement que $\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}} + \delta$ a comme $\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}}$ les propriétés requises par le lemme. C'est le troisième point du lemme.

Le cas où $\mathbf{X}_m \subset \ker \mathfrak{h}$. Enfin, si l'holonomie de la variété $\mathcal{M}$ agit trivialement sur $\mathbf{X}$, alors le long de $\mathcal{X}_m^\perp$, $D_{\mathbf{X}}\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}} = \{0\}$ et $D((\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}})_{|\mathbf{X}} = 0$. Soit en effet $p \in \mathcal{X}_m^\perp$, $X \in \mathbf{X}_p$ et $Y \in \mathbf{X}_p^\perp$: $(D_X\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}})(Y) = (D_Y\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}})(X) = R(Z,X,T,Y) = 0$. Comme de plus $\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}}$ est nulle en m, alors sur $\mathcal{X}_m^\perp$, $(\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}})_{|\mathbf{X}} = 0$. Alors, quelle que soit la section σ de $\pi\ \mathcal{X}_m^\perp \to \check{\mathcal{X}}_{\check{m}}^\perp$: $\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}} = \pi^*(\check{\rho}_{Z,T,m})$ où $\check{\rho}_{Z,T,m} = \sigma^*(\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}}) \in \mathrm{T}^*\check{\mathcal{X}}_{\check{m}}^\perp$. □

II.5 Remarques, commentaires et compléments

Quelques remarques et corollaires sont nécessaires pour permettre l'exploitation du lemme dans la partie suivante.

Remarque : on n'obtient qu'une régularité de classe C^{R-2} pour $\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}}$, et pas C^{R-1}, comme pourrait le faire attendre la relation

$$\begin{gathered}\forall p \in \mathcal{X}_m^\perp, \forall \mathcal{A},\mathcal{B} \in \mathfrak{F}, (\mathcal{A} \perp \mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{F}^0) \Rightarrow \\ \forall (A,B) \in \mathbf{A}_p \times \mathbf{B}_p, R(Z,A,T,B) = (D\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}})(A,B) = (D\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}})(B,A).\end{gathered}$$

Cependant, de cette relation découle par exemple que la restriction $(\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}})_{|\mathbf{A}}$ de $\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}}$ est de classe C^{R-1} le long des feuilles de $\mathcal{A}^\perp$, si $\mathcal{A}$ est un feuilletage de $\mathfrak{F}$.

Remarque : On aurait pu introduire les classes plus larges de formes $\rho_{Z,T,m}$ — en supprimant la condition relative aux relevés $\mathfrak{R}$ — ou $\rho_{Z,T}$ — en supprimant de plus la contrainte de nullité en m. Ces classes introduisent moins d'objets arbitraires : la famille $\mathfrak{R}$ ou le point m, et sont donc plus naturelles. Cependant, il s'agit dans tous les cas d'espaces affines, et leur espace vectoriel directeur ne s'exprime pas de façon aussi simple que pour la classe $\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}}$. On a donc préféré ajouter les deux conditions en m. Dans tous les cas, la propriété intéressante pour la suite est la suivante :

Corollaire 1 *Soit $\mathfrak{S} = (\sigma'^s)_{s=1}^{N'}$ un N'-uplet de sections des $\mathcal{Y}^s_m \to \check{\mathcal{Y}}^s_{\check{m}}$, dont on notera $(\mathcal{S}'^s)_{s=1}^{N'}$ les images. Alors il existe sur $\mathcal{X}_m^\perp$ au voisinage de m une et une seule forme du type $\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}}$ telle que :*

$$\forall s \in [\![1,N']\!], (\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}})_{|\mathrm{T}\mathcal{S}'^s} = 0$$

On la notera : $\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R},\mathfrak{S}}$. Si de plus K est un voisinage compact de m dans $\mathcal{X}_m^\perp$, soit :

- *$\Gamma_{K,\mathrm{C}^{R-1}}(\mathrm{T}\mathcal{M})$ l'espace des sections C^{R-1} de $\mathrm{T}\mathcal{M}$ le long de K, muni de la norme* *sup de la topologie* C^{R-1} *sur le compact* K *:* $||Z|| = \sup_{i=0}^{R-1}||D^i Z||_\infty$*,*

- $\Gamma_{K,\mathrm{C}^{R-2}}(\mathrm{T}^*\mathcal{X}_m^\perp)$ *est l'espace des sections* C^{R-2} *de* $\mathrm{T}^*\mathcal{X}_m^\perp$ *le long de* K*, muni de la norme sup de la topologie* C^{R-1} *sur le compact* K *:* $||\rho|| = \sup_{i=0}^{R-2}||D^i \rho||_\infty$*,*
- Ψ *la fonction :* $\begin{array}{ccc} \Gamma_{K,\mathrm{C}^{R-1}}(\mathrm{T}\mathcal{M})^2 & & \Gamma_{K,\mathrm{C}^{R-2}}(\mathrm{T}^*\mathcal{X}_m^\perp) \\ (Z,T) & \xrightarrow{\Psi} & \rho_{Z,T,m,\mathfrak{R},\mathfrak{S}} \end{array}$.

Alors, Ψ *est de classe* C^{R-2}*.*

Autrement dit, si $\mathfrak{S}$ est comme dans l'énoncé du corollaire, si $\mathfrak{R}$ est une famille de relevés des drapeaux $(X, (\mathbf{U}_{\check{m}}^{r,k})_{k=0}^{n_r})$ et $(X, ((\mathbf{V}_{\check{m}}^{r,k})_{k=n_r}^{0})$ comme dans l'énoncé du lemme, alors il existe sur $\mathcal{X}_m^\perp$ au voisinage de m une et une seule forme du type $\rho_{Z,T}$, notée $\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R},\mathfrak{S}}$, telle que :

- $(\rho_{Z,T})_{|m} = 0$,
- $\forall k,l, \overline{\mathbf{U}}^{r,k} \not\perp \overline{\mathbf{V}}^{r,l} \Rightarrow \forall U \in \overline{\mathbf{U}}^{r,k}, \forall V \in \overline{\mathbf{V}}^{r,l}, \left\{ \begin{array}{l} (D\rho_{Z,T})_{|m}(U,V) = 0 \\ (D\rho_{Z,T})_{|m}(V,U) = 0 \end{array} \right.$
- $\forall s \in [\![1,N']\!], (\rho_{Z,T})_{|\mathrm{T}\mathcal{S}'^s} = 0$, *i.e.* $\forall s \in [\![1,N']\!], \forall \check{Y} \in \mathrm{T}\check{\mathcal{Y}}_{\check{m}}^s, \rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}}(\,\mathrm{d}\sigma'^s.\check{Y}) = 0.$

Cette forme est une fonction C^{R-2} des champs Z et T, au sens donné plus haut.

Démonstration : Soit $\rho'_{Z,T,m,\mathfrak{R}}$ une forme donnée par le lemme, et $(\sigma'^s)_{s=1}^{N'}$ un N'-uplet de sections des $\mathcal{Y}_m^s \to \check{\mathcal{Y}}_{\check{m}}^s$. Par le dernier point du lemme 4, $\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}}$ est comme exigé dans l'énoncé du corollaire *ssi* $\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}} = \rho'_{Z,T,m,\mathfrak{R}} - \delta$, où δ est une 1-forme de $\mathrm{T}^*\mathcal{X}_m^\perp$ telle que :

- $\delta = \pi^* \left(\prod_s \check{\delta}'^s\right)$
- $\forall s \in [\![1,N']\!], \forall \check{Y} \in \mathrm{T}\check{\mathcal{Y}}_{\check{m}}^s, \delta(\,\mathrm{d}\sigma'^s.\check{Y}) = \rho'_{Z,T,m,\mathfrak{R}}(\,\mathrm{d}\sigma'^s.\check{Y})$.

Or δ vérifie ces propriétés *ssi*: $\forall s \in [\![1,N']\!], \forall \check{Y} \in \mathrm{T}\check{\mathcal{Y}}_{\check{m}}^s, \check{\delta}'^s(\check{Y}) = \rho'_{Z,T,m,\mathfrak{R}}(\,\mathrm{d}\sigma'^s.\check{Y})$, ce qui définit une et une seule forme δ. La forme $\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R},\mathfrak{S}}$ existe donc et est unique.

Nous ne démontrerons pas ici à proprement parler la régularité de ρ en fonction de Z et T. Elle se vérifie, à chaque étape de la construction, par des arguments relativement simples mais lourds à détailler de façon rigoureuse, dans les topologies assez complexes des espaces qui entrent en jeu. Nous sommes convaincus que l'enjeu des démonstrations n'est pas là et avons manqué de temps pour proposer une rédaction propre de cet aspect ; il est donc traité rapidement.

Donnons cependant les deux points essentiels du raisonnement et détaillons, à titre d'exemple, la démonstration lors d'une des étapes de la construction de ρ.

La forme ρ est construite comme une différence : $\rho = \alpha - \beta$. Il faut et il suffit donc de montrer que α et β sont fonctions de classe C^{R-2} de (Z,T). La forme β est construite à partir de α ; on montrera en fait qu'elle est fonction de classe C^{R-2} de α.

La forme α*.* $\alpha = (D_Z T)^\flat$. Les fonctions $(Z,T) \mapsto D_Z T$ et $V \mapsto V^\flat$ sont C^R donc α est fonction C^R de (Z,T).

La forme β*.* La forme β est définie par construction de différentes de ses restrictions β^r et β'^s. Ces restrictions sont construites par égalité avec α sur certaines sous-variétés, par transport parallèle de cette précédente valeur le long de certains feuilletages où c'est possible et enfin, pour $\beta^r_{|\mathbf{V}^r}$ le long de $\mathcal{S}^r_{\mathcal{U}}$ par une équation différentielle un peu plus lourde (*cf.* page 147).

Là où β est égale à α, cette restriction de β est évidemment fonction C^∞ de α. Là où elle est définie par transport parallèle, on vérifie qu'elle est fonction C^{R-2} de sa condition initiale (cette condition initiale est une restriction le long d'une certaine sous-variété), donc fonction C^{R-2} de α. Enfin, page 147, $\beta^r_{|\mathbf{V}^r}$ est définie le long de la sous-variété plate $\mathcal{S}^r_{\mathcal{U}}$ par :

$$\begin{cases} \beta^r_{|\mathbf{V}^r_m} = \alpha_{|\mathbf{V}^r_m} \text{ [en fait, pas tout à fait...] et } (D_{\mathbf{U}^r_m}\beta^r)_{|\mathbf{V}^r_m} = (D_{\mathbf{U}^r_m}\alpha)_{|\mathbf{V}^r_m} \\ \forall p \in \mathcal{S}^r_{\mathcal{U}}, \forall j,k \in [\![1,d_r]\!], L_{U^r_j} L_{U^r_k}(\beta^r_{|\mathbf{V}^r}) = L_{U^r_j}\,\mathrm{d}\alpha(U^r_k,\cdot) + \overline{\overline{\alpha}}(R(U^r_j,\cdot).U^r_k) \end{cases}$$

où $\overline{\overline{\alpha}}$ est une forme égale à $\alpha_{|\mathbf{V}^r}$ en m et prolongée par transport parallèle le long de $\mathcal{S}^r_{\mathcal{U}}$. Elle est donc fonction C^{R-2} de α. D'autre part $\mathrm{d}\alpha$ est fonction linéaire C^R de α.

Ainsi, la dérivée seconde de $\beta^r_{|\mathbf{V}^r}$ est fonction C^{R-2} de α. A condition initiale fixée, $\beta^r_{|\mathbf{V}^r}$ est fonction C^∞ de sa dérivée seconde ; elle est fonction C^{R-2} de sa dérivée seconde et de son 1-jet en m. Comme ce 1-jet est fonction C^∞ de α, $\beta^r_{|\mathbf{V}^r}$ est finalement fonction C^{R-2} de α. □

Corollaire 2 *Soit s dans $[\![1,N']\!]$ et $q \in \mathcal{X}^\perp_m$; $\mathcal{Y}^s_q$ est une feuille de $\mathcal{Y}^s$ dans $\mathcal{X}^\perp_m$. Alors il existe au voisinage de q une seule et une seule forme $\rho^s_{Z,T,q}$ de $(\mathbf{Y}^{s\perp})^*$, nulle en q et telle que :*

$$\forall p \in \mathcal{Y}^s_q, \forall (Y,A) \in \mathbf{Y}^s_p \times \mathbf{Y}^{s\perp}_p, R(Z,Y,T,A) = (D\rho^s_{Z,T,m})(Y,A).$$

Cette forme est la forme induite sur $\mathbf{Y}^{s\perp}$ par l'une quelconque des formes du type $\rho_{Z,T,m}$.

Au même sens topologique que dans le corollaire précédent, $\rho^s_{Z,T,q}$ est fonction C^{R-2} de (Z,T,q).

Démonstration : ce résultat découle d'une remarque et du troisième point du lemme :

- par construction, la restriction à $\mathrm{T}(\pi^{-1}(\prod_{s=0}^{N'} \check{\mathcal{Y}}^s_{\check{m}}))$ d'une forme du type $\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}}$ ne dépend pas du choix de la famille de relevés $\mathfrak{R}$ choisie,
- les formes $\rho_{Z,T,m,\mathfrak{R}}$ sont définies modulo $\pi^*\left(\prod_{s=1}^{N'} \mathrm{Z}^1(\mathrm{T}^*\check{\mathcal{Y}}^s_{\check{q}})\right)$, or, pour tout s_0 de $[\![1,N']\!]$, si $\delta \in \pi^*\left(\prod_{s=1}^{N'} \mathrm{Z}^1(\mathrm{T}^*\check{\mathcal{Y}}^s_{\check{m}})\right)$, la restriction de δ à $(\prod_{s\neq s_0} \mathbf{Y}^s) \times (\prod_r \mathbf{W}^r)$ est nulle le long de $\mathcal{Y}^{s_0}_q$.

Pour les raisons données plus haut, on admet complètement ici la régularité de $\rho^s_{Z,T,q}$ comme fonction de (Z,T,q). La forme $\rho^s_{Z,T,q}$ est une intégrale de fonctionnelles C^R de (Z,T) avec une condition initiale nulle en q ; le résultat s'obtient par un raisonnement semblable à celui exposé pour $\beta^r_{|\mathbf{V}^r}$ dans la démonstration du corollaire 1. □

III Les coordonnées

On étudie toujours une variété $(\mathcal{M},g)$ une pseudo-riemannienne de classe C^∞ localement réductible, indécomposable ; H est son groupe d'holonomie restreint et m un de ses points.

Le but de cette partie est de proposer un système de coordonnées locales le plus naturel et «le plus unique» possible de $\mathcal{M}$ au voisinage de m. On s'appuiera pour cela successivement sur le lemme algébrique et sur le lemme analytique qui précèdent, c'est-à-dire respectivement sur le lemme 3 page 128 et sur le lemme 4 page 141.

III.1 Rappels et introduction

On reprend ici intégralement les notations introduites en début de partie précédente et l'application du lemme algébrique à l'espace tangent $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$ *qui y est faite : voir pour cela les sections II.1.1 page 132 et II.1.3 page 135.* On rappellera cependant ici pour faciliter la lecture les principaux objets introduits sur $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$ dans cette dernière section. On présentera également, toujours pour faciliter la compréhenion du théorème qui va suivre, une vue matricielle de la situation.

III.1.1 Rappels : La situation sur l'espace tangent en m

L'espace $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$ est muni du drapeau canonique introduit dans la partie I, page 110 :

$$\{0\} \subset \mathbf{X}_m \subset \mathbf{X}_m^\perp \subset \mathrm{T}_m\mathcal{M}.$$

Rappel de notation : Comme en partie II, partout, on notera alors π, indifféremment la projection canonique : $\mathbf{X}_m^\perp \to \mathbf{X}_m^\perp/\mathbf{X}_m$, la projection intégrale : $\mathcal{X}_m^\perp \to \mathcal{X}_m^\perp/\mathcal{X}$ ou encore la projection : $\mathcal{U} \to \mathcal{U}/\mathcal{X}$, où $\mathcal{U}$ est un ouvert de carte de $\mathcal{M}$, ou encore toute restriction de ces projections. On surmontera d'un tchetch «ˇ» les objets quotient modulo π, les classes modulo π d'objets de $\mathrm{T}\mathcal{M}$ ou de $\mathcal{M}$, par exemple : $\pi(\mathbf{X}_m^\perp) = \check{\mathbf{X}}_{\check{m}}^\perp$, $\pi(\mathcal{X}_m^\perp) = \check{\mathcal{X}}_{\check{m}}^\perp$ etc ...

La partie I fournit une décomposition H-stable, non nécessairement canonique, de $\mathbf{X}_m^\perp/\mathbf{X}_m$:

$$\mathbf{X}_m^\perp/\mathbf{X}_m = \check{\mathbf{W}}'_{\check{m}} \overset{\perp}{\oplus} \check{\mathbf{W}}''_{\check{m}} \overset{\perp}{\oplus} \check{\mathbf{Y}}_{\check{m}}.$$

(*cf* lemme 3 page 128.)

Si en outre $\mathcal{M}$ vérifie les deux propriétés **(P1)** et **(P2)** introduites en début de partie II, page 135, et que l'on rappelle ici :

$$\begin{array}{c}\check{\mathbf{W}}'_{\check{m}} \text{ admet une décomposition en deux sous-espaces} \\ \text{totalement isotropes stables supplémentaires.}\end{array} \qquad \textbf{(P1)}$$

$$\dim \mathbf{X}_m = 1, \qquad \textbf{(P2)}$$

on peut alors écrire, comme expliqué en début de partie II :

$$\check{\mathbf{X}}_{\check{m}}^\perp = \left(\overset{\perp}{\underset{1\le r\le N}{\oplus}} \check{\mathbf{W}}^r_{\check{m}}\right) \overset{\perp}{\oplus} \left(\overset{\perp}{\underset{0\le s\le N'}{\oplus}} \check{\mathbf{Y}}^s_{\check{m}}\right), \quad \text{où :}$$

• $\forall r, \check{\mathbf{W}}^r_{\check{m}} = \check{\mathbf{U}}^r_{\check{m}} \oplus \check{\mathbf{V}}^r_{\check{m}}$ avec $\check{\mathbf{U}}^r_{\check{m}}$ et $\check{\mathbf{V}}^r_{\check{m}}$ totalement isotropes, stables, indécomposables,

• pour tout s de $[\![0,N']\!]$, $\check{\mathbf{Y}}^s_{\check{m}}$ est stable par holonomie, non dégénéré ; si $s \geq 1$, $\check{\mathbf{Y}}^s_{\check{m}}$ est irréductible et l'action de l'holonomie sur $\check{\mathbf{Y}}^0_{\check{m}}$, éventuellement réduit à $\{0\}$, est triviale.

On note d_r la dimension, commune, de $\check{\mathbf{U}}^r_{\check{m}}$ et de $\check{\mathbf{V}}^r_m$, et d'_s la dimension de chaque $\check{\mathbf{Y}}^s_{\check{m}}$.

Chaque espace $\check{\mathbf{U}}^r_{\check{m}}$ admet, relativement à l'action de l'holonomie H, des suites de Jordan-Hölder. On note n_r la longueur de ces suites, qui est aussi celle des suites de $\check{\mathbf{V}}^r_{\check{m}}$, où H agit de façon contragédiente. On peut alors *choisir* une quelconque $(\check{\mathbf{U}}^{r,k}_{\check{m}})_{k=0}^{n_r}$ des suites de Jordan-Hölder de $\check{\mathbf{U}}^r_{\check{m}}$:

$$\begin{gathered}\text{les } \check{\mathbf{U}}^{r,k}_{\check{m}} \text{ sont stables par holonomie,}\\ \{0\} = \check{\mathbf{U}}^{r,0}_{\check{m}} \subsetneq \check{\mathbf{U}}^{r,1}_{\check{m}} \subsetneq \ldots \subsetneq \check{\mathbf{U}}^{r,n_r}_{\check{m}} = \check{\mathbf{U}}^r_{\check{m}} \text{ et} : \forall k,\ \check{\mathbf{U}}^{r,k}_{\check{m}}/\check{\mathbf{U}}^{r,k-1}_{\check{m}} \text{ est irréductible.}\end{gathered}$$

On notera également d^k_r la dimension de chaque $\check{\mathbf{U}}^{r,k}_{\check{m}}$: $0 = d^0_r < d^1_r < \ldots < d^{n_r}_r = d_r$. Pour tout k, on introduit : $\check{\mathbf{V}}^{r,k}_{\check{m}} = \check{\mathbf{V}}^r_{\check{m}} \cap (\check{\mathbf{U}}^{r,k}_{\check{m}})^\perp$; alors :

$$\begin{gathered}\text{les } \check{\mathbf{V}}^{r,k}_{\check{m}} \text{ sont stables par holonomie,}\\ \{0\} = \check{\mathbf{V}}^{r,n_r}_{\check{m}} \subsetneq \check{\mathbf{V}}^{r,n_r-1}_{\check{m}} \subsetneq \ldots \subsetneq \check{\mathbf{V}}^{r,0}_{\check{m}} = \check{\mathbf{V}}^r_{\check{m}} \text{ et} : \forall k,\ \check{\mathbf{V}}^{r,k-1}_{\check{m}}/\check{\mathbf{V}}^{r,k}_{\check{m}} \text{ est irréductible.}\end{gathered}$$

i.e. $(\check{\mathbf{V}}^{r,k}_{\check{m}})^0_{k=n_r}$ est une suite de Jordan-Hölder de $\check{\mathbf{V}}^r_{\check{m}}$; c'est la suite duale de $(\check{\mathbf{U}}^{r,k}_{\check{m}})_0^{k=n_r}$.

III.1.2 Forme matricielle de l'holonomie de $\mathcal{M}$

Pour fixer les idées, on donne ici l'aspect de la représentation matricielle des éléments de l'algèbre d'holonomie. On se restreint toutefois au cas $N = N' = 1$, $n_1 = 3$ (alors $d_1 = d_1^3$) et $d'_0 \neq 0$. Le cas général se conçoit facilement à partir de lui. Soit une base $\beta = (X, (U^1_i)_{i=1}^{d_1}, (V^r_i)_{i=1}^{d_1}, ((Y^s_i)_{i=0}^{d'_s})_{s=0}^1, Z)$ de $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$ telle que :

• X est une base de $\mathbf{X}_m$; pour tout k de $[\![1,3]\!]$, $(X,(U^1_i)_{i=1}^{d^k_1})$ est une base de $\mathbf{U}^{r,k}_m$ et $(X,(V^1_i)_{i=1}^{d^k_1})$ une base de $\mathbf{V}^{r,k}_m$; $(X,(Y^0_i)_{i=1}^{d'_0})$ une base de $\mathbf{Y}^0_m$ et $(X,(Y^1_i)_{i=1}^{d'_1})$ une base de $\mathbf{Y}^1_m$;

• $$\mathrm{Mat}_\beta(g) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & 0\ldots0 & 0\ldots0 & 0\ldots0 & 0\ldots0 & 1 \\ \hline 0 & & & & & 0 \\ \vdots & 0 & I_{d_1} & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & & & & & 0 \\ \hline 0 & & & & & 0 \\ \vdots & I_{d_1} & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & & & & & 0 \\ \hline 0 & & & & & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & I_{p_0,q_0} & 0 & \vdots \\ 0 & & & & & 0 \\ \hline 0 & & & & & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & I_{p_1,q_1} & \vdots \\ 0 & & & & & 0 \\ \hline 1 & 0\ldots0 & 0\ldots0 & 0\ldots0 & 0\ldots0 & 0 \end{array}\right).$$

Alors, dans β, et en notant $\mathfrak{h}$ l'algèbre d'holonomie de H :

$$\mathfrak{h} \subset \left\{ \quad h \in \mathrm{L}(T_m\mathcal{M}) \ / \ \mathrm{Mat}_\beta(h) = \right.$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc|ccc|c|c|c}
a(h) & \check{a}_1^1(h) & \dots & \check{a}_{d_1}^1(h) & \hat{a}_1^1(h) & \dots & \hat{a}_{d_1}^1(h) & a_1^0(h)\dots a_{d'_0}^0(h) & a_1^1(h)\dots a_{d'_1}^1(h) & 0 \\
\hline
0 & A_{1,1}^1(h) & A_{1,2}^1(h) & A_{1,3}^1(h) & & & & & & -\hat{a}_1^1(h) \\
\vdots & 0 & A_{2,2}^1(h) & A_{2,3}^1(h) & & 0 & & 0 & 0 & \vdots \\
0 & 0 & 0 & A_{3,3}^1(h) & & & & & & -\hat{a}_{d_1}^1(h) \\
\hline
0 & & & & -{}^tA_{1,1}^1(h) & 0 & 0 & & & -\check{a}_1^1(h) \\
\vdots & & 0 & & -{}^tA_{1,2}^1(h) & -{}^tA_{2,2}^1(h) & 0 & 0 & 0 & \vdots \\
0 & & & & -{}^tA_{1,3}^1(h) & -{}^tA_{2,3}^1(h) & -{}^tA_{3,3}^1(h) & & & -\check{a}_{d_1}^1(h) \\
\hline
0 & & & & & & & & & -\varepsilon_1^0 a_1^0(h) \\
\vdots & & 0 & & & 0 & & 0 & 0 & \vdots \\
0 & & & & & & & & & -\varepsilon_{d'_0}^0 a_{d'_0}^0(h) \\
\hline
0 & & & & & & & & & -\varepsilon_1^1 a_1^1(h) \\
\vdots & & 0 & & & 0 & & 0 & A'^1(h) & \vdots \\
0 & & & & & & & & & -\varepsilon_{d'_1}^1 a_{d'_1}^1(h) \\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\dots 0 & 0\dots 0 & -a(h)
\end{array}\right)$$

$$\left. \text{et } A'^1(h) \in \mathfrak{so}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}) \quad \right\}$$

où $\forall s \in \{0{,}1\}, \forall i \in [\![1{,}d'_s]\!], \varepsilon_i^s = 1 \Leftrightarrow i \leq p_s$ et $\varepsilon_i^s = -1 \Leftrightarrow i > p_s$ et où la représentation de $\{A_{k,k}^1(h) \ / \ h \in \mathfrak{h}\}$ dans $\mathbb{R}^{d_1^k - d_1^{k-1}}$ (pour tout k de $[\![1{,}3]\!]$) et la représentation de $\{A'^1(h) \ / \ h \in \mathfrak{h}\}$ dans $\mathbb{R}^{d'_1}$ sont simples.

III.2 Le théorème

III.2.1 Préliminaires et notations

Notation : Si a et b sont deux formes linéaires sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, on note ab leur produit tensoriel symétrisé : $ab = a \overset{\mathrm{s}}{\otimes} b = \frac{1}{2}(a \otimes b + b \otimes a)$.

Les hypothèses. Vu les résultats algébriques ci-dessus résumés, on s'attache à la situation suivante. On suppose que l'espace tangent en m à $\mathcal{M}$ admet un sous-espace totalement isotrope $\mathbf{X}_m$ stable par holonomie de dimension 1 et que $\check{\mathbf{X}}_{\check{m}} = \mathbf{X}_m^\perp/\mathbf{X}_m$ admet la décomposition stable par holonomie :

$$\check{\mathbf{X}}_{\check{m}}^\perp = \left(\overset{\perp}{\underset{1\leq r\leq N}{\oplus}} \check{\mathbf{W}}_{\check{m}}^r \right) \overset{\perp}{\oplus} \left(\overset{\perp}{\underset{0\leq s\leq N'}{\oplus}} \check{\mathbf{Y}}_{\check{m}}^s \right) \text{ avec :}$$

- $\forall r \in [\![1{,}N]\!], \check{\mathbf{W}}^r = \check{\mathbf{U}}_{\check{m}}^r \oplus \check{\mathbf{V}}_{\check{m}}^r$ avec $\check{\mathbf{U}}_{\check{m}}^r$ et $\check{\mathbf{V}}_{\check{m}}^r$ totalement isotropes, stables,
- $(\check{\mathbf{U}}_{\check{m}}^{r,k})_{k=1}^{n_r}$ une suite de Jordan-Hölder de $\check{\mathbf{U}}_{\check{m}}^r$ sous l'action de H,
- $(\check{\mathbf{V}}_{\check{m}}^{r,k})_{k=n_r-1}^{0}$ la suite de Jordan-Hölder de $\check{\mathbf{V}}_{\check{m}}^r$ sous l'action de H, duale de la précédente,
- l'action de l'holonomie sur $\check{\mathbf{Y}}_{\check{m}}^0$ (de dimension éventuellement nulle) est triviale.

Ces sous-espaces induisent des feuilletages parallèles $(\mathcal{X},((\mathcal{U}^{r,k})_{k=0}^{n_r})_{r=1}^N,((\mathcal{V}^{r,k})_{k=n_r}^0)_{r=1}^N,(\mathcal{Y}^s)_{s=0}^{N'})$.

Rappels de notation : On note $d_r = \dim \check{\mathbf{U}}^r_{\check{m}}$, $d^k_r = \dim \check{\mathbf{U}}^{r,k}_{\check{m}}$ et $d'_s = \dim \check{\mathbf{Y}}^s_{\check{m}}$. D'autre part, si p est un point de $\mathcal{M}$, on note $\widetilde{\mathcal{U}}_p$ et $\widetilde{\mathcal{V}}_p$ les sous-variétés de $\mathcal{M}$ définies, au moins au voisinage de p, par :

$$\widetilde{\mathcal{U}}_p = \pi^{-1}\left((\prod_{r=1}^{N} \check{\mathcal{U}}^r_{\check{p}}) \times (\prod_{s=0}^{N'} \check{\mathcal{Y}}^s_{\check{p}}) \right)$$

et :

$$\widetilde{\mathcal{V}}_p = \pi^{-1}\left((\prod_{r=1}^{N} \check{\mathcal{V}}^r_{\check{p}}) \times (\prod_{s=0}^{N'} \check{\mathcal{Y}}^s_{\check{p}}) \right)$$

Définition 4 *On dira qu'un système de coordonnées* $(x,(u^r,v^r)_{r=1}^N,(y^s)_{s=0}^{N'},z) = (x,((u^r_i)_{i=1}^{d_r}, (v^r_i)_{i=1}^{d_r})_{r=1}^N, ((y^s_i)_{i=1}^{d'_s})_{s=0}^{N'}, z)$ *est adapté aux feuilletages* $(\mathcal{X},((\mathcal{U}^{r,k})_{k=0}^{n_r})_{r=1}^N,((\mathcal{V}^{r,k})_{k=n_r}^{0})_{r=1}^N, (\mathcal{Y}^s)_{s=0}^{N'})$ *(stables ou non par holonomie) si :*

- *la coordonnée x paramètre les feuilles de $\mathcal{X}$,*
- *les coordonnées $(x,(u^r_i)_{i=1}^{d^k_r})$ celles de $\mathcal{U}^{r,k}$ et les coordonnées $(x,(v^r_i)_{i=d^k_r+1}^{d_r})$ celles de $\mathcal{V}^{r,k}$, pour tout r de $[\![1,N]\!]$ et tout k de $[\![1,n_r]\!]$,*
- *les coordonnées $(x,(y^s_i)_{i=1}^{d'_s})$ celles de $\mathcal{Y}^s$, pour tout s de $[\![0,N']\!]$,*
- *les coordonnées $(x,((u^r_i)_{i=1}^{d_r},(v^r_i)_{i=1}^{d_r})_{r=1}^N,((y^s_i)_{i=0}^{d'_s})_{s=0}^{N'})$ celles de $\mathcal{X}^\perp$.*

Remarque/notation. Dans un tel système, s'il en existe, vu les diverses relations d'orthogonalité des distributions $(\mathbf{X},((\mathbf{U}^{r,k})_{k=0}^{n_r})_{r=1}^N,((\mathbf{V}^{r,k})_{k=n_r}^{0})_{r=1}^N,(\mathbf{Y}^s)_{s=0}^{N'})$, la métrique prend la forme :

$$g = \left(\sum_{r=1}^{N} g^r\right) + \left(\sum_{s=0}^{N'} g'^s\right) + 2\gamma \, \mathrm{d}z$$

où γ est une 1-forme et où :

- pour tout s de $[\![0,N']\!]$, $g'^s = \sum_{i,j=1}^{d'_s} g'^s_{i,j} \, \mathrm{d}y^s_i \, \mathrm{d}y^s_j$,
- pour tout r de $[\![1,N]\!]$, $g^r = 2\sum_{k=1}^{n_r} \sum_{i=d^{k-1}_r+1}^{d^k_r} \sum_{j=1}^{d^k_r} g^r_{i,j} \, \mathrm{d}u^r_i \, \mathrm{d}v^r_j$.

Proposition 3 *On note* $(\mathbf{X},((\mathbf{U}^{r,k})_{k=0}^{n_r})_{r=1}^N,((\mathbf{V}^{r,k})_{k=n_r}^{0})_{r=1}^N,(\mathbf{Y}^s)_{s=0}^{N'})$ *les distributions tangentes aux feuilletages* $(\mathcal{X},((\mathcal{U}^{r,k})_{k=0}^{n_r})_{r=1}^N,((\mathcal{V}^{r,k})_{k=n_r}^{0})_{r=1}^N,(\mathcal{Y}^s)_{s=0}^{N'})$. *Ces distributions sont stables par transport parallèle* ssi *la métrique g, dans des coordonnées adaptées aux feuilletages, vérifie la propriété suivante :*

Pour tout couple $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ de feuilletages parmi $(\mathcal{X},((\mathcal{U}^{r,k})_{k=0}^{n_r})_{r=1}^N,((\mathcal{V}^{r,k})_{k=n_r}^{0})_{r=1}^N,(\mathcal{Y}^s)_{s=0}^{N'})$, tout couple (A,B) de vecteurs-coordonnées de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ et tout vecteur-coordonnée C :

$$\mathbf{A} \perp \mathbf{B} \Rightarrow L_B g(A,C) = L_A g(B,C). \qquad \textbf{(P)}$$

Par le calcul, on vérifie que **(P)** admet la formulation matricielle suivante :

$*$ pour tout s de $[\![0,N']\!]$, la matrice $(g'^s_{i,j})_{i,j=1}^{d'_s}$ ne dépend que de y^s et z ; pour tout r de $[\![1,N]\!]$, la matrice $\widetilde{g}^r = (g^r_{i,j})_{i,j=1}^{d_r}$ ne dépend que de u^r, v^r et z. En outre, pour tout (k,l) de $[\![1,n_r]\!]^2$, la matrice $(g^r_{i,j})_{i=d^k_r+1}^{d_r}{}_{j=1}^{d^k_r}$ est indépendante des $(u^r_i)_{i=1}^{d^k_r}$ et des $(v^r_j)_{j=d^l_r+1}^{d_r}$.

* $\forall r \in [\![1,N]\!] \forall i,j,k \in [\![1,d_r]\!], \partial g^r_{i,j}/\partial u^r_k = \partial g^r_{i,k}/\partial u^r_j$ et $\partial g^r_{i,j}/\partial v^r_k = \partial g^r_{k,j}/\partial v^r_i$.
* la 1-forme γ satisfait : $\forall \mathcal{A},\mathcal{B} \in \mathfrak{F}, \mathcal{A} \perp \mathcal{B} \Rightarrow \mathrm{d}\gamma(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \{0\}$.

Démonstration de la proposition.

Le sens $\boxed{\Rightarrow}$. On suppose les feuilletages stables par transport parallèle. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux feuilletages orthogonaux de $\mathfrak{F}$ et (A,B) un couple de vecteurs-coordonnées dans $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$, soit C un vecteur-coordonnée quelconque. Alors :

$$L_B < A,C > = < D_B A,C > + < B,D_A C > = < D_B A,C > + < B,D_C A > .$$

Le champ A est dans $\mathbf{A}$, distribution parallèle, donc $D_C A \in \mathbf{A} \perp \mathbf{B}$ et donc $< B,D_C A > = 0$. Comme $D_B A = D_A B$, $L_B < A,C >$ est donc une expression symétrique en A et B, c'est le résultat.

Le sens $\boxed{\Leftarrow}$. Soit $\mathcal{A}$ un des feuilletages ; on veut donc montrer que, pour tout vecteur-coordonnée A tangent au feuilletage $\mathcal{A}$:

$$\forall p \in \mathcal{M}, \forall C \in \mathrm{T}_p\mathcal{M}, D_C A \in \mathbf{A}.$$

Pour le montrer, prenons B un vecteur-coordonnée tangent à $\mathcal{A}^\perp$, quelconque ; il suffit de montrer que pour tout vecteur-coordonnée C : $< D_C A,B > = 0$. Or :

$$< D_C A,B > = \frac{1}{2}\left(L_C < A,B > + L_A < B,C > - L_B < A,C >\right).$$

Le vecteur-coordonnée B est supposé orthogonal à $\mathbf{A}$ donc $L_C < A,B > = L_C 0 = 0$. D'autre part, par **(P)**, $L_A < B,C > = L_B < A,C >$. Le résultat suit. □

Remarque. Le but visé est la construction de coordonnées adaptées aux divers feuilletages parallèles en présence et «suffisamment uniques» pour qu'il soit possible d'y lire les propriétés de l'holonomie locale. Cette unicité sera obtenue en ajoutant des contraintes supplémentaires portant essentiellement sur la forme γ.

La propriété **(P)** satisfaite par tout système de coordonnées adaptées à des feuilletages stables par holonomie incite à rechercher une forme γ fermée. Ce n'est en général pas totalement possible ; on peut cependant s'en approcher au maximum ; c'est ce que fait, entre autres, le théorème qui suit. Introduisons enfin une dernière notation.

Notation. Si $\mathcal{M}$ est muni de coordonnées, si $p \in \mathcal{M}$ et si A, B et C sont trois vecteurs-coordonnées de $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$, on notera $\Gamma^C_{A,B}$ le coefficient de Christoffel relatif à A, B et C ; les $\Gamma^C_{A,B}$ sont définis par :

$$D_A B = D_B A = \sum_{\substack{C\text{vecteur-}\\ \text{coordonnée}}} \Gamma^C_{A,B} C.$$

III.2.2 L'énoncé et un résultat connexe important

On peut à présent introduire les coordonnées proposées.

Théorème 1 *Sous les hypothèses et avec les notations introduites dans la section précédente :*

(a) *Il existe, au voisinage de m, un système de coordonnées $(x,(u^r,v^r)^N_{r=1},(y^s)^{N'}_{s=0},z) = (x,((u^r_i)^{d_r}_{i=1},(v^r_i)^{d_r}_{i=1})^N_{r=1},((y^s_i)^{d'_s}_{i=1})^{N'}_{s=0},z)$ de classe C^∞, centré en m et :*

(I) *adapté aux feuilletages* $(\mathcal{X},((\mathcal{U}^{r,k})_{k=0}^{n_r})_{r=1}^{N},((\mathcal{V}^{r,k})_{k=n_r}^{0})_{r=1}^{N},(\mathcal{Y}^s)_{s=0}^{N'})$,

(II) *vérifiant de plus les propriétés suivantes :*

(i) *en tout point,*

- $g'^0 = \sum_{i=1}^{d'_0} \varepsilon_i^0 (\,\mathrm{d}y_i^0)^2$ *où* $\forall i \in [\![1,d'_0]\!], \varepsilon_i^0 = \pm 1$,
- $\gamma(Z) = 0\,$;

(ii) *Pour tout* r *de* $[\![1,N]\!]$, *la matrice* g^r *vérifie :*

$$\forall p \in \mathcal{X}_m^{\perp},\ (\partial g^r/\partial z)_{|p} = 0 \quad et: \ \forall p \in \mathcal{U}_m^r \cup \mathcal{V}_m^r,\ g^r = 2\sum_{i=1}^{d_r} \mathrm{d}u_i^r\,\mathrm{d}v_i^r \ ;$$

En notant m_z *le point de coordonnées* $(0,\ldots,0,z)$, *la forme* γ *vérifie :*

- *en tout point de* $\mathcal{X}_m^{\perp}$, $\gamma = \mathrm{d}x$,
- *le long de la courbe* $(m_z)_z$, $\gamma = \mathrm{d}x$ *et :*

$$\forall r \in [\![1,N]\!], \forall k \in [\![1,n_r]\!], \forall (i,j) \in [\![1,d_r^k]\!]^2,\ \left(\frac{\partial}{\partial u_i^r}\right)_{|m_z} \big(\gamma(V_j^r)\big) = \left(\frac{\partial}{\partial v_j^r}\right)_{|m_z} (\gamma(U_i^r)) = 0,$$

- *pour tout* z *et en tout point* p *de* $\cup_z \Big(\widetilde{\mathcal{U}}_{m_z} \cup \widetilde{\mathcal{V}}_{m_z}\Big)$, $\mathrm{d}\gamma_{|\mathbf{X}_p^{\perp}} = 0$,
- *en introduisant* $\mathcal{S}_z^s = \{p \in \mathcal{Y}_{m_z}^s /\ x(p) = 0\}$: $\forall s \in [\![1,N']\!], \forall p \in \mathcal{S}_z^s, \gamma_{|\mathrm{T}_p\mathcal{S}_z^s} = 0\,$;

(iii) $g(m) = \Big(2\sum_{r=1}^{N}\sum_{i=1}^{d_r} \mathrm{d}u_i^r\,\mathrm{d}v_i^r\Big) + \Big(\sum_{s=0}^{N'}\sum_{i=1}^{d'_s} \varepsilon_i^s (\,\mathrm{d}y_i^s)^2\Big) + 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ *où* $\varepsilon_i^s = \pm 1$.

(b) *Si deux tels systèmes de coordonnées coïncident sur leurs sous-variétés* $\mathcal{S}_0^s$ *pour* $s \in [\![1,N']\!]$ *et ont leurs vecteurs-coordonnées associés* $(X, (Y_i^0)_{i=1}^{d'_0}, ((U_i^r)_{i=1}^{d_r})_{r=1}^{N})$ *égaux en* m, *alors ils coïncident sur l'intersection de leurs domaines de définition. C'est donc en particulier le cas s'ils coïncident sur* $\mathcal{X}_m^{\perp}$.

(c) *Les coordonnées sont adaptées aux feuilletages en présence, la métrique vérifie alors naturellement la propriété* **(P)** *énoncée page 160. En outre, la forme* γ *est déterminée par les conditions du* **(II)**, **(ii)** *et par les deux relations différentielles suivantes :*

- *Pour tous* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *de* $\mathfrak{F}$, *tout point* p *de* $\mathcal{M}$ *et tout couple* (A,B) *de vecteurs-coordonnées de* $\mathbf{A}_p \times \mathbf{B}_p$ *:*

$$\big[(\mathcal{A} \perp \mathcal{B}) \ ou \ (\mathcal{A} = \mathcal{Y}^0)\big] \Rightarrow L_A L_Z \gamma(B) = < R(Z,A)Z,B > + \sum_{\substack{C\,vecteur\text{-}\\coordonn\acute{e}e}} \Gamma_{A,B}^{C} L_Z\gamma(C).$$

- *Pour tout* r *de* $[\![1,N]\!]$, *pour tout* z,

$$\begin{cases} sur\ \mathcal{U}_{m_z} : \forall i,j,k \in [\![1,d_r]\!], L_{U_i}L_{U_j}L_Z\gamma(V_k) = L_{V_k}[< R(Z,U_i)Z,U_j > + \displaystyle\sum_{\substack{C\,vecteur\text{-}\\coordonn\acute{e}e}} \Gamma_{U_i,U_j}^{C} L_Z\gamma(C)] \\ sur\ \mathcal{V}_{m_z} : \forall i,j,k \in [\![1,d_r]\!], L_{V_i}L_{V_j}L_Z\gamma(U_k) = L_{U_k}[< R(Z,V_i)Z,V_j > + \displaystyle\sum_{\substack{C\,vecteur\text{-}\\coordonn\acute{e}e}} \Gamma_{V_i,V_j}^{C} L_Z\gamma(C)] \end{cases}$$

Remarque. Le résultat obtenu en **(c)** est décevant. Certes, les conditions imposées en **(a)** **(II)** à la forme γ la rendent déterminée, pour le reste, par la géométrie de la variété. Cette détermination, détaillée par le **(c)**, reste cependant compliquée et difficilement utilisable. On n'a hélas pas trouvé, dans cette optique, de meilleurs choix de contraintes sur γ.

Toutefois, le point **(c)** admet pour une part une expression plus simple, donnée par la proposition qui suit ; le premier point de celle-ci permettra notamment en partie IV de classifier localement les variétés lorentziennes à holonomie réductible-indécomposable.

Proposition 4 *Le point* **(c)** *du théorème implique :*

- *pour tous $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de $\mathfrak{F}$, tout point p de $\mathcal{M}$ et tout couple (A,B) de vecteurs-coordonnées de $\mathbf{A}_p \times \mathbf{B}_p$:*

$$\big[(\mathcal{A} \perp \mathcal{B} \text{ et } \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{X}) \text{ ou } (\mathcal{A} = \mathcal{Y}^0)\big] \Rightarrow$$
$$\gamma(X).L_Z\left(L_A\gamma(B).\gamma(X)^{-1}\right) = < R(Z,A).Z,B > .$$

- *pour tout r de $[\![1,N]\!]$ et en tout point p de $\mathcal{X}_m^{\perp}$:*

$$\forall i,j \in [\![1,d_r]\!], L_{U_i}L_Z\gamma(U_j) = < R(Z,U_i)Z,U_j > = < R(Z,U_j)Z,U_i > .$$

Enfin, il est important de noter que la «réciproque» du théorème 1 est vérifiée : si un ouvert de $\mathbb{R}^d$ est muni d'une métrique du type donné par ce théorème, l'espace $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$ admet alors des sous-espaces stables par holonomie comme dans la situation décrite page 159 en début de section III.2.2. C'est la conséquence immédiate de la proposition 3 page 160.

La démonstration du théorème et de la proposition 4 sont regroupées en fin de partie, section III.5 page 174.

III.2.3 La forme matricielle de la métrique

Donnons un aperçu matriciel de la situation, pour permettre la mise en rapport avec la matrice générique de l'holonomie donnée page 159. On suppose de même $N = N' = 1$, $n_1 = 3$ (alors $d_1 = d_1^3$) et $d'_0 \neq 0$. Dans les coordonnées données par le théorème, la métrique est alors de matrice :

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c}
x & u^1_1 \dots u^1_{d^1_1} & u^1_{d^1_1+1} \dots u^1_{d^2_1} & u^1_{d^2_1+1} \dots u^1_{d^3_1} & v^1_1 \dots v^1_{d^1_1} & v^1_{d^1_1+1} \dots v^1_{d^2_1} & v^1_{d^2_1+1} \dots v^1_{d^3_1} & y^0_1 \dots y^0_{d'_0} & y^1_1 \dots y^1_{d'_1} & z
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
0 & 0 \dots\dots\dots 0 & 0 \dots\dots\dots 0 & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & \gamma_0 \\
\hline
\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & 0 & \begin{matrix} & 0 \\ {}^t\widetilde{g}^1(u^1,v^1,z) & \end{matrix} & 0 & 0 & \begin{matrix} \check{\gamma}^1_1 \\ \vdots \\ \check{\gamma}^1_{d^3_1} \end{matrix} \\
\hline
\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} & \widetilde{g}^1(u^1,v^1,z) \\ 0 & \end{matrix} & 0 & 0 & 0 & \begin{matrix} \hat{\gamma}^1_1 \\ \vdots \\ \hat{\gamma}^1_{d^3_1} \end{matrix} \\
\hline
\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & 0 & 0 & I_{p_0,q_0} & 0 & \begin{matrix} \gamma^0_1 \\ \vdots \\ \gamma^0_{d'_0} \end{matrix} \\
\hline
\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & 0 & 0 & 0 & g'^1(y^1,z) & \begin{matrix} \gamma^1_1 \\ \vdots \\ \gamma^1_{d'_1} \end{matrix} \\
\hline
\gamma_0 & \check{\gamma}^1_1 \dots\dots\dots \check{\gamma}^1_{d^3_1} & \hat{\gamma}^1_1 \dots\dots\dots \hat{\gamma}^1_{d^3_1} & \gamma^0_1 \dots \gamma^0_{d'_0} & \gamma^1_1 \dots \gamma^1_{d'_1} & 0
\end{array}\right)
$$

où $\widetilde{g}^1$ est la matrice $(g_{i,j})_{i,j=1}^{d_1}$, représentée par

$$
\begin{pmatrix} & \widetilde{g}^1 \\ 0 & \end{pmatrix} \quad \text{car} : \forall k \in [\![1,2]\!], \forall (i,j) \in [\![d^k_1+1,d^3_1]\!] \times [\![1,d^k_1]\!], g_{i,j} = 0.
$$

La matrice de la forme g^1 du théorème est donc : $\begin{pmatrix} 0 & {}^t\widetilde{g}^1 \\ \widetilde{g}^1 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice $\widetilde{g}^1$ dépend des coordonnées $((u^1_i)_{i=1}^{d_1},(v^1_i)_{i=1}^{d_1},z)$ et est donc notée $\widetilde{g}^1(u^1,v^1,z)$. De la même façon, g'^1 dépend de $((y^1_i)_{i=1}^{d'_1},z)$ et est donc notée $g'^1(y^1,z)$. Les coefficients de γ dépendent potentiellement de toutes les coordonnées.

III.2.4 Remarques supplémentaires et commentaire

Remarque : La métrique g est une 2-forme en tout point non dégénérée donc, dans la situation et sous les notations du théorème, en tout point :

- Les matrices $\widetilde{g}^r$, pour tout r de $[\![1,N]\!]$ et les matrices g'^s, pour tout s de $[\![1,N']\!]$, sont inversibles. Plus précisément pour les premières : pour tout r de $[\![1,N]\!]$ et tout k de $[\![1,n_r]\!]$, la matrice $(g_{i,j})_{i,j=d^{k-1}_r+1}^{d^k_r}$ est inversible.

- $\gamma(X) \neq 0$.

Une autre présentation de la forme γ. On peut également présenter la forme γ comme elle apparaît dans la matrice exposée plus haut, *i.e.* comme une forme du type :

$$\gamma = \left(\sum_{r=1}^{N} \sum_{i=1}^{d_r} \breve{\gamma}_i^r \, \mathrm{d}u_i^r + \hat{\gamma}_i^r \, \mathrm{d}v_i^r \right) + \left(\sum_{s=0}^{N'} \sum_{i=1}^{d'_s} \gamma_i^s \, \mathrm{d}y_i^s \right) + \gamma_0 \, \mathrm{d}x.$$

avec :

- le long de $\mathcal{X}_m^{\perp}$ et de $(m_z)_z$, $\forall r \in [\![1,N]\!], \forall i \in [\![1,d_r]\!], \breve{\gamma}_i^r = \hat{\gamma}_i^r = 0$, $\forall s \in [\![0,N']\!], \forall i \in [\![1,d'_s]\!], \gamma_i^s = 0$, $\gamma_0 = 1$ et, le long de $(m_z)_z$:

$$\forall r \in [\![1,N]\!], \forall k \in [\![1,n_r]\!], \forall (i,j) \in [\![1,d_r^k]\!]^2, \frac{\partial \hat{\gamma}_j^r}{\partial u_i^r} = \frac{\partial \breve{\gamma}_j^r}{\partial v_i^r} = 0,$$

- en tout point p de $\cup_z \left(\widetilde{\mathcal{U}}_{m_z} \cup \widetilde{\mathcal{V}}_{m_z} \right)$ et pour tous les indices r,r',s,s' de $[\![1,N]\!]^2 \times [\![0,N']\!]^2$:

$$\begin{array}{llll}
\frac{\partial \breve{\gamma}_i^r}{\partial x} = \frac{\partial \gamma_0}{\partial u_i^r} & \frac{\partial \breve{\gamma}_i^r}{\partial u_j^{r'}} = \frac{\partial \breve{\gamma}_j^{r'}}{\partial u_i^r} & & \\
\frac{\partial \hat{\gamma}_i^r}{\partial x} = \frac{\partial \gamma_0}{\partial v_i^r} & \frac{\partial \hat{\gamma}_i^r}{\partial u_j^{r'}} = \frac{\partial \breve{\gamma}_j^{r'}}{\partial v_i^r} & \frac{\partial \hat{\gamma}_i^r}{\partial v_j^{r'}} = \frac{\partial \hat{\gamma}_j^{r'}}{\partial v_i^r} & \\
\frac{\partial \gamma_i^s}{\partial x} = \frac{\partial \gamma_0}{\partial y_i^s} & \frac{\partial \gamma_i^s}{\partial u_j^r} = \frac{\partial \breve{\gamma}_j^r}{\partial y_i^s} & \frac{\partial \gamma_i^s}{\partial v_j^r} = \frac{\partial \hat{\gamma}_j^r}{\partial y_i^s} & \frac{\partial \gamma_i^s}{\partial y_j^{s'}} = \frac{\partial \gamma_j^{s'}}{\partial y_i^s}.
\end{array}$$

- $\forall s \in [\![1,N']\!], \forall i \in [\![1,d'_s]\!], \forall z, \forall p \in \mathcal{S}_z^s, \gamma_i^s(p) = 0.$

Le deuxième point du **(c)** devient :

$$\begin{aligned}
&\forall r \neq r', \gamma_0 \tfrac{\partial}{\partial z} \left(\gamma_0^{-1} \tfrac{\partial \breve{\gamma}_i^r}{\partial u_j^{r'}} \right) = < R(Z,U_i^r).Z,U_j^{r'} > , \ \gamma_0 \tfrac{\partial}{\partial z} \left(\gamma_0^{-1} \tfrac{\partial \hat{\gamma}_i^r}{\partial v_j^{r'}} \right) = < R(Z,V_i^r).Z,V_j^{r'} > \\
&\qquad \text{et } \gamma_0 \tfrac{\partial}{\partial z} \left(\gamma_0^{-1} \tfrac{\partial \breve{\gamma}_i^r}{\partial v_j^{r'}} \right) = \gamma_0 \tfrac{\partial}{\partial z} \left(\gamma_0^{-1} \tfrac{\partial \hat{\gamma}_i^r}{\partial u_j^{r'}} \right) = < R(Z,U_i^r).Z,V_j^{r'} > = < R(Z,V_i^r).Z,U_j^{r'} > , \\
&\forall r \in [\![1,N]\!], \forall k \in [\![1,n_r]\!], \forall (i,j) \in [\![1,d_r^k]\!] \times [\![d_r^k + 1,d_r]\!], \\
&\qquad \gamma_0 \tfrac{\partial}{\partial z} \left(\gamma_0^{-1} \tfrac{\partial \breve{\gamma}_i^r}{\partial v_j^r} \right) = \gamma_0 \tfrac{\partial}{\partial z} \left(\gamma_0^{-1} \tfrac{\partial \hat{\gamma}_j^r}{\partial u_i^r} \right) = < R(Z,U_i^r).Z,V_j^r > = < R(Z,V_j^r).Z,U_i^r > , \\
&\forall r, \forall s, \gamma_0 \tfrac{\partial}{\partial z} \left(\gamma_0^{-1} \tfrac{\partial \breve{\gamma}_i^r}{\partial y_j^s} \right) = \gamma_0 \tfrac{\partial}{\partial z} \left(\gamma_0^{-1} \tfrac{\partial \gamma_j^s}{\partial u_i^r} \right) = < R(Z,U_i^r).Z,Y_j^s > = < R(Z,Y_j^s).Z,U_i^r > \text{ et} \\
&\qquad \gamma_0 \tfrac{\partial}{\partial z} \left(\gamma_0^{-1} \tfrac{\partial \hat{\gamma}_i^r}{\partial y_j^s} \right) = \gamma_0 \tfrac{\partial}{\partial z} \left(\gamma_0^{-1} \tfrac{\partial \gamma_j^s}{\partial v_i^r} \right) = < R(Z,V_i^r).Z,Y_j^s > = < R(Z,Y_j^s).Z,V_i^r > , \\
&\forall (s,s,') \in [\![0,N']\!]^2, s \neq s' \text{ ou } s = s' = 0 \Rightarrow \gamma_0 \tfrac{\partial}{\partial z} \left(\gamma_0^{-1} \tfrac{\partial \gamma_i^s}{\partial y_j^{s'}} \right) = < R(Z,Y_i^s).Z,Y_j^{s'} > .
\end{aligned}$$

Un commentaire. Exiger seulement d'un système local de coordonnées de $\mathcal{M}$ au voisinage de m qu'il paramètre, par certains de ses sous-systèmes, les feuilles de $\mathcal{X}$, des $\mathcal{U}^{r,k}$, des $\mathcal{V}^{r,k}$, des $\mathcal{Y}^s$ et de $\mathcal{X}^{\perp}$ est une contrainte relativement «molle». Plus précisément, aucune «condition initiale» sur les coordonnées, fixée sur certaines des feuilles de ces feuilletages, ne peut déterminer un tel système de façon unique.

Ce n'est pas la situation dans un produit riemannien. Soit en effet $(\mathcal{M},g)$ une variété pseudo-riemannienne localement isométrique à un produit riemannien $\prod_{r=1}^{N} (\mathcal{A}^r,g^r)$ et désignons encore par $(\mathcal{A}^r)_{r=1}^N$ les feuilletages de $\mathcal{M}$, transverses et supplémentaires, déterminés par les submersions $\mathcal{M} \to \mathcal{M}/\mathcal{A}^r$. Alors, un système de coordonnées $((a_i^r)_{i=1}^{d_r})_{r=1}^N$ dont les sous-systèmes $(a_i^r)_{i=1}^{d_r}$ paramètrent les feuilles des $\mathcal{A}^r$, c'est-à-dire un système de coordonnées produit, est déterminé de façon unique par la valeur de chaque $(a_i^r)_{i=1}^{d_r}$ sur chaque $\mathcal{A}_m^r$, où

m est un point quelconque de $\mathcal{M}$. Autrement dit, une condition suffisante d'égalité de deux systèmes de coordonnées produit, est leur égalité sur les sous-variétés facteurs.

Dans le cas qui nous occupe, la non-unicité plus affirmée des coordonnées adaptées aux feuilletages vient bien sûr du fait que la «somme» de ces feuilletages n'est pas la variété $\mathcal{M}$: $\forall p \in \mathcal{M}, (\overset{N}{\underset{r=1}{+}} \mathbf{U}^r_p) + (\overset{N}{\underset{r=1}{+}} \mathbf{V}^r_p) + (\overset{N'}{\underset{s=1}{+}} \mathbf{Y}^s_p) \subsetneq \mathrm{T}_p\mathcal{M}$. Cependant, chercher une famille particulière de coordonnées locales de $\mathcal{M}$ munie d'une conditions suffisante d'égalité qui soit la plus faible possible (ici le **(b)** du théorème) est potentiellement intéressant. On peut en espérer en effet :

- une certaine compréhension de la géométrie locale de $\mathcal{M}$, dans la mesure où certains invariants peuvent se dégager,
- trouver quelles familles de variétés $\mathcal{M}$ satisfont telle ou telle propriété supplémentaire, portant par exemple sur l'holonomie, et se donner une idée de la «taille» de ces familles; prouver éventuellement que certaines propriétés ne peuvent pas être vérifiées par des variétés complètes (dans les divers sens que cette notion peut revêtir dans le cadre pseudo-riemannien) car les coefficients de la métrique divergent alors en temps fini (encore en un sens à préciser).

[Ces points sont du moins ici à l'état d'espoir et nous ont motivé dans la recherche de ces coordonnées. Reste à voir ce qu'il en est effectivement...] Aussi a-t-on *ajouté* aux conditions naturelles **(a)**, **(I)**, les diverses conditions, plus arbitraires, du **(a)**, **(II)** et du **(a)**, **(III)**. On précisera au cours des sections suivantes dans quelles mesure elles sont partiellement naturelles, et aussi quelle part d'arbitraire elles contiennent. Mentionnons notamment la condition supplémentaire de base qui a guidé la démarche :

exiger que $< Z,Z >= 0$, où Z est le vecteur-coordonnés transverse à $\mathcal{X}^\perp$.

C'est la première nouveauté par rapport aux coordonnées de Walker ([W50a], [W50b]).

Remarquons enfin une différence qui subsiste avec un produit riemannien. Dans ce dernier cas, la propriété d'unicité d'un système de coordonnées fixé sur les facteurs, existe aussi pour la variété : deux produits riemanniens locaux, localement isométriques sur leurs sous-variétés-facteurs, sont localement isométriques. Ce n'est pas le cas dans la situation du présent théorème. Si $\mathcal{M}$ est donnée et que deux systèmes de coordonnées du type du théorème coïncident sur $\mathcal{X}^\perp_m$, ils sont égaux. Mais il existe une infinité de variétés $\mathcal{M}$ localement isomorphes sur une de leurs feuilles $\mathcal{X}^\perp_m$ (c'est-à-dire, $(\mathcal{M},g)$ et $(\mathcal{M}',g')$ sont deux telles variétés, si : $\exists m \in \mathcal{M}, \exists m' \in \mathcal{M}', \exists \varphi : \mathcal{X}^\perp_m \to \mathcal{X}'^\perp_{m'}\ : \varphi^* g'_{|\mathrm{T}\mathcal{X}'^\perp_{m'}} = g_{|\mathrm{T}\mathcal{X}^\perp_m}$ et $\varphi^* D'_{|\mathrm{T}\mathcal{X}'^\perp_{m'}} = D_{|\mathrm{T}\mathcal{X}^\perp_m}$ où D et D' sont les connexions respectives de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$).

III.3 Quatre cas particuliers

Le théorème aborde une situation d'une certaine généralité ; c'est une des raisons de la complication de son énoncé. Dans certains cas particuliers, le résultat s'exprime plus simplement. On en considère quatre ici. Le premier indique comment se traduit dans les coordonnées une certaine propriété supplémentaire de l'holonomie. Les deux suivants supposent particulière la situation algébrique sur $\mathbf{X}^\perp_m$. Les deux derniers sont des sous-cas du deuxième.

Le théorème affirme l'existence de coordonnéres vérifiant des propriétés plus ou moins naturelles. L'examen du troisième cas particulier éclaire le choix de certaines de ces propriétés. On s'attardera donc à quelques commentaires à son sujet (III.3.4)

III.3.1 Quand l'holonomie agit-elle trivialement sur $\mathbf{X}_m$?

Proposition 5 *Dans la situation et sous les notations du théorème, l'holonomie restreinte H agit trivialement sur $\mathbf{X}_m$* ssi *γ est de la forme :*

$$\gamma = \mathrm{d}x + \pi^*\check{\gamma} \text{ où } \check{\gamma} \text{ est une 1-forme sur } \check{\mathcal{M}}.$$

La métrique g est alors de la forme :

$$g = \left(\sum_{r=1}^{N} g^r\right) + \left(g'^0 + \sum_{s=1}^{N'} g'^s\right) + 2(\pi^*\check{\gamma})\,\mathrm{d}z + 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z.$$

Le premier point du **(a) (II) (ii)** *devient : $\pi^*\check{\gamma}_{|\mathrm{T}\check{\mathcal{X}}^{\perp}_{\check{m}}} = 0$ et le deuxième point du* **(c)** *:*

$$\big[(\mathcal{A} \perp \mathcal{B} \text{ et } \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{X}) \text{ ou } (\mathcal{A} = \mathcal{Y}^0)\big] \Rightarrow L_Z L_A \gamma(B) =< R(Z,A).Z,B > .$$

Démonstration. Découle du point **(c)** du lemme 4 page 141. □

Remarque : La démonstration du théorème dans ce cas particulier est notoirement plus simple. On n'a en un sens pas à construire au préalable la famille de sections $(\mathfrak{S}_z)_z$ (voir page 182 et suivantes).

Remarque : Dans ce cas, pour tout s de $[\![1,N']\!]$, le long de $\cup_z \mathcal{Y}^s_{m_z}$, pour tout i de $[\![1,d'_s]\!]$, $\gamma(Y^s_i) = 0$ *i.e.* $< Z,Y^s_i >= 0$.

III.3.2 Le cas où $N = 0$: pas de facteur de type «$\check{\mathbf{U}}_{\check{m}} \oplus \check{\mathbf{V}}_{\check{m}}$» dans la décomposition de $\check{\mathbf{X}}^{\perp}_{\check{m}}$

Si la variété $\mathcal{M}$ est *lorentzienne*, on est notamment nécessairement dans ce cas ; $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$ n'admet en effet pas de sous-espace totalement isotrope de dimension supérieure ou égale à deux. Pour cette raison, citons la forme que prend l'énoncé dans ce cas.

Théorème 1 (Cas où $N = 0$) *Dans la situation présentée en III.1 :*

(a) *Il existe, au voisinage de m, un système de coordonnées $(x,(y^s)_{s=0}^{N'},z) = (x,((y^s_i)_{i=1}^{d'_s})_{s=0}^{N'}, z)$ de classe C^∞, centré en m et :*

(I) *adapté aux feuilletages $(\mathcal{X},(\mathcal{Y}^s)_{s=0}^{N'})$,* (cf. *def. 4 p. 160)*

(II) *vérifiant de plus les propriétés suivantes :*

(i) *en tout point,*
- $g'^0 = \sum_{i=1}^{d'_0} \varepsilon^0_i (\,\mathrm{d}y^0_i)^2$ *où* $\forall i \in [\![1,d'_0]\!], \varepsilon^0_i = \pm 1$,
- $\gamma(Z) = 0$;

(ii) *en notant m_z le point de coordonnées $(0,\ldots,0,z)$, la forme γ vérifie :*
- *en tout point de $\mathcal{X}^{\perp}_m$, $\gamma = \mathrm{d}x$,*
- *le long de la courbe $(m_z)_z$, $\gamma = \mathrm{d}x$,*
- *pour tout z, $\gamma_{|\mathrm{T}\mathcal{X}^{\perp}_{m_z}}$ est fermée,*
- *en introduisant $\mathcal{S}^s_z = \{p \in \mathcal{Y}^s_{m_z} /\ x(p) = 0\}$: $\forall s \in [\![1,N']\!], \forall p \in \mathcal{S}^s_z, \gamma_{|\mathrm{T}_p\mathcal{S}'^s_z} = 0$;*

(iii) $g(m) = \left(\sum_{s=0}^{N'} \sum_{i=1}^{d'_s} \varepsilon^s_i (\,\mathrm{d}y^s_i)^2\right) + 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ *où* $\varepsilon^s_i = \pm 1$.

(b) *Si deux tels systèmes de coordonnées coïncident sur leurs sous-variétés $\mathcal{S}_0^s$ pour $s \in [\![1,N']\!]$ et ont leurs vecteurs-coordonnées associés $(X, (Y_i^0)_{i=1}^{d'_0})$ égaux en m, alors ils coïncident sur l'intersection de leurs domaines de définition. C'est donc en particulier le cas s'ils coïncident sur $\mathcal{X}_m^\perp$.*

(c) *Alors, de plus :*

- *Pour tout s de $[\![1,N']\!]$, la matrice $(g'^s_{i,j})_{i,j=1}^{d'_s}$ ne dépend que de y^s et z.*
- *la forme γ est déterminée par les conditions du* **(II)**, **(ii)** *et par la relation suivante :*

Pour tous $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ parmi $(\mathcal{X}, (\mathcal{Y}^s)_{s=0}^{N'})$, tout point p de $\mathcal{M}$ et tout couple (A,B) de vecteurs-coordonnées de $\mathbf{A}_p \times \mathbf{B}_p$:

$$\left[(\mathcal{A} \perp \mathcal{B}) \text{ ou } (\mathcal{A} = \mathcal{Y}^0)\right] \Rightarrow \gamma(X).L_Z\left(L_A\gamma(B).\gamma(X)^{-1}\right) =< R(Z,A).Z,B > .$$

Remarque. Les deux points du **(c)** impliquent dans ce cas que g vérifie la propriété **(P)** introduite page 160.

III.3.3 Le cas où la représentation de H dans $\check{\mathbf{X}}_{\tilde{m}}^\perp$ est irréductible (et non triviale de dimension 1) et celle dans $\mathbf{X}_m$, triviale

C'est le cas le plus simple. Les seuls feuilletages stricts de $\mathcal{M}$, stables par holonomie, sont $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}^\perp = \mathcal{Y}^s$ et il existe un vecteur X non nul de $\mathbf{X}$, globalement parallèle.

Dans une telle situation, la première propriété recherchée de la part d'un système de coordonnées «adaptées» est qu'il respecte les feuilletages canoniques $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}^\perp$, *i.e.* qu'il soit de la forme $(x, (y_i)_{i=1}^{d'}, z)$ où :

- la coordonnée x paramètre les feuilles de $\mathcal{X}$,
- les coordonnées $(x, (y_i)_{i=1}^{d'})$ paramètrent celles de $\mathcal{X}^\perp$.

Dans la base de vecteurs-coordonnées associée à un tel système, la métrique est alors de la forme :

$$g = g' + 2\gamma\,\mathrm{d}z$$

où γ est une 1-forme quelconque et où g' n'a pas de terme facteur de $\mathrm{d}x$ ou de $\mathrm{d}z$. Matriciellement :

$$\mathrm{Mat}_{(X,(Y_i)_{i=1}^{d'},Z)}(g) = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0\ldots 0 & * \\ \hline 0 & & * \\ \vdots & g' & \vdots \\ 0 & & * \\ \hline * & *\ldots * & * \end{array}\right)$$

La forme la plus simple à laquelle on puisse souhaiter ramener γ est alors : $\gamma = \mathrm{d}x$. En effet Z est nécessairement non orthogonal à X, on souhaite donc $< Z,X >= 1$; cela invite à rechercher Z isotrope et tel que : $\forall i \in [\![1,d']\!]$, $< Z,Y_i >= 0$. Si un tel système de coordonnées existe :

$$\mathrm{Mat}_{(X,(Y_i)_{i=1}^{d'},Z)}(g) = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0\ldots 0 & 1 \\ \hline 0 & & 0 \\ \vdots & g' & \vdots \\ 0 & & 0 \\ \hline 1 & 0\ldots 0 & 0 \end{array}\right)$$

avec $g' = g'((y_i)_{i=1}^{d'},z)$ (la dépendance en z est alors effective, sinon la distribution $\mathrm{vect}(z)$ serait parallèle, ce qui est supposé ne pas être le cas). Or, un tel souhait est *réalisable.* C'est précisément l'existence d'un tel système qu'affirme le théorème.

Théorème 1 (Cas où la représentation de $\boldsymbol{H}$ dans $\check{\mathbf{X}}_{\check{m}}^{\perp}$ est irréductible et où celle de $\boldsymbol{H}$ dans $\mathbf{X}_m$, triviale.) *Dans la situation présentée en III.1 :*

(a) *Il existe, au voisinage de m, un système de coordonnées $(x,y,z) = (x,(y_i)_{i=1}^{d'_s},z)$ de classe C^{∞}, centré en m et :*

(I) *adapté aux feuilletages $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}^{\perp}$, (*cf. *def. 4 p. 160)*

(II) *où g s'écrit alors $g = g' + 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ avec :*

- *en tout point, $g' = \sum_{i,j=1}^{d'} g'_{i,j}\,\mathrm{d}y_i\,\mathrm{d}y_j$, $(g'_{i,j})_{i,j=1}^{d'} \in \mathrm{M}_{d'}(\mathbb{R})$;*
- *en m, $(g'_{i,j})_{i,j=1}^{d'} = (\varepsilon_i\delta_{i,j})_{i,j=1}^{d'}$ où $\varepsilon_i = \pm 1$.*

(b) *Si deux tels systèmes de coordonnées coïncident sur leur sous-variété $\mathcal{S}_0 = \{p \in \mathcal{X}_m^{\perp} \;/\; x(p) = 0\}$ et ont leurs vecteurs-coordonnées associés X égaux en m, alors ils coïncident sur l'intersection de leurs domaines de définition.*

C'est donc en particulier le cas s'ils coïncident sur $\mathcal{X}_m^{\perp}$.

(c) *Alors, de plus, la matrice $(g'_{i,j})_{i,j=1}^{d'}$ ne dépend pas de x.*

Remarque : Nécessairement, un tel système de coordonnées possède de plus la propriété remarquable suivante :

$$\text{en tout point, } D_Z Z = 0.$$

Il existe donc une démonstration de ce cas particulier, beaucoup plus simple que celle de l'énoncé général. Il suffit :

(i) de construire les coordonnées et le vecteur Z le long de $\mathcal{X}_m^{\perp}$, c'est-à-dire :

- ∗ de choisir des coordonnées, issues d'une base pseudo-orthonormée, quelconques, de $\check{\mathcal{X}}_{\check{m}}^{\perp}$,
- ∗ de choisir une section passant par m quelconque de $\mathcal{X}_m^{\perp} \to \check{\mathcal{X}}_{\check{m}}^{\perp}$ et de relever sur elle les coordonnées du point précédent,
- ∗ de choisir un vecteur X non nul de $\mathbf{X}_m$ et de le propager par transport parallèle le long de $\mathcal{X}_m^{\perp}$; le flot de X propage alors les coordonnées du point précédent à la feuille $\mathcal{X}_m^{\perp}$ entière,
- ∗ de définir le long de $\mathcal{X}_m^{\perp}$ le vecteur Z par : $< Z,X >= 1$, $\forall i \in [\![1,d']\!]$, $< Z,Y_i >= 0$ et $< Z,Z >= 0$;

(ii) de propager ces coordonnées par le flot géodésique issu de Z, c'est-à-dire :

- ∗ de propager le champ Z à un voisinage de m par le flot géodésique ($D_Z Z = 0$),
- ∗ enfin, de propager les coordonnées $(x,(y_i)_{i=1}^{d'})$ de $\mathcal{X}_m^{\perp}$ par le flot de Z.

On vérifie alors — ce n'est pas totalement immédiat! — que le flot Φ_z de Z au temps z envoie, pour tout p, $\mathcal{X}_p$ sur $\mathcal{X}_{\Phi_z(p)}$, $\mathcal{X}_m^{\perp}$ sur $\mathcal{X}_{\Phi_z(m)}^{\perp}$ et qu'en tout point,$< Z,X >= 0$ et $\forall i \in [\![1,d']\!]$, $< Z,Y_i >= 0$. C'est le résultat cherché.

III.3.4 Un éclairage des motivations de l'énoncé général

L'entreprise qu'on s'était ici proposée est donc un succès et les systèmes obtenus, vérifiant $D_Z Z = 0$, sont relativement canoniques : leur valeur sur $\mathcal{X}_m^\perp$ les détermine.

Ceci invite à tenter de bâtir des systèmes de coordonnées selon la même philosophie, dans des cas plus généraux. On est alors contraint de compliquer γ. Le choix, *arbitraire*, qui a été effectué ici, est de chercher en priorité à :

- conserver la propriété : $< Z,Z >= 0$, *i.e.* $\gamma(Z) = 0$,
- conserver «autant que possible» la propriété : $< Z,Y >= 0$, *i.e.* $\gamma(Y) = 0$, où on désigne ici par Y les vecteurs-coordonnées distincts de X et Z.

D'autre part, on veut imposer assez de contrainte pour que le système de coordonnées soit dans tous les cas déterminé par sa valeur le long de $\mathcal{X}_m^\perp$.

<u>*Si $N = 0$, $d'_0 = 0$, $N' = 1$ mais que la re*présentation de H dans $\mathbf{X}_m$ n'est pas triviale.</u>
On parvient dans ce cas à un système $(x, ((y_i^s)_{i=1}^{d'_s})_{s=1}^{N'}, z)$ où :

- $\gamma(Z) = 0$
- *le long de* $\mathcal{X}_m^\perp$ et *le long de* $x^{-1}(0)$: $\forall i \in [\![1,d']\!], \gamma(Y_i) = 0$.

Remarque : pour tout z, l'holonomie *de la feuille* $\mathcal{X}_{m_z}^\perp$ agit trivialement sur $\mathbf{X}_{m_z}$; on peut donc propager le vecteur X au point m_z, par transport parallèle, sur la feuille $\mathcal{X}_{m_z}^\perp$. Ce champ n'est *pas* le champ de vecteur-coordonnée X. En effet, avec les choix effectués, $D_{Y_i} X \neq 0$ en général — sauf le long des hypersurfaces $\mathcal{X}_m^\perp$ et $x^{-1}(0)$. Il existe d'autres systèmes de coordonnées, vérifiant cette fois les contraintes :

- $\gamma(X) = 1$
- $\forall i \in [\![1,d']\!], \gamma(Y_i) = 0$.
- *le long de* $\mathcal{X}_m^\perp$ *et de* $x^{-1}(0)$: $\gamma(Z) = 0$.

Dans de tels systèmes, le vecteur-coordonnée X est parallèle le long de chaque feuille $\mathcal{X}_{m_z}^\perp$. En revanche, on n'a plus, comme avec les choix précédents : $D_Z X = 0$.

Une fois construites les coordonnées $(x,(y_i)_{i=1}^{d'})$ sur $\mathcal{X}_m^\perp$, les deux types de propagation sont en fait très proches. Ils fournissent des systèmes qui coïncident le long de $x^{-1}(0)$; en effet dans les deux cas, le long de cette hypersurface, $D_Z Z = 0$. Seule la propagation des coordonnées dans la direction du feuilletage $\mathcal{X}$ diffère ensuite. Il est également à noter que, dans les deux cas, $g' = (g(Y_i,Y_j))_{i,j=1}^{d'}$ ne dépend pas de la coordonnée x. Comme les deux systèmes coïncident le long de $x^{-1}(0)$, leur fonction $g'((y_i)_{i=1}^{d'},z)$ est *la même.*

Par conséquent : Une fois imposée la contrainte :

$$\text{le long de } x^{-1}(0),\ \gamma(Z) = 0 \text{ et } \gamma(X) = 1,$$

aucun des deux types de choix :

$$[\gamma(Z) = 0 \text{ et } \gamma(X) \text{ variable}] \text{ ou } [\gamma(X) = 1 \text{ et } \gamma(Z)\text{variable}],$$

n'est plus naturel que l'autre. Seules sont vraiment naturelles, *après le choix arbitraire* de la surface $x^{-1}(0) \cap \mathcal{X}_m^\perp$ (*i.e.* d'une section de $\mathcal{X}_m^\perp \to \check{\mathcal{X}}_{\check{m}}^\perp$) :

- la surface $x^{-1}(0)$ et les coordonnées $((y_i)_{i=1}^{d'},z)$ sur elle,
- la fonction $g'((y_i)_{i=1}^{d'},z)$.

Dans les deux cas, le long de $x^{-1}(0)$, $D_Z Z = 0$ et $\forall i, \gamma(Z) = \gamma(Y_i) = 0$ (*i.e.* g n'a pas de terme en $\mathrm{d}z^2$ et en $\mathrm{d}y_i\,\mathrm{d}z$).

C'est arbitrairement qu'on a ici choisi de privilégier, hors de $x^{-1}(0)$, la contrainte : $< Z,Z >= 0$. Ce choix n'est peut-être pas le meilleur mais dans le cas, ici abordé, où $\dim \mathbf{X} = 1$, il prête peu à conséquence et est difficile à évaluer. Le point **(c)** du théorème (dépendance de γ par rapport à la courbure) semble seulement plus simple avec le choix «$< Z,Z >= 0$». Dans le cas général sur $\dim \mathbf{X}$, un choix de même nature serait à effectuer. C'est sans doute alors en dimension $\dim \mathbf{X} > 1$ qu'un des deux choix se révélera, peut-être, plus naturel et significatif que l'autre.

Retenons qu'en tout état de cause, c'est la contrainte sur les coordonnées *le long de* $x^{-1}(0)$, c'est-à-dire le long d'une section de $\mathcal{M} \to \check{\mathcal{M}}$, qui force leur unicité à condition initiale donnée sur $\mathcal{X}_m^{\perp}$.

*Si $N = 0$, $d'_0 = 0$ et si la re*présentation de H dans $\mathbf{X}_m$ est triviale mais que $N' > 1$.
On parvient dans ce cas (voir proposition 5 page 167) à un système $(x, ((y_i^s)_{i=1}^{d'_s})_{s=1}^{N'}, z)$ où :

- $\gamma(Z) = 0$
- pour tout s, *le long de* $\cup_z \mathcal{Y}_{m_z}^s$: $\forall i \in [\![1,d'_s]\!], \gamma(Y_i^s) = 0$.

Autrement dit, le long de chaque $\cup_z \mathcal{Y}_{m_z}^s$, la métrique à la même forme que dans le cas $N = 1$:

$$\forall s \in [\![1,N']\!], \forall z, \forall p \in \mathcal{Y}_{m_z}^s, \mathrm{Mat}_{(X,(Y_i^s)_{i=1}^{d'_s},Z)}(g_{|p}) = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0\dots0 & 1 \\ \hline 0 & & 0 \\ \vdots & g'^s & \vdots \\ 0 & & 0 \\ \hline 1 & 0\dots0 & 0 \end{array}\right).$$

Puisqu'une telle contrainte est réalisable, elle semble la manière la plus naturelle de compliquer γ. D'après le théorème, elle est alors suffisante pour fixer partout la valeur de γ.

Remarque : mise en évidence d'un invariant? On peut construire facilement des variétés dont l'holonomie vérifie **(P2)** et dont l'action sur $\check{\mathbf{X}}_m^{\perp}$ ne stabilise aucun sous-espace totalement isotrope non inclus dans $\ker \mathfrak{h}$ (i.e. avec les notation ambiantes : $N = 0$). Il suffit de munir un ouvert de $\mathbb{R}^d$ d'une métrique qui, dans les coordonnées naturelles, notées $(x,(y^s)_{s=1}^{N'},z)$ prend la forme :

$$\mathrm{Mat}(g)_{(X,(Y^s)_{s=1}^{N'},Z)} = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & g'^1 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ \hline 0 & 0 & \ddots & 0 & \mathbf{0} \\ \hline 0 & 0 & 0 & g'^{N'} & \mathbf{0} \\ \hline 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 \end{array}\right),$$

où les g'^s sont fonction de (y^s,z). Ceci revient, localement, à construire la variété $\mathcal{M}$ comme une fibration riemannienne :

$$\begin{array}{c} \prod_{s=1}^{N'}(\mathcal{M}^s, g'^s(z)) \\ \downarrow \\ \mathcal{B} \end{array}$$

où la base $\mathcal{B}$ est la sous variété issue de m et paramétrée par (x,z) et où les variétés $(\mathcal{M}^s,g'^s(z))$ sont isométriques aux $(\check{\mathcal{Y}}^s_{\check{m}_z},\check{g}_{|\check{\mathcal{Y}}^s_{\check{m}_z}})$. $\mathcal{B}$ est une variété de signature (1,1), et les variétés $\mathcal{M}^s$ sont de métrique variable, cette variation dépendant uniquement de la coordonnée z de la base.

Néammoins, d'après le théorème, toutes les variétés ne sont pas localement de ce type. Pour obtenir tous les types locaux de telles variétés, il faut remplacer les zéros en gras par des coefficients variables, les dérivées de $(\gamma-\mathrm{d}x)$. Ces coefficients sont liés, si les coordonnées sont du type donné par le théorème, aux $< R(Y^s_i,Z)Y^{s'}_j,Z >$. **La 1-forme $(\gamma - \mathrm{d}x)$ exprime donc le «défaut» de $\mathcal{M}$ à être une fibration riemannienne comme décrit plus haut**. Ceci reste vrai dans le cas général du théorème 1. Notons cependant que $(\gamma-\mathrm{d}x)$ est une intégrale seconde selon la coordonnée z du défaut introduit ci-dessus ; elle dépend aussi de choix arbitraires d'ordre zéro et un effectués sur $\mathcal{X}^{\perp}_m$.

Si $N=0$, $d'_0=0$, que la représentation de H dans $\mathbf{X}_m$ est quelconque et que $N'>1$.
Ce cas est l'addition des deux précédents. Pour chaque s, les propriétés :

- $\gamma(X)=1$,
- $\forall i \in [\![1,d'_s]\!], \gamma(Y^s_i)=0$,

ne sont conservées que le long de $\left(\cup_z \mathcal{Y}^s_{m_z}\right) \cup x^{-1}(0) = \cup_z \mathcal{S}^s_z$. Encore d'après le théorème, cette contrainte suffit à déterminer γ.

Le cas général.
Les commentaires ici seront plus brefs. Les choix effectués concernant les dérivées de γ dans la directions des feuilletages $\mathcal{U}^{r,k}$ et $\mathcal{V}^{r,k}$ proviennent des propriétés, relativement naturelles, des mêmes dérivées de la forme $\rho_{Z,Z,m,\mathfrak{R},\mathfrak{S}}$ donnée par le lemme 4 page 141. Ces propriétés de $\rho_{Z,Z,m,\mathfrak{R},\mathfrak{S}}$ le long des feuilles de $\mathcal{U}^{r,k}$ et $\mathcal{V}^{r,k}$ sont notablement différentes de celles sur les feuilles des $\mathcal{Y}^s$. En conséquence, pour tout r, sur $\cup_z \mathcal{W}^r_{m_z}$, la décomposition en une propagation des coordonnées :

- naturelle le long de l'hypersurface $x^{-1}(0)$,
- plus arbitraire le long des feuilles de $\mathcal{X}$,

n'a plus lieu d'être. Proposons cependant deux remarques.

Remarque. La technique de construction des coordonnées dans le cas particulier «la représentation de H dans $\check{\mathbf{X}}^{\perp}_{\check{m}}$ est irréductible et celle de H dans $\mathbf{X}_m$ est triviale» repose sur la propagation géodésique du champ Z : $D_Z Z = 0$ (voir page 169). Par le même moyen, dans le cas où on suppose seulement la représentation de H dans $\mathbf{X}_m$ triviale, on obtient facilement des coordonnées du même type, *i.e.* où la métrique est de la forme :

$$g = g' + 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z.$$

où g' n'a pas de terme facteur de $\mathrm{d}x$ ou de $\mathrm{d}z$. Dans le cas vraiment général (action quelconque de H sur $\mathbf{X}_m$), cette propriété peut être maintenue le long de $x^{-1}(0)$.

Cependant, ces coordonnées semblent présenter peu d'intérêt car elles ne préservent pas (du tout!) les feuilletages $\mathcal{U}^{r,k}$, $\mathcal{V}^{r,k}$ et $\mathcal{Y}^s$.

Remarque. Comme rappelé ci-dessus, dans le cas particulier où la représentation de H dans $\check{\mathbf{X}}^{\perp}_{\check{m}}$ est irréductible et celle de H dans $\mathbf{X}_m$ est triviale, les coordonnées se construisent par propagation géodésique de Z. Il s'agit donc de l'intégration d'une équation différentielle ordinaire d'ordre deux **dans $\mathcal{M}$** : $D_Z Z = 0$. *Grosso modo*, dans les divers cas, plus généraux, où N est toujours supposé nul et l'action de H sur $\mathbf{X}_m$ triviale, les coordonnées peuvent également se construire par intégration d'un système différentiel d'ordre deux dans $\mathcal{M}$. Il suffit en un sens d'altérer la propagation géodésique.

Cependant, la démonstration du cas général (voir celle-ci) utilise un système différentiel, d'ordre deux, à variable dans l'ensemble des paramétrages des feuilles de $\mathcal{X}^\perp$. La variété support est donc de dimension infinie. Ceci engendre quelques complications, mais indique aussi que quelque chose de nouveau apparaît avec les fibrés $\mathcal{U}^{r,k}$ et $\mathcal{V}^{r,k}$ et avec l'action non triviale de H sur $\mathbf{X}_m$. La valeur de $D_Z Z$ en un point p de $\mathcal{X}^\perp_{m_z}$ dépend alors effectivement de la valeur des coordonnées le long de toute cette même feuille, et pas seulement de leur 1-jet ou 2-jet en p. Voir notamment à ce sujet la construction de β^r dans la démonstration du lemme 4, page 147. La forme β^r sert directement à définir $\rho_{Z,Z,m,\mathfrak{R},\mathfrak{S}}$. Une forme du type de $\rho_{Z,Z,m,\mathfrak{R},\mathfrak{S}}$ est ensuite utilisée, dans la démonstration du théorème, pour construire γ : elle est une intégrale de γ. Or, cette forme β^r est définie le long d'une feuille $\mathcal{U}^r_m$ par son 1-jet en m et par une équation différentielle dépendant d'éléments de la courbure de $\mathcal{M}$ le long de $\mathcal{U}^r_m$.

III.3.5 Le cas où la représentation de H dans $\check{\mathbf{X}}^\perp_{\check{m}}$ est triviale

Disons quelques mots de ce cas, essentiellement pour remarquer que, contrairement à l'apparence, il n'est pas traité foncièrement différemment du cas III.3.3 où cette représentation est irréductible. Ici donc, $\mathcal{Y}^0 = \mathcal{X}^\perp$ et dans les coordonnées $(x,(y_i)_{i=1}^{d'},z)$ du théorème, la métrique g est de la forme :

$$g = \sum_{i=1}^{d'} \varepsilon_i (\,\mathrm{d}y_i)^2 + 2\gamma\,\mathrm{d}z, \qquad \varepsilon_i = \pm 1$$

où $\gamma(Z) = 0$. Les lignes de champ de Z ne sont pas géodésiques, contrairement au cas III.3.3 (voir page 169). La matrice $g' = g(Y_i,Y_j)_{i,j=1}^{d'}$ est constante et toute l'information est contenue dans γ.

On aurait pu interpréter $\check{\mathbf{X}}^\perp_{\check{m}}$ comme somme directe de d' composantes simples sous l'action de H, car triviales de dimension 1 : $\check{\mathbf{X}}^\perp_{\check{m}} = \oplus_{s=1}^{d'} \check{\mathbf{Y}}^s_{\check{m}}$, puis appliquer le théorème avec $N' = d'$ et $d'_0 = 0$. On remarque cependant alors facilement que les coordonnées obtenues sont les mêmes que par application du théorème avec $N' = 0$, $d'_0 = d'$.

III.4 Le cas lorentzien est donc totalement traité

Convention : une variété lorentzienne de dimension n est ici de signature $\boldsymbol{(n-1,1)}$.

Il s'agit ici d'une remarque simple : toutes les variétés lorentziennes admettent un système privilégié de coordonnées locales.

Soit en effet $\mathcal{M}$ une variété lorentzienne, localement irréductible, indécomposable, ne vérifiant pas nécessairement les propriétés **(P1)** et **(P2)**. On choisit m un point de $\mathcal{M}$, et on note comme toujours $\mathbf{X}_m$ l'intersection des sous-espaces totalement isotropes H-stables maximaux de $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$. La variété $\mathcal{M}$ est lorentzienne, $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$ n'admet donc pas de sous-espace totalement isotrope de dimension ≥ 2 et donc :

- soit $\mathbf{X}_m = \{0\}$, *i.e.* l'intersection des sous-espaces totalement isotropes H-stables maximaux de $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$ est nulle ;

• soit $\dim \mathbf{X}_m = 1$ (donc $\mathcal{M}$ vérifie **(P2)**) et sous les notations du théorème, $N = 0$ et les g'^s, $s \in [\![1,N']\!]$ sont définies positives ($\mathcal{M}$ vérifie alors **(P1)**, devenue vide car $N = 0$).

Le premier cas est constitué des variétés lorentziennes de dimension 2. En effet, $\mathcal{M}$ est réductible, indécomposable, donc $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$ admet au moins un sous-espace totalement isotrope stable non trivial. Mais $\mathbf{X} = \{0\}$, $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$ en admet donc plusieurs ; prenons-en deux distincts $\mathbf{I}_m$ et $\mathbf{J}_m$. Comme $\mathcal{M}$ est lorentzienne, ils sont nécessairement de dimension un, et $\mathbf{I}_m \oplus \mathbf{J}_m$ est nécessairement non dégénéré. Mais $\mathcal{M}$ est indécomposable et donc $\mathbf{I}_m \oplus \mathbf{J}_m$, stable non dégénéré, est égal à $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$; ainsi $\dim \mathcal{M} = 2$. Réciproquement, si $\dim \mathcal{M} = 2$, $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$ se décompose canoniquement en somme de ses deux droites isotropes : $\mathrm{T}_m\mathcal{M} = \mathbf{I}_m \oplus \mathbf{J}_m$ et chacune est nécessairement H-stable : H préserve la métrique et est connexe (H est l'holonomie *locale*) donc est inclus dans $\mathrm{SO}(\mathrm{T}_m\mathcal{M},g)$. Par conséquent, $\mathbf{X}_m = \mathbf{I}_m \cap \mathbf{J}_m = \{0\}$.

Dans ce cas, $\mathcal{M}$ admet des coordonnées (x,z) dans lesquelles la métrique g est de la forme $g = 2\gamma \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z$. $\mathcal{M}$ est plate *ssi* $H = \{0\}$ *ssi* γ est de la forme $\gamma_1(x)\gamma_2(z)$; alors il existe des coordonnées pour lesquelles γ est constant. $\mathcal{M}$ n'est pas plate *ssi* $H = \mathrm{SO}(\mathrm{T}_m\mathcal{M},g)$.

Le deuxième cas est donc constitué des autres variétés lorentziennes. Elles vérifient **(P1)** et **(P2)**, donc admettent des coordonnées locales données par le théorème.

III.5 Démonstrations

III.5.1 Démonstration du théorème

1) Construction de coordonnées sur $\mathcal{X}_m^\perp$.

Dans la feuille $\mathcal{X}_m^\perp$, on se donne une section $\sigma_\mathcal{U}^r$ de chaque fibré $\mathcal{U}_m^r \to \mathcal{U}_m^r/\mathcal{X}$, une section $\sigma_\mathcal{V}^r$ de chaque fibré $\mathcal{V}_m^r \to \mathcal{V}_m^r/\mathcal{X}$ et une section $\sigma_\mathcal{Y}^s$ de chaque fibré $\mathcal{Y}_m^s \to \mathcal{Y}_m^s/\mathcal{X}$, les sections $\sigma_\mathcal{U}^r$, $\sigma_\mathcal{V}^r$ ($r \in [\![1,N]\!]$) et $\sigma_\mathcal{Y}^0$ des fibrés plats respectifs $\mathcal{U}_m^r$, $\mathcal{V}_m^r$ et $\mathcal{Y}_m^0$ étant choisies affines. On a également choisi, dans les rappels qui précèdent le théorème, une suite de Jordan-Hölder $\{0\} = \check{\mathbf{U}}_{\check{m}}^{r,0} \subset \check{\mathbf{U}}_{\check{m}}^{r,1} \subset \check{\mathbf{U}}_{\check{m}}^{r,2} \subset \ldots \subset \check{\mathbf{U}}_{\check{m}}^{r,n_r} = \check{\mathbf{U}}_{\check{m}}^r$ du H-module $\check{\mathbf{U}}_{\check{m}}^r$, pour chaque r de $[\![1,N]\!]$. Une suite de Jordan-Hölder $(\check{\mathbf{V}}_{\check{m}}^{r,k})_{k=n_r}^0 = ((\check{\mathbf{U}}_{\check{m}}^{r,k})^\perp \cap \check{\mathbf{V}}_{\check{m}}^r)_{k=n_r}^0$ du H-module $\check{\mathbf{V}}_{\check{m}}^r$ lui est associée. Le sous-lemme 10 page 138 fournit alors un système de coordonnées locales $(x, ((u_i^r)_{i=1}^{d_r}, (v_i^r)_{i=1}^{d_r})_{r=1}^N, ((y_i^s)_{i=1}^{d'_s})_{s_m=0}^{N'})$ au voisinage de m dans $\mathcal{X}_m^\perp$, centré en m, paramétrant les feuilletages de $\mathfrak{F}$ et vérifiant quelques autres propriétés. De façon immédiate, on constate que ce système vérifie, en restriction à $\mathcal{X}_m^\perp$, les propriétés des systèmes de coordonnées dont le théorème annonce l'existence. Il est en outre, comme $\mathcal{M}$ de classe C^∞. Reste donc à construire la coordonnée z et à prolonger les coordonnées $(x, ((u_i^r)_{i=1}^{d_r}, (v_i^r)_{i=1}^{d_r})_{r=1}^N, ((y_i^s)_{i=1}^{d'_s})_{s=0}^{N'})$ à un voisinage de m dans $\mathcal{M}$. Cela revient à construire au voisinage de m le champ de vecteur-coordonnée Z.

Remarque. On verra dans la suite que tous les choix arbitraires ont été effectués dans cette étape **1)** : le reste de la construction des coordonnées est déterminé par une équation différentielle et ne dépend d'aucun autre choix.

On vient de choisir (voir le sous-lemme 10 page 138) une base de Jordan $(\check{U}_i^r)_{i=1}^{d_r}$ de chaque $\check{\mathbf{U}}_{\check{m}}^r$, (la base de Jordan $(\check{V}_i^r)_{i=1}^{d_r}$ de chaque $\check{\mathbf{V}}_{\check{m}}^r$ est choisie duale), une base pseudo-orthonormée $(\check{Y}_i^0)_{i=1}^{d'_0}$ de $\check{\mathbf{Y}}^0$, des sections $\mathrm{d}\sigma_\mathcal{U}^r$ de $\mathrm{d}\pi_{|\mathbf{U}_m^r}$, $\mathrm{d}\sigma_\mathcal{V}^r$ de $\mathrm{d}\pi_{|\mathbf{V}_m^r}$ et $\mathrm{d}\sigma_\mathcal{Y}^0$ de $\mathrm{d}\pi_{|\mathbf{Y}_m^0}$; des coordonnées $(\check{y}_i^s)_{i=1}^{d'_s}$ de chaque $\check{\mathcal{Y}}_{\check{m}}^s$ et une section $\sigma_\mathcal{Y}^s$ de chaque $\pi_{|\mathcal{Y}_m^s}$, pour $s > 1$; enfin

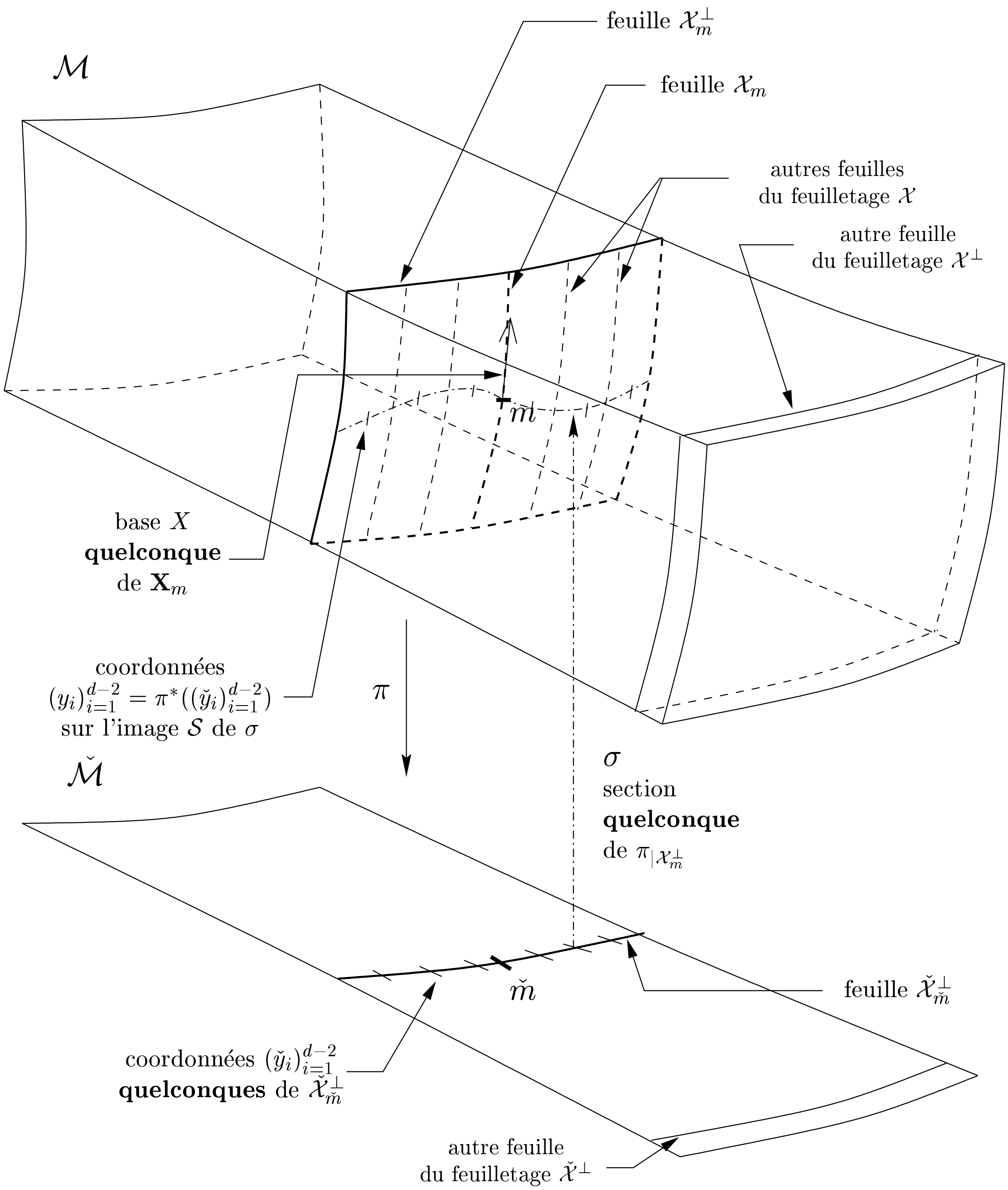


FIGURE 2 – *Construction des coordonnées : choix des «conditions initiales»*

une base X de $\mathbf{X}_m$.

La figure 2 page 175 illustre, dans le cas $\mathbf{X}_m^{\perp}/\mathbf{X}_m$ irréductible i.e. $N = 0$, $N' = 1$, $d'_0 = 0$, ces choix arbitraires : les coordonnées $(\check{y}_i)_{i=1}^{d-2}$, la section $\sigma_{\mathcal{Y}}^1$ de $\pi_{|\mathcal{X}_m^{\perp}}$ notée σ, le vecteur X. Elle permet une comparaison avec la construction des coordonnées de Walker illustrée page 134.

2) Construction du vecteur-coordonnée Z le long de $\mathcal{X}_m^\perp$.

Définissons déjà Z le long de $\mathcal{X}_m^\perp$ par :

– $Z \in [\ (+_{r,i}U_i^r) + (+_{r,i}V_i^r) + (+_{s,i}Y_i^s)\ ]^\perp$ (cet espace est un 2-plan de signature (1,1)),

– Z est isotrope et $< Z,X >= 1$.

Ces conditions définissent un champ de vecteurs C^∞, parallèle le long des feuilles de $\mathbf{X}$: si A est un vecteur-coordonnée de $\mathcal{X}_m^\perp$, $< D_X Z,A >= L_X < Z,A > - < Z,D_X A >= L_X < Z,A >= 0$ et : $< D_X Z,Z >= \frac{1}{2} L_X < Z,Z >= 0$. Par conséquent : $D_X Z = 0$. Il vérifie également, si A et B sont deux vecteurs-coordonnées tangents respectivement à deux feuilletages $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de $\mathfrak{F}$ avec $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$ ou $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{Y}^0$: $D_A Z \perp B$. En effet : $< D_A Z,B >= L_A < Z,B > - < Z,D_A B >= L_A 0 = 0$.

3) Prolongement des coordonnées à un voisinage de m dans $\mathcal{M}$: plan du raisonnement.

Considération préliminaire.

Un système local de coordonnées $(x, ((u_i^r)_{i=1}^{d_r},(v_i^r)_{i=1}^{d_r})_{r=1}^N, ((y_i^s)_{i=1}^{d'_s})_{s=0}^{N'}, z)$, respectant les feuilletages de $\mathfrak{F}$, définit, pour chaque z pour lequel il est défini :

• un point m_z de coordonnées $(0,\dots,0,z)$,

• un N'-uplet $(\sigma_{\mathcal{Y}}^s)_{s=1}^{N'}$ de sections locales des fibrés $(\mathcal{Y}_{m_z}^s \to \check{\mathcal{Y}}_{\check{m}_z}^s)_{s=1}^{N'}$, dont les images sont les hypersurfaces $\{p \in \mathcal{Y}_{m_z}^s \ / \ x(p) = 0\}$ de $\mathcal{Y}_{m_z}^s$. Localement, les $(\sigma_{\mathcal{Y}}^s)_{s=1}^{N'}$ sont définies par :

$$\forall s \in [\![1,N']\!], \sigma_{\mathcal{Y}}^s(\check{\mathcal{Y}}_{\check{m}_z}^s) = \{p \in \mathcal{Y}_{m_z}^s \ / \ x(p) = 0\}.$$

Pour chaque z, on notera $\boldsymbol{\mathfrak{S}_z} = (\sigma_{\mathcal{Y}}^s)_{s=1}^{N'}$ cette famille de sections.

• une famille $(((\overline{\mathbf{U}}_{m_z}^{r,k})_{k=1}^{n_r})_{r=1}^N,((\overline{\mathbf{V}}_{m_z}^{r,k})_{k=1}^{n_r})_{r=1}^N)$ de relevés des drapeaux $(\mathbf{U}_{m_z}^{r,k})_{k=0}^{n_r}$ et $(\mathbf{V}_{m_z}^{r,k})_{k=n_r}^0$, $r \in [\![1,N]\!]$. On pose en effet, dans chaque $\mathrm{T}_{m_z}\mathcal{M}$:

$$\forall r \in [\![1,N]\!], \forall k \in [\![1,n_r]\!], \overline{\mathbf{U}}_{m_z}^{r,k} = \mathrm{vect}((U_i^r)_{i=d_r^{k-1}+1}^{d_r^k}) \text{ et } \overline{\mathbf{V}}_{m_z}^{r,k} = \mathrm{vect}((V_i^r)_{i=d_r^{k-1}+1}^{d_r^k}).$$

Pour chaque z, on notera $\boldsymbol{\mathfrak{R}_z}$ cette famille de sous-espaces de $\mathrm{T}_{m_z}\mathcal{M}$.

On va à présent :

• Prouver l'existence et l'unicité locales au voisinage de m d'un système de coordonnées $(x, ((u_i^r)_{i=1}^{d_r},(v_i^r)_{i=1}^{d_r})_{r=1}^N, ((y_i^s)_{i=1}^{d'_s})_{s=0}^{N'}, z)$ satisfaisant les deux propriétés :

(F) ∗ Il respecte les feuilletages $((\mathcal{U}^{r,k})_{k=1}^{n_r})_{r=1}^N$, $((\mathcal{V}^{r,k})_{k=1}^{n_r})_{r=1}^N$ et $(\mathcal{Y}^s)_{r=0}^{N'}$ de $\mathfrak{F}$, *i.e.* il vérifie le point **(a)**, **(I)** du théorème ;

∗ les coordonnées sont égales sur $\mathcal{X}_m^\perp$ à un système du type construit en **1)**, avec $z = 0$.

(Z) Le champ de vecteur-coordonnée Z satisfait

∗ le système différentiel **(E)** :

$$\begin{cases} D_Z Z \equiv \rho^\sharp_{Z,Z,m_z,\mathfrak{R}_z,\mathfrak{S}_z}\ [\mathbf{X}] \\ < D_Z Z,Z >= 0 \end{cases} \qquad \textbf{(E)}$$

∗ avec pour condition initiale le long de $\mathcal{X}_m^\perp$ le champ Z construit en **2)**.

On rappelle que $\rho_{Z,Z,m_z,\mathfrak{R}_z,\mathfrak{S}_z}$ est la forme sur $\mathcal{X}^{\perp}_{m_z}$ définie de manière unique par le corollaire 1 page 154 et que $\rho^{\sharp}_{Z,Z,m_z,\mathfrak{R}_z,\mathfrak{S}_z}$ est le champ de vecteurs tel que : $\forall Y \in \mathrm{T}\mathcal{X}^{\perp}_{m_z}$, $\rho_{Z,Z,m_z,\mathfrak{R}_z,\mathfrak{S}_z}(Y)$ $= < \rho^{\sharp}_{Z,Z,m_z,\mathfrak{R}_z,\mathfrak{S}_z}, Y >$. Il est défini modulo $(\mathbf{X}^{\perp})^{\perp} = \mathbf{X}$, *i.e.* défini dans $\mathrm{T}\mathcal{M}/\mathbf{X}$.

- Vérifier qu'un système de coordonnées de $\mathcal{M}$ au voisinage de m satisfait les propriétés énumérées dans le **(a)** du théorème *ssi* il satisfait les propriétés **(F)** et **(Z)** du point précédent. Ceci prouvera le **(a)** et le **(b)** du théorème.
- Vérifier alors le point **(c)**.

(Voir page 180 la figure 3 qui illustre le principe de construction de façon très simplifiée.)

Une reformulation du problème.

Donnons un sens rigoureux au système différentiel **(E)** introduit ci-dessus. Soit R un entier supérieur ou égal à 2. La suite prouvera alors l'existence d'un système de coordonnées de classe C^{R-1} vérifiant les propriétés du théorème. Le raisonnement peut être effectué pour tout R ; l'unicité de la solution des équations différentielles ordinaires de condition initiale fixée donne alors l'égalité des systèmes de coordonnées construits pour les différentes valeurs de R. Le système construit est donc de classe C^{∞}. Construisons donc un système de coordonnées de classe C^{R-1}.

Soit $\mathcal{C} = (c_z)_{z\in\mathbb{R}}$ une courbe transverse au feuilletage $\mathcal{X}^{\perp}$, passant par m en $z = 0$. Pour tout $\delta > 0$, introduisons l'espace

$$\mathcal{F}_\delta = \bigcup_{z\in\mathbb{R}} \{f \in \mathrm{C}^{R-1}(\overline{B}_\delta, \mathcal{X}^{\perp}_{c_z}) \ / \ f(0) = c_z\}$$

où $\overline{B}_\delta$ est la boule fermée de rayon δ de $\mathbb{R}^{d-1}$ (on rappelle que $d = \dim \mathcal{M}$), muni d'une norme $|| \ ||$ quelconque choisie une fois pour toutes (les normes sont toutes équivalentes sur $\mathbb{R}^{d-1}$, de dimension finie). Quitte à remplacer «$z \in \mathbb{R}$» par «$z \in]-\varepsilon,\varepsilon[$» avec $\varepsilon > 0$ assez petit, $\mathcal{F}_\delta$ est une variété banachique. En effet, soit φ une carte locale de fibré de $\mathcal{M}$, vue comme fibré en $\mathcal{X}^{\perp}$. L'application φ est une carte C^R d'un voisinage ouvert $\mathcal{O}$ de m dans un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^d$ qui envoie les feuilles de $\mathcal{X}^{\perp}$ sur les hyperplans $\mathbb{R}^{d-1} \times \{x_d\}$ de $\mathbb{R}^d$. Notons p_1 et p_2 les projections respectives sur chaque facteur de $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$. On peut en outre choisir l'application φ telle que : $p_1 \circ \varphi \circ c = 0$ et $p_2 \circ \varphi \circ c = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. Alors, l'application

$$\widetilde{\varphi} \ : \ f \to (p_1 \circ \varphi \circ f, p_2 \circ \varphi \circ f)$$

est une carte locale de $\mathcal{F}_\delta$, donnant à $\mathcal{F}_\delta$ la structure de variété :

$$\mathcal{F}_\delta \overset{\widetilde{\varphi}}{\simeq} \underbrace{\{f \in \mathrm{C}^{R-1}(\overline{B}_\delta, \mathbb{R}^{d-1}) \ / \ f(0) = 0\}}_{\substack{\text{espace de Banach pour la norme sup } || \ ||_{\mathrm{C}^{R-1}} \text{ induite par } || \ || \text{ sur le compact } \overline{B}_\delta \ : \\ ||f||_{\mathrm{C}^{R-1}} = \sup_{k=0}^{R-1} || \mathrm{d}^k f ||_\infty .}} \times \mathbb{R}$$

Les éléments de $\mathcal{F}_\delta$ qui sont des *paramétrages* de leur image (dans une des feuilles de $\mathcal{X}^{\perp}$), forment un ouvert $\mathcal{G}_\delta$ de $\mathcal{F}_\delta$.

Soit en effet $f \in \mathcal{F}_\delta$; on notera $\hat{f} = p_1 \circ \varphi \circ f$ et $z(f)$ la valeur, constante, de $p_2 \circ \varphi \circ f$. L'application f est alors un paramétrage de son image dans $\mathcal{X}^{\perp}_{c_{z(f)}}$ *ssi* $\hat{f}$ est injective et de différentielle $\mathrm{d}\hat{f}$ de rang maximal, *i.e.* bijective, en tout point de $\overline{B}_\delta$. Supposons f dans ce cas. Notons D l'ensemble des applications dégénérées de $L(\mathbb{R}^{d-1})$ et $\varepsilon_1 = \inf_{p \in \overline{B}_\delta} \mathrm{dist}((\,\mathrm{d}\hat{f})_{|p},D)$ où dist désigne ici la distance induite par la norme $|| \ ||$ sur $L(\mathbb{R}^{d-1})$. Comme $\overline{B}_\delta$ est compacte et $\mathrm{dist}((\,\mathrm{d}\hat{f})_{|p},D)$ toujours non nulle, $\varepsilon_1 > 0$.

Soit par ailleurs $\Delta_\delta = \{(p,p) \in \overline{B}_\delta^2\}$; introduisons $\varepsilon_2 = \inf_{(p,q) \in \overline{B}_\delta^2 \setminus \Delta_\delta} \frac{||\hat{f}(p)-\hat{f}(q)||}{||p-q||}$; montrons que $\varepsilon_2 > 0$. La fonction $\hat{f}$ est inversible et $\hat{f}(\overline{B}_\delta)$ est compact donc $\varepsilon_3 = \sup_{p \in \hat{f}(\overline{B}_\delta)} ||\mathrm{d}\hat{f}^{-1}_{|p}|| \in \mathbb{R}^+$. D'autre part si $u \in \mathbb{R}^{d-1}$, en tout point de $\overline{B}_\delta$:

$$||u|| = ||\mathrm{d}\hat{f}^{-1}.\mathrm{d}\hat{f}.u|| \leq ||\mathrm{d}\hat{f}^{-1}||.||\mathrm{d}\hat{f}.u|| \ \text{ donc } \ ||\mathrm{d}\hat{f}.u|| \geq \frac{1}{||\mathrm{d}\hat{f}^{-1}||}||u|| \geq \frac{1}{\varepsilon_3}||u||.$$

Soit alors $(p,q) \in \overline{B}_\delta^2$ et $p_0 = \frac{p+q}{2}$.

$$\begin{aligned}
\hat{f}(p) - \hat{f}(q) &= \hat{f}(p) - \hat{f}(p_0) - (\hat{f}(q) - \hat{f}(p_0)) \\
&= \mathrm{d}\hat{f}(p_0).(p-p_0) + o(p-p_0) - (\,\mathrm{d}\hat{f}(p_0).(q-p_0) + o(q-p_0)) \\
&= \mathrm{d}\hat{f}(p_0).(p-q) + o(p-p_0) + o(q-p_0) \\
&= \mathrm{d}\hat{f}(p_0).(p-q) + o(p-q) \quad \text{car } p_0 = \frac{p+q}{2}.
\end{aligned}$$

et donc, si $(p,q) \in \overline{B}_\delta^2 \setminus \Delta_\delta$:

$$\begin{aligned}
\frac{||\hat{f}(p) - \hat{f}(q)||}{||p-q||} &= \frac{||\,\mathrm{d}\hat{f}(p_0).(p-q) + o(p-q)||}{||p-q||} \\
&\geq \frac{||\,\mathrm{d}\hat{f}(p_0).(p-q)||}{||p-q||} - \frac{||o(p-q)||}{||p-q||} \\
&\geq \frac{1}{\varepsilon_3} - ||o(1)||
\end{aligned}$$

où le terme $||o(1)||$ tend vers zéro quand $||p-q||$ tend vers zéro, c'est-à-dire au voisinage de la diagonale Δ_δ de $\overline{B}_\delta^2$. Par compacité Δ_δ, on trouve alors un ouvert U_δ de $\overline{B}_\delta^2$, contenant Δ_δ et tel que :

$$\forall (p,q) \in U_\delta \setminus \Delta_\delta, \frac{||\hat{f}(p) - \hat{f}(q)||}{||p-q||} \geq \frac{1}{2\varepsilon_3} > 0.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_2 &= \inf_{(p,q) \in \overline{B}_\delta^2 \setminus \Delta_\delta} \frac{||\hat{f}(p) - \hat{f}(q)||}{||p-q||} \\
&= \min \left(\underbrace{\inf_{(p,q) \in \overline{B}_\delta^2 \setminus U_\delta} \frac{||\hat{f}(p) - \hat{f}(q)||}{||p-q||}}_{>0 \text{ par compacité de } \overline{B}_\delta^2 \setminus U_\delta}, \underbrace{\inf_{(p,q) \in U_\delta \setminus \Delta_\delta} \frac{||\hat{f}(p) - \hat{f}(q)||}{||p-q||}}_{>0 \text{ comme vu ci-dessus.}} \right) \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Soit alors $g \in \mathcal{F}_\delta$ t.q. $||\hat{f} - \hat{g}||_{\mathrm{C}^{R-1}} < \min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$. Rappel : $||\hat{f}||_{\mathrm{C}^{R-1}} = \sup_{k=0}^{R-1} ||\,\mathrm{d}^k\hat{f}||_\infty$ où

«∞» désigne le *sup* sur le compact $\overline{B}_\delta$. La différentielle $\mathrm{d}\hat{g}$ de $\hat{g}$ est partout de rang maximal, en effet :

$$\begin{aligned}\inf_{p\in\overline{B}_\delta}\mathrm{dist}((\mathrm{d}\hat{g})_{|p},D) &\geq \inf_{p\in\overline{B}_\delta}\mathrm{dist}((\mathrm{d}\hat{f})_{|p},D) - \sup_{p\in\overline{B}_\delta}\mathrm{dist}((\mathrm{d}\hat{f})_{|p},(\mathrm{d}\hat{g})_{|p})\\ &\geq \inf_{p\in\overline{B}_\delta}\mathrm{dist}((\mathrm{d}\hat{f})_{|p},D) - ||\hat{f}-\hat{g}||_{\mathrm{C}^1}\\ &\geq \inf_{p\in\overline{B}_\delta}\mathrm{dist}((\mathrm{d}\hat{f})_{|p},D) - ||\hat{f}-\hat{g}||_{\mathrm{C}^{R-1}}\\ &> \varepsilon_1 - \min(\varepsilon_1,\frac{\varepsilon_2}{2}) \geq 0.\end{aligned}$$

L'application $\hat{g}$ est injective ; soient en effet p et q dans $\overline{B}_\delta \setminus \Delta_\delta$:

$$\begin{aligned}||\hat{g}(p)-\hat{g}(q)|| &\geq ||\hat{f}(p)-\hat{f}(q)|| - ||(\hat{f}-\hat{g})(p)-(\hat{f}-\hat{g})(q)||\\ &\geq \varepsilon_2||p-q|| - ||\hat{g}-\hat{f}||_{\mathrm{C}^1}||p-q||\\ &\geq \underbrace{(\varepsilon_2 - ||\hat{g}-\hat{f}||_{\mathrm{C}^{R-1}})}_{>0}||p-q||\\ &> 0\end{aligned}$$

Donc g est un paramétrage de son image dans $\mathcal{X}^{\perp}_{c_{z(g)}}$ et $\mathcal{G}_\delta$ est ouvert dans $\mathcal{F}_\delta$.

Dernière remarque : si $(x,((u_i^r)_{i=1}^{d_r},(v_i^r)_{i=1}^{d_r})_{r=1}^{N},((y_i^s)_{i=0}^{d'_s})_{s=1}^{N'},z)$ est un système de coordonnées comme on le recherche, alors la courbe $(m_z)_{z\in]-\varepsilon,\varepsilon[} = (0,\ldots,0,z)_{z\in]-\varepsilon,\varepsilon[}$ est une portion de géodésique. En effet le long de $(m_z)_{z\in]-\varepsilon,\varepsilon[}$:

- $D_Z Z \equiv \rho^{\sharp}_{Z,Z,m_z,\mathfrak{R}_z,\mathfrak{S}_z} \equiv 0$ [**X**] car $(\rho_{Z,Z,m_z,\mathfrak{R}_z,\mathfrak{S}_z})_{|m_z} = 0$ et $< D_Z Z,Z >= 0$, donc : $D_Z Z = 0$,
- par sa définition, Z est tangent à la courbe $(m_z)_{z\in]-\varepsilon,\varepsilon[}$.

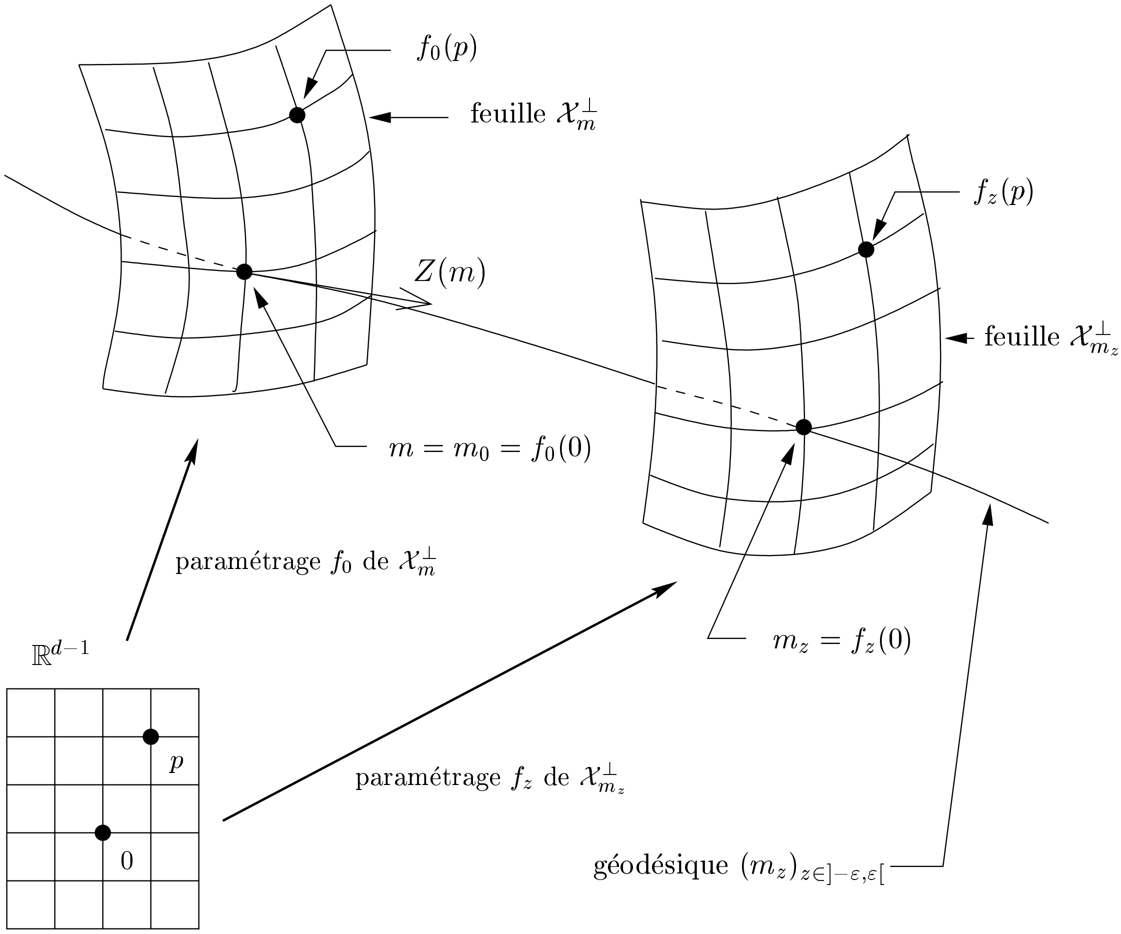
On prend alors pour courbe $(c_z)_{z\in]-\varepsilon,\varepsilon[}$ la géodésique notée $(m_z)_{z\in]-\varepsilon,\varepsilon[}$ issue de $(m,Z(m))$, où $Z(m)$ est le vecteur construit en **2)** (c'est une géodésique nulle). Si $(f_t)_t$ est une courbe dans $\mathcal{G}_\delta$, son vecteur dérivé $(\mathrm{d}f_t/\mathrm{d}t)_{|t=t_0}$ s'identifie à un champ de vecteurs $Z(f)_{|t_0}$ de $\mathrm{T}\mathcal{M}$ le long de $\mathcal{X}^{\perp}_{f_{t_0}(0)}$. La dérivée seconde $(D\mathrm{d}f/\mathrm{d}t^2)_{|t=t_0}$, — dépendante de la connexion D de $\mathcal{M}$ —, s'identifie au champ $\left(D_{(Z(f))_t}(Z(f))_t\right)_{|t_0}$ de $\mathrm{T}\mathcal{M}$ le long de $\mathcal{X}^{\perp}_{f_{t_0}(0)}$.

Si $f\in\mathcal{G}_\delta$, la réciproque de f est un système de coordonnées locales au voisinage de $f(0)$ dans $\mathcal{X}^{\perp}_{f(0)}$; on associe donc à f une famille $\mathfrak{R}(f)$ de relevés des drapeaux $(\mathbf{U}^{r,k}_{m_z})_{k=0}^{n_r}$ et $(\mathbf{V}^{r,k}_{m_z})_{k=n_r}^{0}$ et une famille $\mathfrak{S}(f)$ de sections locales des fibrés $\mathcal{Y}^s_{c_z}\to\check{\mathcal{Y}}^s_{\check{c}_z}$ (voir la *considération préliminaire* page 176). Trouver un système de coordonnées comme décrit au début dans cette *considération préliminaire* équivaut alors à trouver une courbe $(f_t)_t$ de classe C^R dans l'ouvert $\mathcal{G}_\delta$ du Banach $\mathcal{F}_\delta$, vérifiant l'équation différentielle ordinaire d'ordre deux :

$$\left\{\begin{array}{l}\left(D_{(Z(f))_t}(Z(f))_t\right)_{|t} = \rho^{\sharp}_{(Z(f))_t,(Z(f))_t,f_t(0),\mathfrak{R}(f_t),\mathfrak{S}(f_t)}\ [\mathbf{X}]\\ < D_{(Z(f))_t}(Z(f))_t,(Z(f))_t >= 0\end{array}\right. \qquad (\mathbf{E})$$

avec la condition initiale en $t=0$:

$$\left\{\begin{array}{l}f_0 \text{ est le paramétrage de } \mathcal{X}^{\perp}_m \text{ donné par le système de coordonnées construit en } \mathbf{1)},\\ (\mathrm{d}f_t/\mathrm{d}t)_{|t=0} = (Z(f))_0 \text{ est le champ } Z \text{ construit en } \mathbf{2)} \text{ le long de } \mathcal{X}^{\perp}_m.\end{array}\right.$$



$\boxed{\text{«}D^2 f_z/\partial z^2 = \psi(f_z, Df_z/\partial z)\text{»}}$

FIGURE 3 – *Les coordonnées construites sur $\mathcal{X}_m^\perp$ sont propagées par une équation différentielle à un voisinage de m.*

Remarque. Le fait que la courbe $(f_t)_t$ soit de classe C^R garantit que cette courbe est bien définie comme courbe *dans* $\mathcal{G}_\delta$. En effet, le champ Z identifié à la dérivée $\mathrm{d}f_t/\,\mathrm{d}t$ de $(f_t)_t$ est alors de classe C^R et assure par théorème de sensibilité aux conditions initiales que pour tout t, f_t est un paramétrage C^{R-1} de $\mathcal{X}_{f_t(0)}^\perp$. Notamment, une équation différentielle d'ordre deux $D\mathrm{d}f_t/\,\mathrm{d}t^2 = \psi(f_t, \mathrm{d}f_t/\,\mathrm{d}t)$ n'est bien définie dans $\mathcal{G}_\delta$ que si ψ est C^{R-2} au moins. Dans le cas contraire, il faudrait s'assurer par d'autres moyens que ψ définit bien une dérivée seconde *dans* $\mathcal{G}_\delta$.

Les deux étapes de la résolution du système différentiel **(E)**.

Techniquement, il est plus simple de procéder en deux temps pour résoudre **(E)**. Soit $(f_t)_t$ une solution de **(E)**. Une remarque déjà : la carte de fibré φ de $\mathcal{M}$ permet d'indexer les feuilles de $\mathcal{X}^\perp$ par leur coordonnée $p_2 \circ \varphi$; on notera $\mathcal{X}_z^\perp = \mathcal{X}_{m_z}^\perp$; la fonction $p_2 \circ \varphi$ constitue la coordonnée z recherchée ; f_z paramètre la feuille $\mathcal{X}_z^\perp$, la coordonnée z est égale au paramètre t de la famille $(f_t)_t$. On montre alors que, si $(f_t)_t$ est solution de **(E)**, la famille de relevés $\mathfrak{R}(f_z)$ est nécessairement égale à un certaine famille de relevés $\mathfrak{R}_z$ des drapeaux $(\mathbf{U}^{r,k}_{m_z})_{k=0}^{n_r}$ et $(\mathbf{V}^{r,k}_{m_z})_{k=n_r}^{0}$. La famille de sections $\mathfrak{S}(f_z)$ est également nécessairement égale à un certaine famille de sections $\mathfrak{S}_z$ des fibrés $\mathcal{Y}^s_{m_z} \to \check{\mathcal{Y}}^s_{\bar{m}_z}$. On peut déterminer ces familles $(\mathfrak{R}_z)_z$ et $(\mathfrak{S}_z)_z$ sans résoudre **(E)**. On va donc successivement :

- montrer l'affirmation ci-dessus et déterminer $(\mathfrak{R}_z)_z$ et $(\mathfrak{S}_z)_z$,
- résoudre **(E')** :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(D_{(Z(f))_t}(Z(f))_t\right)_{|t} = \rho^{\sharp}_{(Z(f))_t,(Z(f))_t,m_t,\mathfrak{R}_t,\mathfrak{S}_t}\ [\mathbf{X}] \\ < D_{(Z(f))_t}(Z(f))_t,(Z(f))_t >= 0 \end{array} \right. \qquad \textbf{(E')}$$

avec, bien sûr, la même condition initiale que pour **(E)**. Enfin on prouvera que la solution de **(E')** vérifie **(E)**.

4) La première étape : réduction de (E) à (E').

On suppose donc $(f_z)_z$ solution de **(E)** et on note $(x,((u_i^r)_{i=1}^{d_r},(v_i^r)_{i=1}^{d_r})_{r=1}^N,((y_i^s)_{i=0}^{d'_s})_{s=1}^{N'},z)$ le système de coordonnées défini par $(f_z)_z$. Pour alléger les notations, on notera désormais Z le champ $Z(f)_t$.

<u>*Détermination de $(\mathfrak{R}_z)_z$.*</u>

Soit U_i^r un vecteur-coordonnée appartenant à $\mathbf{U}^{r,k} \setminus \mathbf{U}^{r,k-1}$ pour un r de $[\![1,N]\!]$ et un k de $[\![1,n_r]\!]$ (*i.e.* $d^r_{k-1} < i \leq d^k_r$, *i.e.* $U_i^r \in \overline{\mathbf{U}}^{r,k}$, *cf.* page 176). Alors, le long de la géodésique $(m_z)_z$:

- si V_j^r est un vecteur-coordonnée appartenant à $\mathbf{V}^{r,k} = \mathbf{V}^r \cap \mathbf{U}^{r,k\perp}$ (*i.e.* $j > d_r^k$), alors :

$$\begin{aligned} < D_Z D_Z U_i^r,V_j^r > &=< R(U_i^r,Z).Z,V_i^r > + < D_{U_i^r} D_Z Z,V_j^r > \\ &=< R(U_i^r,Z).Z,V_i^r > +(D_{U_i^r}\rho_{Z,Z,m_z,\mathfrak{R}(f_z),\mathfrak{S}(f_z)})(V_j^r) \\ &=< R(U_i^r,Z).Z,V_i^r > - < R(U_i^r,Z).Z,V_i^r > \qquad \text{car } \mathbf{U}^{r,k} \perp \mathbf{V}^{r,k} \\ &= 0. \end{aligned}$$

- de la même façon, si Y est un vecteur coordonnée n'appartenant pas à $\mathbf{V}^r$:

$$< D_Z D_Z U_i^r,Y >= 0.$$

- si V_j^r est un vecteur-coordonnée de $\mathbf{V}^r$, n'appartenant pas à $\mathbf{V}^{r,k}$ (*i.e.* $j \leq d_r^k$), alors $V_j^r \in \overline{\mathbf{V}}^{r,l}$ pour un certain l de $[\![1,k]\!]$ et :

$$\begin{aligned} < D_Z D_Z U_i^r,V_j^r > &=< R(U_i^r,Z).Z,V_i^r > +(D_{U_i^r}\rho_{Z,Z,m_z,\mathfrak{R}(f_z),\mathfrak{S}(f_z)})(V_j^r) \\ &=< R(U_i^r,Z).Z,V_i^r > +0 \end{aligned}$$

car $U_i^r \in \overline{\mathbf{U}}^{r,k}$ et $V_j^r \in \overline{\mathbf{V}}^{r,l}$ avec $l \in [\![1,k]\!]$, et par définition de $\rho_{Z,Z,m_z,\mathfrak{R}(f_z),\mathfrak{S}(f_z)}$.

- le champ U_i^r commute avec Z et Z est un champ totalement isotrope donc :

$$\begin{aligned}
< D_Z D_Z U_i^r, Z > &= < D_Z D_{U_i^r} Z, Z > \\
&= L_Z < D_{U_i^r} Z, Z > - < D_{U_i^r} Z, \underbrace{D_Z Z}_{=0 \text{ car } (m_z)_z \text{ est une géodésique.}} > \\
&= \frac{1}{2} L_Z L_{U_i^r} < Z, Z > = 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, le long de $(m_z)_z$, le champ U_i^r vérifie le système diférentiel d'ordre deux :

$$\begin{cases}
\text{pour tout vect.-coordonnée } Y \notin \mathbf{V}^r, \ < D_Z D_Z U_i^r, Y > = 0 \\
\forall i > d_k^r, \ < D_Z D_Z U_i^r, V_j^r > = 0 \\
\forall i \leq d_k^r, \ < D_Z D_Z U_i^r, V_j^r > = < R(U_i^r, Z).Z, V_i^r > \\
< D_Z D_Z U_i^r, Z > = 0
\end{cases}$$

i.e., pour tout U_i^r de $\overline{\mathbf{U}}^{r,k}$:

$$\begin{cases}
D_Z D_Z U_i^r \equiv 0 \ [(\mathbf{U}^{r,k})^\perp] \\
D_Z D_Z U_i^r \equiv R(U_i^r, Z).Z \ [(\overset{k}{\underset{l=1}{\oplus}} \overline{\mathbf{V}}^{r,l})^\perp] \\
< D_Z D_Z U_i^r, Z > = 0
\end{cases} \qquad (\mathbf{E}_{\overline{\mathbf{U}}^{r,k}})$$

Symétriquement, un système semblable $(\mathbf{E}_{\overline{\mathbf{V}}^{r,k}})$ est vérifié par les V_i^r de $\overline{\mathbf{V}}^{r,k}$. Ce système $(\mathbf{E}_{\overline{\mathbf{U}}^{r,k}})$ est linéaire en U_i^r donc, dans la grassmannienne $G_{d_r^k - d_r^{k-1}}(\mathrm{T}_{m_z}\mathcal{M})$, il définit la dérivée seconde $D\mathrm{d}\overline{\mathbf{U}}^{r,k} / \mathrm{d}z^2$ de $\overline{\mathbf{U}}^{r,k}$, indépendamment de la base $(U_i^r)_{d^{k-1} < i \leq d_k^r}$. Le système complet $(((\mathbf{E}_{\overline{\mathbf{U}}^{r,k}}), (\mathbf{E}_{\overline{\mathbf{V}}^{r,k}}))_{k=1}^{n_r})_{r=1}^N$ est alors un système du type :

$$D\mathrm{d}\mathfrak{R}(f_z) / \mathrm{d}z^2 = \psi(\mathfrak{R}(f_z)),$$

avec ψ de classe C^{R-2} (le tenseur R est en effet de classe C^{R-2}). Enfin, $\mathfrak{R}(f_0)$ est déterminé par f_0 connu et $(\mathrm{d}\mathfrak{R}(f_z)/\mathrm{d}z)_{|z=0}$ est déterminé par le choix du champ Z le long de $\mathcal{X}_0^\perp$ effectué en **2)**. En effet en $m = m_0$, pour tout r, tout $i \in [\![1, d_r]\!]$, il découle des propriétés du champ Z défini en **2)** et de la nullité de $[Z, U_i^r]$ que : $D_Z U_i^r = 0$. Semblablement : $D_Z V_i^r = 0$. On note alors $\mathfrak{R}_z$ la solution, qui existe et est unique, du système $(((E_{\overline{\mathbf{U}}^{r,k}}), (E_{\overline{\mathbf{V}}^{r,k}}))_{k=1}^{n_r})_{r=1}^N$ avec ces conditions initiales.

<u>*Détermination de* $(\mathfrak{S}_z)_z$.</u>

Rappelons qu'on note $\mathcal{S}^s(f_z) = \{p \in \mathcal{Y}_{m_z}^s \ / \ x(p) = 0\} \ni m_z = f_z(0)$. Par définition des coordonnées induites par $(f_z)_z$, le long de de $\overline{\mathbf{U}}^{r,k}$le champ Z est tangent à cette surface. D'autre part, par hypothèse sur $(f_z)_z$:

$$\begin{cases}
D_Z Z \equiv \rho^\sharp_{Z,Z,f_z(0),\mathfrak{R}(f_z),\mathfrak{S}(f_z)} \ [\mathbf{X}] \\
< D_Z Z, Z > = 0
\end{cases}$$

Le long de $\overline{\mathbf{U}}^{r,k}$, ce système est équivalent à un autre qu'on notera $(\mathbf{E}^\mathbf{s})$. C'est ce dernier système qu'on résoudra. Montrons tout d'abord l'équivalence annoncée.

Nécessairement déjà, en tout point, $< Z, Z > = 0$. En effet, Z est isotrope par construction en tout point de $\mathcal{X}_m^\perp$ (*cf.* **2**)) et ensuite : $L_Z < Z,Z >= 2 < D_Z Z,Z >= 0$.

Soit $i \in [\![1,N']\!]$. Le long de $\cup_z \mathcal{S}^s(f_z)$: $< D_Z Z,Y_i^s >_{|z} = \rho_{Z,Z,f_z(0),\mathfrak{R}(f_z),\mathfrak{S}(f_z)}(Y_i^s) = 0$ car Y_i^s est tangent à $\mathcal{S}^s(f_z)$. Par conséquent :

$$L_Z < Z,Y_i^s >=< \underbrace{D_Z Z}_{=0 \text{ le lg. de } (m_z)_z} ,Y_i^s > + < Z,D_Z Y_i^s >=< Z,D_{Y_i^s} Z >= \frac{1}{2} L_{Y_i^s} < Z,Z >= 0$$

et donc pour tout z, $< Z,Y_i^s >_{|z} = 0$, car c'est le cas en $z = 0$. Ainsi, $\mathrm{T}\mathcal{S}^s(f_z) = \mathbf{Y}^s \cap Z^\perp$ et donc $(\mathrm{T}\mathcal{S}^s(f_z))^\perp = \mathbf{Y}^{s\perp} + \mathrm{vect}(Z)$.

D'autre part :

$$D_Z Z \equiv \rho^\sharp_{Z,Z,f_z(0),\mathfrak{R}(f_z),\mathfrak{S}(f_z)} \; [\mathbf{X}] \Leftrightarrow D_Z Z \equiv \rho^{s\sharp}_{Z,Z,f_z(0)} \; [\mathbf{Y}^s] \text{ et } D_Z Z \equiv 0 \; [(\mathrm{T}\mathcal{S}^s(f))^\perp]$$

où la forme $\rho^s_{Z,Z,f_z(0)}$ à variable dans le fibré $\mathbf{Y}^{s\perp}$, est définie le long de chaque $\mathcal{S}^s(f_z)$ par le corollaire 2 page 156, en fin de partie précédente. Donc, le long de $\cup_z \mathcal{S}^s(f_z)$, le système différentiel satisfait par $(f_z)_z$ est équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_Z Z \equiv \rho^{s\sharp}_{Z,Z,m_z} \; [\mathbf{Y}^s] \\ D_Z Z \equiv 0 \; [(\mathrm{T}\mathcal{S}^s(f_z))^\perp = \mathbf{Y}^{s\perp} + \mathrm{vect}(Z)] \\ < D_Z Z,Z >= 0 \end{array} \right. \qquad (\mathbf{E^s})$$

En notant $\overline{B}^s_\delta$ la boule fermée de rayon δ de $\mathbb{R}^{d'_s}$ pour une norme quelconque $|| \; ||$, une solution de ce système est une courbe $(f_z)_z$ dans $\mathcal{F}^s_\delta = \cup_z \{ f \in \mathrm{C}^{R-2}(\overline{B}^s_\delta, \mathcal{X}_z^\perp) \; / \; f(0) = m_z$ et $f(\overline{B}^s_\delta)$ est transverse au feuilletage $\mathcal{X}\}$ vérifiant une équation du type :

$$D \mathrm{d} f_z / \mathrm{d} z^2 = \psi(f_z, \mathrm{d} f_z / \mathrm{d} z)$$

avec ψ de classe C^{R-2}, comme $(Z \mapsto \rho^s_{Z,Z,m_z}$ (voir le corollaire 2 page 156). Mais $\psi(f_z, \mathrm{d} f_z/\mathrm{d} z)$ n'est définie que si f_z est à valeurs dans $\mathcal{Y}^s_{m_z}$, feuille le long de laquelle est définie ρ^s_{Z,Z,m_z}. Donc :

- s'il y a une solution, elle est unique une fois fixé $(f_0,(\mathrm{d} f_z/\mathrm{d} z)_{|z=0})$,
- reste à prouver l'existence d'une telle solution.

Il reste donc à prouver l'existence d'une famille $(\sigma^s_z)_z$ de sections des $\mathcal{Y}^s_{m_z} \to \check{\mathcal{Y}}^s_{\check{m}_z}$ dont le champ de vecteur dérivé vérifie $(\mathbf{E^s})$. Pour ce faire, on utilise une section auxiliaire C^R locale τ^s de $\mathcal{M} \to \mathcal{M}/\mathcal{Y}^s$ au voisinage de m telle que, si on note $[\mathcal{Y}^s_{m_z}]$ la classe de $\mathcal{Y}^s_{m_z}$ dans $\mathcal{M}/\mathcal{Y}^s$, $\tau^s([\mathcal{Y}^s_{m_z}]) = m_z$. On définit alors au voisinage de m un champ de vecteurs T^s de classe C^{R-2} dans $\mathrm{T}\mathcal{M}/\mathbf{Y}^s$ par :

le long de chaque $\mathcal{Y}^s_{\tau^s(p)}$ pour $p \in \mathcal{M}/\mathcal{Y}^s$, $T^s = \rho^{s\sharp}_{Z,Z,\tau^s(p)}$.

Si $(f_z)_z$ est une courbe dans $\mathcal{G}_\delta$, on note toujours Z son champ de vecteurs dérivé. Le système différentiel ordinaire

$$\left\{ \begin{array}{l} D_Z Z \equiv \lambda T^s \; [\mathbf{Y}^s] \quad \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \\ D_Z Z \equiv 0 \; [\mathrm{vect}(Z) + \mathbf{Y}^{s\perp}] \\ \mathrm{d} z(Z) = 1 \\ < D_Z Z,Z >= 0 \end{array} \right.$$

est du type $D \mathrm{d} f/\mathrm{d} t^2 = \psi^s(f_z,(\mathrm{d} f/\mathrm{d} z)_z)$ avec ψ^r de classe C^{R-2} par le corollaire 2 page

156. Il admet alors une et une seule solution $(f_z)_z$ dans $\mathcal{G}_\delta$ telle que f_0 est donnée par les coordonnées du **1)** et $Z_{|z=0}$ est le champ construit en **2)**. De plus alors :

(i) Comme $\mathrm{d}z(Z) = 1$, f_z paramètre (un ouvert de) la feuille $\mathcal{X}_z^\perp$.

(ii) Le facteur de proportionnalité λ vaut 1 pour tout z. Notons

(iii) Le flot de Z stabilise la distribution $\mathbf{Y}^s$.

(on le vérifie plus loin). Pour tout s de $[\![1,N']\!]$, le champ Z est de plus tangent à $\cup_z \mathcal{Y}^s_{m_z}$ le long de cette sous-variété donc, le long de $\cup_z \mathcal{Y}^s_{m_z}$:

$$\begin{cases} D_Z Z \equiv \rho^{s\sharp}_{Z,Z,m_z}\ [\mathbf{Y}^s] \quad \text{car } T^s = \rho^{s\sharp}_{Z,Z,m_z} \text{ sur } \cup_z \mathcal{Y}^s_{m_z}, \\ D_Z Z \equiv 0\ [\mathrm{vect}(Z) + \mathbf{Y}^{s\perp}] \\ < D_Z Z, Z >= 0. \end{cases}$$

En notant x la coordonnée définie au **1)** sur $\mathcal{X}_m^\perp$, puis propagée par le flot de Z sur $\cup_z \mathcal{Y}^s_{m_z}$, on définit pour tout z : $\mathcal{S}^s_z = \{p \in \mathcal{Y}^s_{m_z} \ / \ x(p) = 0\}$. (Si Φ_z est le flot de Z au temps z, $\mathcal{S}^s_z = \Phi_z(\mathcal{S}^s_0)$.)

Cette surface est alors l'image de la section locale recherchée σ^s_z de $\mathcal{Y}^s_{m_z} \to \check{\mathcal{Y}}^s_{m_z}$. En effet, le long de $\cup_z \mathcal{S}^s_z$, le champ Z est par définition tangent à cette surface, et par construction vérifie $(\mathbf{E}^s)$. On a donc construit $(\mathfrak{S}_z)_z = ((\sigma^s_z)^{N'}_{s=1})_z$.

Remarque : par unicité de la famille $(\mathfrak{S}_z)_z$, la construction effectuée ne dépend pas de la section τ^s de $\mathcal{M} \to \mathcal{M}/\mathcal{Y}^s$ choisie.

Restent à montrer les points **(ii)** et **(iii)** annoncés plus haut.

(ii) Le facteur de proportionnalité λ vaut 1 pour tout z. Notons $(X, ((U^r_i)^{d_r}_{i=1}, (V^r_i)^{d_r}_{i=1})^N_{r=1}, ((Y^s_i)^{d'_s}_{i=0})^{N'}_{s=1})$ les images par le flot de Z des vecteurs-cordonnées construits sur $\mathrm{T}\mathcal{X}_0^\perp$ et notons $\overline{\overline{X}}$ et $\overline{\overline{Y}}{}^s_i$ les vecteurs-coordonnées définis sur $\mathcal{X}_m^\perp$, prolongés par transport parallèle le long des lignes de champ de Z : $D_Z\overline{\overline{X}} = 0$, $D_Z\overline{\overline{Y}}{}^s_i = 0$. Comme $\mathbf{X}$ et les $\mathbf{Y}^r$ sont des distributions parallèles, en tout point : $\overline{\overline{X}} \in \mathbf{X}$ et : $\forall i \leq n_s, \overline{\overline{Y}}{}^s_i \in \mathbf{Y}^s$. Montrons que $\lambda \equiv 1$. Soit Y un vecteur coordonnée distinct des Y_i^s, quelconque (il en existe, par exemple $Y = X$). Pour tout z, par construction, le flot de $Z = \mathrm{d}f_z/\mathrm{d}z$ respecte le feuilletage $\mathcal{X}^\perp$ donc partout, $Y \in \mathbf{X}^\perp$. Ainsi :

$$\begin{aligned} 0 = L_Z < D_Z Y, \overline{\overline{X}} > &=< D_Z D_Z Y, \overline{\overline{X}} > +0 \\ &=< D_Z D_Y Z, \overline{\overline{X}} > \\ &=< R(Y,Z).Z, \overline{\overline{X}} > + < D_Y D_Z Z, \overline{\overline{X}} > \\ &=< R(Y,Z).Z, \overline{\overline{X}} > +\lambda(D_Y \rho^{s\sharp}_{Z,Z,\tau^s(p)})(\overline{\overline{X}}) \quad \text{pour un certain } p \\ &=< R(Y,Z).Z, \overline{\overline{X}} > +\lambda < R(Z,Y).Z, \overline{\overline{X}} > \quad \text{car } Y \text{ est distinct des } Y_i^s \\ &= 0 \end{aligned}$$

et donc $\lambda = 1$ (dès qu'il y a un Y tel que $< R(Y,Z).Z, \overline{\overline{X}} >\neq 0$. Sinon, alors $T^s = 0$ et on peut de toute façon considérer que $\lambda = 1$).

(iii) Le flot de Z stabilise la distribution $\mathbf{Y}^s$. *N.B. : On pourrait s'attendre ici à une vérification essentiellement formelle. Il s'agit en fait d'un point déterminant du raisonnement.* Montrons déjà l'

Affirmation préliminaire : $\forall i \leq d_s, D_{\overline{\overline{Y}}_i^r} Z \in \mathbf{Y}^s$.

Si A est un vecteur de $T_p\mathcal{M}$, on notera $[A]$ sa classe dans $T_p\mathcal{M}/\mathbf{Y}_p^r$. *Exceptionnellement jusqu'à la fin de ce* **4)** *et pour alléger l'écriture, on notera* $\overline{\overline{Y}}_0^s$ *le vecteur* $\overline{\overline{X}}$ *; ainsi* $(\overline{\overline{Y}}_i^s)_{i=0}^{d_s}$ *est une base de* $\mathbf{Y}^s$. Pour tout vecteur coordonnée Y distinct des $(Y_i^s)_{i=0}^{d_s}$:

$$\begin{aligned}
L_Z < D_{\overline{\overline{Y}}_i^s} Z, \overline{\overline{Y}} > &= < D_Z D_{\overline{\overline{Y}}_i^s} Z, \overline{\overline{Y}} > + < D_Z \overline{\overline{Y}}_i^s, \underbrace{D_Z \overline{\overline{Y}}}_{=0} > \\
&= R(\overline{\overline{Y}}_i^s, Z, Z, \overline{\overline{Y}}) + < D_{\overline{\overline{Y}}_i^s} D_Z Z, \overline{\overline{Y}} > - < D_{D_{\overline{\overline{Y}}_i^s} Z} Z, \overline{\overline{Y}} > \\
&= R(\overline{\overline{Y}}_i^s, Z, Z, \overline{\overline{Y}}) + < D_{\overline{\overline{Y}}_i^s} T^s, \overline{\overline{Y}} > - < D_{D_{\overline{\overline{Y}}_i^s} Z} Z, \overline{\overline{Y}} > \\
&= R(\overline{\overline{Y}}_i^s, Z, Z, \overline{\overline{Y}}) + (D_{\overline{\overline{Y}}_i^s} \rho^s_{Z,Z,\tau^s(p)})(\overline{\overline{Y}}) - < D_{D_{\overline{\overline{Y}}_i^s} Z} Z, \overline{\overline{Y}} > \\
&= R(\overline{\overline{Y}}_i^s, Z, Z, \overline{\overline{Y}}) + R(Z, \overline{\overline{Y}}_i^s, Z, \overline{\overline{Y}}) - < D_{D_{\overline{\overline{Y}}_i^s} Z} Z, \overline{\overline{Y}} > \\
&= - < D_{D_{\overline{\overline{Y}}_i^s} Z} Z, \overline{\overline{Y}} >
\end{aligned}$$

D'autre part, notons en tout point $\overline{\overline{\mathbf{Y}}}'^s$ l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $\overline{\overline{Y}}$ tels que sur $\mathcal{X}_0^\perp$, Y est un vecteur-coordonnée distinct des $(Y_i^s)_{i=0}^{d'_s}$. La projection canonique $\overline{\overline{\pi}}^s \ : \ \overline{\overline{\mathbf{Y}}}'^s \to \mathbf{X}^\perp/\mathbf{Y}^s$ est alors un isomorphisme. On écrire : $D_{\overline{\overline{Y}}_i^s} Z = \sum_{0 \leq k \leq d'_s} a_{i,k} \overline{\overline{Y}}_k^r + (\overline{\overline{\pi}}^s)^{-1}([D_{\overline{\overline{Y}}_i^s} Z])$ où les $a_{i,k}$ sont des coefficients qui dépendent de la métrique au point considéré et, linéairement, de $D_{\overline{\overline{Y}}_i^s} Z$. On peut alors écrire, dans $(\mathbf{X}^\perp/\mathbf{Y}^s)^{d'_s+1}$:

$$\begin{aligned}
L_Z \left([D_{\overline{\overline{Y}}_i^s} Z] \right)_{i=0}^{d'_s+1} &= - \left([D_{D_{\overline{\overline{Y}}_i^s} Z} Z] \right)_{i=0}^{d'_s+1} \\
&= - \left(\sum_k a_{k,i} [D_{\overline{\overline{Y}}_i^s} Z] \right)_{i=0}^{d'_s+1} - \left([D_{(\overline{\overline{\pi}}^s)^{-1}([D_{\overline{\overline{Y}}_i^s} Z]} Z] \right)_{i=0}^{d'_s+1} \quad ;
\end{aligned}$$

notamment, $([D_{\overline{\overline{Y}}_i^s} Z])_{i=0}^{d'_s+1}$ vérifie comme fonction de z une équation différentielle linéaire — à coefficients non constants. Or, par construction (*cf.* **2)**), sur $\mathcal{X}_0^\perp$, pour tout $i \in [\![0, d'_s]\!]$, $D_{Y_i^s} Z \in \mathbf{Y}^s$; *i.e.*, en $z = 0$, $([D_{\overline{\overline{Y}}_i^s} Z])_{i=0}^{d'_s}$ est le vecteur nul. Ainsi, pour tout z et tout $1 \leq i \leq d'_s$: $[D_{\overline{\overline{Y}}_i^s} Z] = 0$, c'est l'affirmation préliminaire.

On en déduit que le flot de Z stabilise la distribution $\mathbf{Y}^s$. Notons encore Y_i^s les images, par la différentielle $\mathrm{d}\Phi_z^s$ du flot de Z, des vecteurs Y_i^s définis sur $\mathcal{X}_m^\perp$. Il suffit de prouver que : $\forall 1 \leq i \leq d'_s, D_Z Y_i^s \in \mathbf{Y}^s$. Comme vu plus haut, Y_i^s est tangent aux feuilles de $\mathcal{X}^\perp$, pour tout z. De la même façon qu'au-dessus, on peut donc écrire : $Y_i^s = \sum_{0 \leq k \leq d'_s} b_{i,k} \overline{\overline{Y}}_k^s + (\overline{\overline{\pi}}^s)^{-1}([Y_i^s])$ D'où :

$$\begin{aligned}
D_Z[Y_i^s] &= [D_Z Y_i^s] \\
&= [D_{Y_i^s} Z] \quad \text{— par construction, } Z \text{ et } Y_i^s \text{ commutent —} \\
&= \sum_{0 \leq k \leq d'_s} b_{i,k} [D_{\overline{\overline{Y}}_k^s} Z] + (\overline{\overline{\pi}}^s)^{-1}([Y_i^s]).
\end{aligned}$$

Par le paragraphe précédent, pour tout k, $[D_{\overline{\overline{Y}}^s_k} Z] = 0$. Chaque $[Y_i^s]$ vérifie donc comme fonction de z une équation différentielle linéaire ; étant nul par définition sur $\mathcal{X}_m^\perp$, c'est-à-dire en $z = 0$, il est partout nul. C'est le résultat voulu : le flot de Z préserve la distribution $\mathbf{Y}^s$ et donc aussi le feuilletage $\mathcal{Y}^s$: $\Phi_z^s(\mathcal{Y}_m^s) = \mathcal{Y}_{m_z}^s$.

5) Deuxième étape : intégration de (E') et retour à (E).

Le système :

$$\left\{\begin{array}{ll} D_Z Z \equiv \lambda \rho^\sharp_{Z,Z,m_z,\mathfrak{R}_z,\mathfrak{S}_z} \ [\mathbf{X}] & \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \\ \mathrm{d}z(Z) = 1 & \\ < D_Z Z, Z >= 0 & \end{array}\right. ,$$

est du type

$$D \mathrm{d}f_z / \mathrm{d}z^2 = \psi(f_z, \mathrm{d}f_z / \mathrm{d}z),$$

avec ψ de classe C^{R-2} d'après le corollaire 1 page 154. Par la remarque de la page 180, ψ définit bien une dérivée seconde dans $\mathcal{G}_\delta$. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, ce système admet donc une seule solution $(f_z)_z$ avec la condition initiale $(f_0,(\mathrm{d}f_z/\mathrm{d}z)_{|0})$ fixée par les points **1)** et **2)**. De la *même façon* qu'au point **4)**, on vérifie qu'alors nécessairement λ est constant égal à 1, *i.e.* que $(f_z)_z$ est la solution, unique, de **(E')**. Reste à vérifier que $(f_z)_z$ satisfait **(E)**, *i.e.* que :

- pour tout z, la famille d'espaces $\mathfrak{R}_z$, définie au **4)**, et la famille $\mathfrak{R}(f_z)$ déduite, comme indiqué page au **3)** 176, des vecteurs-coordonnées $((U_i^r)_{i=1}^{d_r},(V_i^r)_{i=1}^{d_r})_{r=1}^N$ le long de $(m_z)_z$, coïncident,
- pour tout s de $[\![1,N']\!]$ et tout z, les sous-variétés $\mathcal{S}_z^s$, définies au **4)**, et $\mathcal{S}^s(f_z) = \{p \in \mathcal{Y}_{m_z}^s \ / \ x(p) = 0\}$ coïncident.

C'est une simple vérification. Pour le premier point, en notant pour tout r de $[\![1,N]\!]$, $((\hat{U}_i^r)_{i=1}^{d_r},(\hat{V}_i^r)_{i=1}^{d_r})$ la famille de vecteurs propagée le long de $(m_z)_z$ au point **4)**, on vérifie que : $((\hat{U}_i^r)_{i=1}^{d_r},(\hat{V}_i^r)_{i=1}^{d_r}) = ((U_i^r)_{i=1}^{d_r},(V_i^r)_{i=1}^{d_r})$. Les deux familles satisfont en effet le même système différentiel (avec les mêmes conditions initiales à l'ordre 2 en $z = 0$). Pour les $(\hat{U}_i^r)_{i=1}^{d_r^k}$ et les $(U_i^r)_{i=1}^{d_r^k}$, respectivement :

$$\left\{\begin{array}{l} D_Z D_Z \hat{U}_i^r \simeq 0 \ [(\mathbf{U}^{r,k})^\perp] \\ D_Z D_Z \hat{U}_i^r \simeq R(\hat{U}_i^r, Z).Z \ [(\overset{d_r^k}{\underset{j=1}{\oplus}} \hat{V}_j^r)^\perp] \\ < D_Z D_Z \hat{U}_i^r, Z >= 0 \end{array}\right. \qquad (\mathbf{E}_{\overline{\mathbf{U}}^{r,k}})$$

et :

$$\left\{\begin{array}{l} D_Z D_Z U_i^r \simeq 0 \ [(\mathbf{U}^{r,k})^\perp] \\ D_Z D_Z U_i^r \simeq R(U_i^r, Z).Z \ [(\overset{d_r^k}{\underset{j=1}{\oplus}} \hat{V}_j^r)^\perp] \\ < D_Z D_Z U_i^r, Z >= 0 \end{array}\right.$$

Pour le deuxième point, notons $(f_z^s)_z$ la courbe de $\mathcal{G}_\delta$ construite au point **4)** pour un s de $[\![1,N']\!]$, et $(g_z^s)_z$ la restriction de f_z^s à $(f_0^s)^{-1}(\mathcal{S}_m^s)$. Notons également $(g_z)_z$ la restriction de $(f_z)_z$ à $f_0^{-1}(\mathcal{S}_m^s)$. Alors $(g_z^s)_z$ vérifie le système differentiel :

$$\left\{\begin{array}{l} D_{Z^s}Z^s \equiv \rho^{s\sharp}_{Z^s,Z^s,m_z}\ [\mathbf{Y}^s] \\ D_{Z^s}Z^s \equiv 0\ [(\mathrm{T}\mathcal{S}^s(g^s_z))^\perp = \mathbf{Y}^{s\perp} + \mathrm{vect}(Z^s)] \\ < D_{Z^s}Z^s, Z^s >= 0 \end{array}\right. \qquad (\mathbf{E^s})$$

où le champ Z^s est le champ identifié à la dérivée $\mathrm{d}g^s/\,\mathrm{d}z$. Or ce système, on l'a vu, est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{l} D_Z Z \equiv \rho^\sharp_{Z,Z,f_z(0),\mathfrak{R}(f_z),\mathfrak{S}(f_z)}\ [\mathbf{X}] \\ < D_Z Z, Z >= 0 \end{array}\right.$$

vérifié par $(f_z)_z$, donc par $(g_z)_z$. Comme $(g^s_z)_z$ et $(g_z)_z$ satisfont les mêmes conditions initiales à l'ordre un en $z = 0$, $(g^s_z)_z = (g_z)_z$ et donc $\forall z, \mathcal{S}^s_z = \mathcal{S}^s(f_z)$.

6) Les coordonnées vérifient les propriétés voulues *ssi* elles sont induites par $(f_z)_z$ vérifiant (E).

Le sens $\Big[\ (f_z)_z$ induit les coordonnées voulues $\Big] \Rightarrow \Big[\ (f_z)_z$ vérifie $(\mathbf{E})\ \Big]$ est une vérification un peu longue mais facile. Prouvons l'autre sens. On note encore $(X, ((U^r_i)^{d_r}_{i=1}, (V^r_i)^{d_r}_{i=1})^N_{r=1}, ((Y^s_i)^{d'_s}_{i=0})^{N'}_{s=1}, Z)$ les vecteurs-coordonnées induits par $(f_z)_z$. Le champ Z est le champ dérivé $\mathrm{d}f_z/\,\mathrm{d}z$, les autres sont les images, par (la différentielle du) flot de Z, des champs de vecteurs-coordonnées construits sur $\mathrm{T}\mathcal{X}_0^\perp$ en **1)**. On note d'autre part $(\overline{\overline{X}}, ((\overline{\overline{U}}{}^r_i)^{d_r}_{i=1}, (\overline{\overline{V}}{}^r_i)^{d_r}_{i=1})^N_{r=1}, ((\overline{\overline{Y}}{}^s_i)^{d'_s}_{i=0})^{N'}_{s=1})$ les prolongements par transport parallèle le long des lignes de champ de Z de ces mêmes vecteurs coordonnées de $\mathrm{T}\mathcal{X}_0^\perp$. De la *même façon* qu'au point **4)**,

- on montre que : $\forall r \in [\![1,N]\!], \forall k \in [\![1,n_r]\!], \forall i \in [\![1,d^k_r]\!], D_{\overline{\overline{U}}{}^r_i} \in \mathbf{U}^{s,k}$ et $\forall i \in [\![d^k_r + 1,d_r]\!], D_{\overline{\overline{V}}{}^r_i} \in \mathbf{V}^{s,k}$ et que $\forall s \in [\![1,N']\!], \forall i \in [\![1,d'_s]\!], D_{\overline{\overline{Y}}{}^s_i} \in \mathbf{Y}^s$,
- on en déduit que le flot de Z stabilise les distributions $\mathbf{U}^{r,k}$, $\mathbf{V}^{r,k}$ et $\mathbf{Y}^s$ et donc que les coordonnées vérifient le point **(a)**, **(I)** du théorème ; la métrique est donc de la forme :

$$g = \left(\sum_{r=1}^{N} g^r_z\right) + \left(\sum_{s=0}^{N'} g'^s_z\right) + 2\gamma\,\mathrm{d}z,$$

les g^r et g'^s étant comme décrites page 160 et g vérifiant la propriété **(P)** introduite dans la proposition 3 page 160.

La deuxième relation du système **(E)** implique de plus que Z est en tout point isotrope. La métrique g n'a donc, dans la base des vecteurs-coordonnées, pas de terme en $\mathrm{d}z^2$ et le deuxième point du **(a)**, **(II)**, **(i)** : $\gamma(Z) = 0$, est satisfait. Le **(a)**, **(II)**, **(iii)**, les propriétés des g^r et la première propriété de γ du point **(a)**, **(II)**, **(ii)** découlent de la condition initiale sur $(f_0,(\,\mathrm{d}f/\,\mathrm{d}z)_{|z=0}))$ donnée aux points **1)** et **2)** de la démonstration. C'est immédiat pour γ, vérifions : $\forall r \in [\![1,N]\!], \forall p \in \mathcal{X}^\perp_m$, $(\partial g^r/\partial z)_{|p} = 0$ et : $\forall p \in \mathcal{U}^r_m \cup \mathcal{V}^r_m, g^r = 2\sum_{i=1}^{d_r} \mathrm{d}u^r_i\,\mathrm{d}v^r_i$.

Par construction, en tout point de $\mathcal{X}^\perp_m$: $\forall i,j \in [\![1,d_r]\!], D_{U^r_i}V^r_j = 0$ (voir le **(b)** du sous-lemme 10 page 138 et le **1)** de cette démonstration). Par conséquent, pour tous i,j de $[\![1,d_r]\!]$:

$$<D_Z U^r_i, V^r_j> = <D_{U^r_i} Z, V^r_j> = L_{U^r_i} <Z, V^r_j> - <Z, D_{U^r_i} V^r_j> = L_{U^r_i} 0 - <Z,0> = 0$$

et symétriquement $< D_Z V_j^r, U_i^r >= 0$. Enfin donc :

$$(\partial g^r/\partial z)(U_i^r, V_j^r) = L_Z < U_i^r, V_j^r >=< D_Z U_i^r, V_j^r > + < U_i^r, D_Z V_j^r >= 0.$$

D'autre part, en m, $g^r = 2\sum_{i=1}^{d_r} \mathrm{d}u_i^r \,\mathrm{d}v_i^r$ et le long de $\mathcal{U}_m$, par construction : $\forall i,j \in [\![1,d_r]\!], D_{U_i^r} U_j^r = 0$ (voir encore le **(b)** du sous-lemme 10 page 138). D'où :

$$L_{U_i^r} g_{j,k}^r = L_{U_i^r} < U_j^r, V_k^r >=< D_{U_i^r} U_j^r, V_k^r > + < U_j^r, D_{U_i^r} V_k^r >= 0$$

et la deuxième égalité cherchée.

Restent à montrer le premier point du **(a)**, **(II)**, **(i)** et les trois derniers points du **(a)**, **(II)**, **(ii)**.

Le premier point du **(a)**, **(II)**, **(i)**. La forme g'^0 est partout égale à $\sum_{i=1}^{d'_0} \varepsilon_i^0 (\,\mathrm{d}y_i^0)^2$. C'est vrai sur $\mathcal{X}_m^\perp$, par construction des coordonnées en **1)** sur cette feuille. Il suffit donc de montrer que les vecteurs-coordonnées $(Y_i^0)_{i=1}^{d'_0}$ sont parallèles le long des lignes de champ de Z. En effet alors :

$$\forall i,j \in [\![1,d'_0]\!], L_Z < Y_i^0, Y_j^0 >=< D_Z Y_i^0, Y_j^0 > + < Y_i^0, D_Z Y_j^0 >= 0,$$

ce qui donne le résultat voulu. Montrons donc : $\forall i \in [\![1,d'_0]\!], D_Z Y_i^0 = 0$. Cela revient à montrer que le champ $\overline{\overline{Y}}_i^0$ commute avec Z. En effet si $[\overline{\overline{Y}}_i^0, Z] = 0$ alors $\overline{\overline{Y}}_i^0 = Y_i^0$ et donc $D_Z Y_0^i = D_Z \overline{\overline{Y}}_i^0 = 0$. Or :

$$\begin{aligned}
D_Z D_{\overline{\overline{Y}}_i^0} Z &= R(\overline{\overline{Y}}_i^0, Z)Z + D_{\overline{\overline{Y}}_i^0} D_Z Z - D_{D_{\overline{\overline{Y}}_i^0} Z} Z \\
&= R(\overline{\overline{Y}}_i^0, Z)Z + D_{\overline{\overline{Y}}_i^0} \rho_z - D_{D_{\overline{\overline{Y}}_i^0} Z} Z \\
&= R(\overline{\overline{Y}}_i^0, Z)Z + R(Z, \overline{\overline{Y}}_i^0)Z - D_{D_{\overline{\overline{Y}}_i^0} Z} Z \\
&= -D_{D_{\overline{\overline{Y}}_i^0} Z} Z
\end{aligned}$$

Le vecteur $D_{\overline{\overline{Y}}_i^0} Z$ vérifie donc l'équation différentielle linéaire en l'inconnue A : $D_Z A = -D_A Z$. D'autre part, il est nul, par construction des coordonnées de $\mathcal{X}_m^\perp$, en $z = 0$. Il est donc partout nul, donc $D_{\overline{\overline{Y}}_i^0} Z = 0 = D_Z \overline{\overline{Y}}_i^0$ et $\overline{\overline{Y}}_i^0$ commute avec Z.

Les trois derniers points du **(a)**, **(II)**, **(ii)**. Remarquons que pour tout z, $\gamma = Z^\flat$. Les propriétés de $\gamma_{\mathrm{T}\mathcal{X}_m^\perp}$ découlent immédiatement de celles de f_0 et $(\mathrm{d}f_z/\,\mathrm{d}z)_{|z=0}$ déterminées en **1)** et **2)**. D'autre part, si Y et Y' sont deux vecteurs-coordonnées différents de Z, alors :

$$\begin{aligned}
L_Z\gamma(Y) &= L_Z < Z,Y > \\
&=< D_Z Z,Y > + < Z,D_Z Y > \\
&=< \rho^\sharp_{Z,Z,m_z,\mathfrak{R}(f_z),\mathfrak{S}(f_z)},Y > + < Z,D_Y Z > \\
&= \rho_{Z,Z,m_z,\mathfrak{R}(f_z),\mathfrak{S}(f_z)}(Y) + \frac{1}{2}L_Y < Z,Z > \\
&= \rho_{Z,Z,m_z,\mathfrak{R}(f_z),\mathfrak{S}(f_z)}(Y) + \frac{1}{2}L_Y 0 \\
&= \rho_{Z,Z,m_z,\mathfrak{R}(f_z),\mathfrak{S}(f_z)}(Y)
\end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned}
L_Z(\,\mathrm{d}\gamma(Y,Y')) &= L_Z L_Y \gamma(Y') - L_Z L_{Y'}\gamma(Y) \\
&= L_Y L_Z \gamma(Y') - L_{Y'} L_Z\gamma(Y) \\
&= L_Y[\rho_{Z,Z,m_z,\mathfrak{R}(f_z),\mathfrak{S}(f_z)}(Y')] - L_{Y'}[\rho_{Z,Z,m_z,\mathfrak{R}(f_z),\mathfrak{S}(f_z)}(Y)] \\
&= \,\mathrm{d}\rho_{Z,Z,m_z,\mathfrak{R}(f_z),\mathfrak{S}(f_z)}(Y,Y').
\end{aligned}$$

Alors :

* $\gamma_{|\mathrm{T}\mathcal{X}_m^\perp} = \,\mathrm{d}x_{|\mathrm{T}\mathcal{X}_m^\perp}$ d'après la construction de Z en **2)** le long de $\mathcal{X}_m^\perp$.
* Pour tout z, $\gamma_{|m_z} = \,\mathrm{d}x$. En effet, le long de $(m_z)_z$, si on note Y un vecteur coordonnée différent de Z, quelconque :

  $$L_Z < Z,Y > =< D_Z Z,Y > + < Z,D_Z Y > = 0 + \frac{1}{2}L_Z < Z,Z > = 0,$$

  la ligne de champ m_z de Z issue de m étant une géodésique. Or en $m = m_0$: $(< Z,Y > = 0) \Leftrightarrow (Y \neq X)$ et : $< Z,X > = 1$, donc le long de $(m_z)_z$, $\gamma_{|\mathbf{X}_{m_z}^\perp} = \,\mathrm{d}x_{|\mathbf{X}_{m_z}^\perp}$. Comme de plus $\gamma(Z) = 0$, $\gamma = \,\mathrm{d}x$.

  Toujours le long de $(m_z)_z$, par définition de $\mathfrak{R}(f_z)$ et de $\rho_{Z,Z,m_z,\mathfrak{R}(f_z),\mathfrak{S}(f_z)}$:

  $$\begin{aligned}
  &\forall r \in [\![1,N]\!], \forall k \in [\![1,n_r]\!], \forall i,j \in [\![1,d_r^k]\!], \\
  &\left(\frac{\partial}{\partial u_i^r}\right)_{|m_z} \left(\rho_{Z,Z,m_z,\mathfrak{R}(f_z),\mathfrak{S}(f_z)}(V_j^r)\right) = \left(\frac{\partial}{\partial v_j^r}\right)_{|m_z} \left(\rho_{Z,Z,m_z,\mathfrak{R}(f_z),\mathfrak{S}(f_z)}(U_i^r)\right) = 0.
  \end{aligned}$$

  Comme $\gamma_{|\mathbf{X}_m^\perp}$ vérifie cette même propriété (cela découle immédiatement de la construction de Z au **2)**) et comme, pour tout vect.-coordonnée Y différent de Z, $L_Z\gamma(Y) = \rho_{Z,Z,m_z,\mathfrak{R}(f_z),\mathfrak{S}(f_z)}(Y)$, alors γ vérifie cette propriété pour tout z.
* Par le premier point, $\mathrm{d}\gamma_{|\mathrm{T}\mathcal{X}_m^\perp} = 0$ en tout point de $\mathcal{X}_m^\perp$; en particulier donc en tout point de $\widetilde{\mathcal{U}}_m \cup \widetilde{\mathcal{V}}_m$. Soit Φ_z le flot de Z au temps z, alors :

  $$\Phi_z(\widetilde{\mathcal{U}}_m \cup \widetilde{\mathcal{V}}_m) = \widetilde{\mathcal{U}}_{m_z} \cup \widetilde{\mathcal{V}}_{m_z}$$

  par le **(a)**, **(I)** du théorème. Le long d'une courbe intégrale du champ Z incluse dans $\cup_z\left(\widetilde{\mathcal{U}}_{m_z} \cup \widetilde{\mathcal{V}}_{m_z}\right)$, et avec Y et Y' deux champs de vecteurs-coordonnées différents de

Z, quelconques :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\mathrm{d}\gamma(Y,Y')) &= \mathrm{d}\rho_{Z,Z,m_z,\mathfrak{R}(f_z),\mathfrak{S}(f_z)}(Y,Y') \quad \text{comme vu plus haut}\\ &= 0 \quad \text{par définition de } \rho_{Z,Z,m_z,\mathfrak{R}(f_z),\mathfrak{S}(f_z)}.\end{aligned}$$

Donc, en tout point de $\cup_z \left(\widetilde{\mathcal{U}}_{m_z} \cup \widetilde{\mathcal{V}}_{m_z}\right)$, $\mathrm{d}\gamma_{|\mathrm{T}\mathcal{X}^\perp} = 0$.

* Par construction du vecteur Z en **2)**, pour tout s de $[\![1,N']\!]$, $(\gamma)_{|\mathrm{T}\mathcal{S}^s(f_0)} = 0$, où $\mathcal{S}_0^s = \{p \in \mathcal{Y}_m^s \ / \ x(p) = 0\}$. Or $\forall z, \Phi_z(\mathcal{S}_0^s) = \mathcal{S}_z^s$ par le **(a)**, **(I)** du théorème, donc $\forall z$, $\mathrm{d}\Phi_z(\mathrm{T}\mathcal{S}_0^s) = \mathrm{T}\mathcal{S}_z^s$. Pour tout i de $[\![1,d_s']\!]$, le long de $\mathcal{S}_0^s$, $Y_i^s \in \mathrm{T}\mathcal{S}_0^s$ donc, le long d'une courbe intégrale de Z incluse dans $\cup_z \mathcal{S}_{m_z}^s$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\gamma(Y_i^s)) &= \rho_{Z,Z,m_z,\mathfrak{R}(f_z),\mathfrak{S}(f_z)}(Y_i^s) \quad \text{comme vu plus haut}\\ &= 0 \quad \text{par définition de } \rho_{Z,Z,m_z,\mathfrak{R}(f_z),\mathfrak{S}(f_z)}.\end{aligned}$$

Donc : $\forall z, \gamma_{|\mathrm{T}\mathcal{S}_z^s} = 0$.

Le point **(a)** du théorème est donc prouvé. Le point **(b)** découle aussi de la démarche adoptée. En effet, deux systèmes de coordonnées sont comme dans le théorème *ssi* ils proviennent de deux courbes $(f_z)_z$ et $(f_z')_z$ de $\mathcal{G}_\delta$ vérifiant **(E)** et vérifiant une condition initiale du type donné aux points **1)** et **2)**.

Par unicité des solution de **(E)**, ils sont égaux dès que $(f_0,(\mathrm{d}f_z/\mathrm{d}z)_{|z=0}) = (f_0',(\mathrm{d}f_z'/\mathrm{d}z)_{|z=0})$. Comme le vecteur Z construit en **2)** et identifié à $(\mathrm{d}f_z/\mathrm{d}z)_{|z=0})$, est totalement déterminé par le choix de f_0 effectué en **1)**, $(f_z)_z = (f_z')_z$ dès que $f_0 = f_0'$.

Or, le système de coordonnées construit en **1)** est donné par le sous-lemme 10 page 138, à partir du choix d'une base $(X,((U_i^r)_{i=1}^{d_r},(V_i^r)_{i=1}^{d_r})_{r=1}^N,((Y_i^s)_{i=0}^{d_s'})_{s=1}^{N'})$ de $\mathbf{X}_m^\perp$, des sous-variétés $\{p \in \mathcal{Y}_m^s \ / \ x(p) = 0\}$ et des coordonnées $(x,(y_i^s)_{i=1}^{d_s'}$ sur ces sous-variétés. (On traduit ici dans le langage des coordonnées les diverses sections arbitraire à partir desquelles le sous-lemme fournit les coordonnées.) Enfin, la famille $((V_i^r)_{i=1}^{d_r})_{r=1}^N$ est choisie, en m, duale de $((U_i^r)_{i=1}^{d_r})_{r=1}^N$ (point **(a)**, **(II)**, **(iii)**). Celle-ci détermine donc celle-là. C'est le point **(b)** recherché.

7) Le point (c) du théorème.

Montrons les deux relations déterminant γ. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ dans $\mathfrak{F}$ tels que $\mathcal{A} \perp \mathcal{B}$ ou $\mathcal{A} = \mathcal{Y}^0$; soit (A,B) un couple de vecteurs-coordonnées de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Alors :

$$\begin{aligned}L_A L_Z \gamma(B) &= L_A < D_Z Z,B > + L_A \underbrace{< Z,D_Z B >}_{=\frac{1}{2}L_B<Z,Z>=0}\\ &=< D_A D_Z Z,B > + < D_Z Z,D_A B >\\ &= (D_A\rho_z)(B) + \sum_{\substack{C\text{vecteur-}\\ \text{coordonnée}}} \Gamma_{A,B}^C < D_Z Z,C >\end{aligned}$$

Or, pour tout champ de vecteurs C,

$$< D_Z Z,C >= L_Z < Z,C > - < Z,D_Z C >= L_Z < Z,C > -\frac{1}{2}L_C < Z,Z >= L_Z\gamma(C),$$

d'où la première relation.

Soit z réel, r dans $[\![1,N]\!]$ et i, j et k dans $[\![1,d_r]\!]$. Alors, le long de $\mathcal{U}_m^r$:

$$L_{U_i^r} L_{U_i^r} L_Z \gamma(V_k^r) = L_{V_k^r} L_Z L_{U_i^r} \gamma(U_j^r) \quad \text{car } \mathrm{d}\gamma = 0 \text{ le long de } \mathcal{U}_m^r.$$

La deuxième relation suit car $\mathcal{U}^r \perp \mathcal{U}^r$. □

III.5.2 Démonstration de la proposition 4

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux feuilletages de $\mathfrak{F}$ tels que ($\mathcal{A} \perp \mathcal{B}$ et $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{X}$) ou ($\mathcal{A} = \mathcal{Y}^0$) et et p un point de $\mathcal{M}$. Soient alors Y et Y' deux champs de vecteurs-coordonnées de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

Par construction des coordonnées, $D_Y Y' \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}$. Par hypothèse, soit $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{X}$, soit $\mathbf{A} = \mathbf{Y}^0$; dans ce dernier cas, par construction des coordonnées, pour tout vecteur A et en tout point : $\forall i \in [\![1,d_0']\!], D_A Y_i^0 \in \mathbf{X}$. Par conséquent : $D_Y Y' = D_{Y'} Y \in \mathbf{X}$ et donc, d'après la formule du **(c)** du théorème :

$$\begin{aligned}
& L_Z L_Y < Z,Y' > \\
&= L_Z L_Y \gamma(Y') \\
&= < R(Z,Y)Z,Y' > + < D_Y Y',Z >< X,Z >^{-1} L_Z \gamma(X) \\
&= < R(Z,Y)Z,Y' > + < D_Y Y',Z >< Z,X >^{-1} L_Z < Z,X > \\
&= < R(Z,Y)Z,Y' > + < D_Y Y',Z >< Z,X >^{-1} < D_Z Z,X > \quad \text{car } < Z,D_Z,X >= 0.
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z} \left[\ L_Y \gamma(Y').\gamma(X)^{-1} \ \right] \\
&= L_Z \left[\ (L_Y {<}Z,Y'{>}){<}Z,X{>}^{-1} \ \right] \\
&= {<}Z,X{>}^{-1} \left[\ L_Z L_Y {<}Z,Y'{>} - {<}Z,X{>}^{-1} L_Y {<}Z,Y'{>} L_Z {<}Z,X{>} \ \right] \\
&= {<}Z,X{>}^{-1} \Big[\ {<}R(Z,Y)Z,Y'{>} + {<}D_Y Y',Z{>}{<}Z,X{>}^{-1}{<}D_Z Z,X{>} \\
&\qquad - {<}Z,X{>}^{-1}(\underbrace{{<}D_Y Z,Y'{>}}_{=0 \text{ car } \mathbf{A} \perp \mathbf{B} \text{ ou } \mathbf{A}=\mathbf{Y}^0} + {<}Z,D_Y Y'{>})(\underbrace{{<}Z,D_Z X{>}}_{=\frac{1}{2} L_X {<}Z,Z{>}=0} + {<}D_Z Z,X{>}) \ \Big] \\
&= {<}Z,X{>}^{-1} \left[\ {<}R(Z,Y)Z,Y'{>}. \ \right]
\end{aligned}$$

C'est le résultat. □

IV Une classification locale des variétés lorentziennes, selon leur holonomie

IV.1 Introduction

Cette section IV constitue une application du théorème 1 : utilisant les coordonnées locales proposées par ce théorème d'une part, et un théorème algébrique d'Ikemakhen-Bérard Bergery d'autre part (voir [BBI93]), elle classifie localement les variétés lorentziennes réductibles mais indécomposables, selon leur holonomie. Ce faisant, elle accomplit une des motivations initiales de la recherche de coordonnées locales privilégiées sur les variétés pseudo-riemanniennes réductibles indécomposables.

D'autre part, cette section constitue également une tentative pour dégager des invariants relatifs aux fibrés du type $\mathcal{Y}^s_p \to \check{\mathcal{Y}}^s_{\check{p}} = (\mathcal{Y}^s_p/\mathcal{X})$, qui apparaissent dans les variétés pseudo-riemanniennes réductibles indécomposables, et dont l'étude est importante pour comprendre la courbure et l'holonomie de ces variétés.

Ces deux questions se sont révélées liées ; nous les traitons donc ici ensemble. La section IV.2 est consacrée aux fibrés $\mathcal{Y}^s_p \to \check{\mathcal{Y}}^s_{\check{p}}$; la suivante IV.3 expose le théorème d'Ikemakhen-Bérard Bergery et les deux dermières IV.4 et IV.5 énoncent et démontrent la classification annoncée.

IV.2 Le défaut des fibrés $\mathcal{Y}^s_p \to \check{\mathcal{Y}}^s_{\check{p}}$ à être des produits affines

IV.2.1 Position du problème

Si p est un point de $\mathcal{M}$ et $s \in [\![0,N']\!]$, le fibré local au voisinage de p : $\mathcal{Y}^s_p \to \check{\mathcal{Y}}^s_{\check{p}}$ est un fibré de fibres les feuilles de $\mathcal{X}$, totalement isotropes, sur une base $\check{\mathcal{Y}}^s_{\check{p}}$ non dégénérée. On sait de plus que la connexion D sur $\mathcal{Y}^s_p$ est telle que $Dg = 0$ et que tout vecteur X de $\mathbf{X}_p$ peut être prolongé à $\mathcal{Y}^s_p$ par transport parallèle en un champ dans la distribution $\mathbf{X}$.

Une famille remarquable de fibrés de ce type est constituée des produits affines d'une variété riemannienne $\mathcal{Y}$ par une variété affine connectée $\mathcal{X}$ de dimension un :

$$(\mathcal{Y},g_{\mathbf{Y}},D_{\mathbf{Y}}) \times (\mathcal{X},D_{\mathbf{X}}) \xrightarrow{p_1} (\mathcal{Y},g_{\mathbf{Y}},D_{\mathbf{Y}})$$

avec p_1 la projection sur le premier facteur du produit et $D_{\mathbf{Y}}$ la connexion de Levi-Civita de $\mathcal{Y}$. La métrique produit est $g_{\mathbf{Y}} \otimes 0$, dégénérée. Il existe pour tout x de $\mathbf{X}$ une section privilégiée σ_x : $p \to (p,x)$ de p_1. La connexion produit est alors telle que ces sections sont d'image totalement géodésique : pour tout p de $\mathcal{Y}$ et tout champ Y de vecteurs de $\mathcal{Y}$ au voisinage de p :

$$\forall V \in \mathrm{T}_p\mathcal{Y}, D_{\mathrm{d}\sigma_x(V)}\, \mathrm{d}\sigma_x(Y) \in \mathrm{d}\sigma(\mathrm{T}_p\mathcal{Y}).$$

Les images de ces sections constituent un feuilletage de $(\mathcal{Y},g_{\mathbf{Y}},D_{\mathbf{Y}}) \times (\mathcal{X},D_{\mathbf{X}})$, stable par holonomie, supplémentaire de $\mathcal{X}$.

Un tel feuilletage stable supplémentaire — ou, c'est équivalent, une section σ de π, dont l'image est totalement géodésique —, n'existe cependant pas nécessairement dans le cas général (voir figure 4 page 193). La métrique produit étant dégénérée, d'autres connexions que la connexion produit sont compatibles avec elle. Les fibrés du type $\mathcal{Y}_p^s \to \check{\mathcal{Y}}_{\check{p}}^s$ présentent donc en général un «défaut» à être un produit affine, par exemple celui de $\check{\mathcal{Y}}_{\check{p}}^s$ par $\mathcal{X}_p$. On tente dans cette section de caractériser ce défaut et de le lire dans les coefficients de la métrique exprimée dans les coordonnées fournies par le théorème 1.

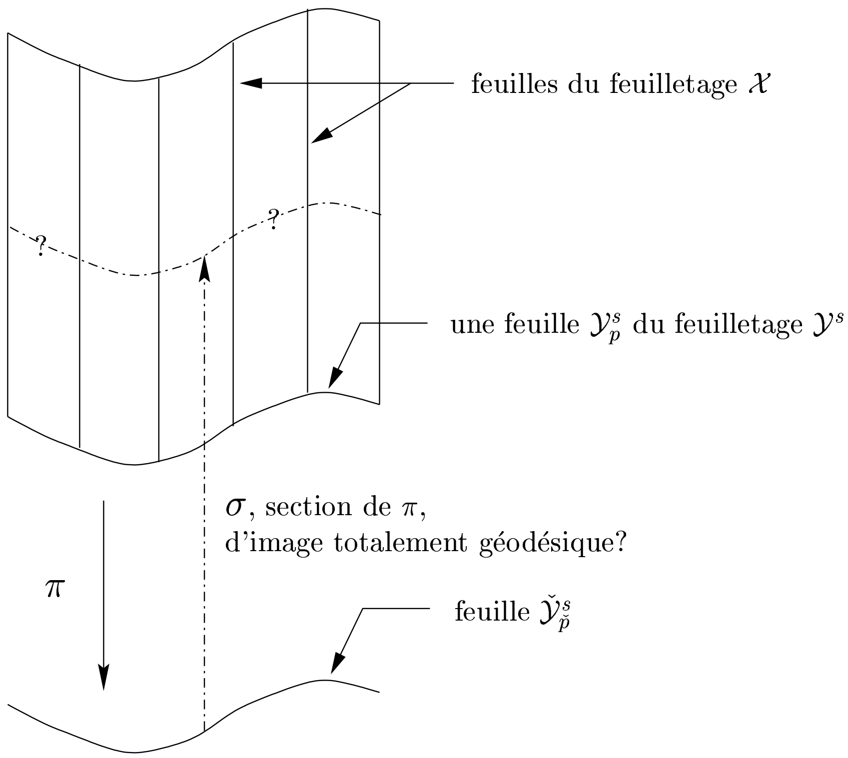


FIGURE 4 – $\mathcal{Y}_p^s \to \check{\mathcal{Y}}_{\check{p}}^s$ *est-il un produit affine :*
existe-t-il une section σ d'image totalement géodésique?

IV.2.2 Deux outils

Soit donc un fibré $\mathcal{Y}_p^s \to \check{\mathcal{Y}}_{\check{p}}^s$. On choisit de plus un champ X non nul dans $\mathbf{X}$, parallèle le long de $\mathcal{Y}_p^s$; un tel choix revient au choix d'un vecteur non nul de $\mathbf{X}_p$ et deux tels champs sont nécessairement proportionnels.

Remarque : structure de fibré affine. Le choix d'un tel champ X définit une action de $(\mathrm{C}^\infty(\check{\mathcal{Y}}_{\check{p}}^s,\mathbb{R}),+)$ dans l'espace $\Gamma(\mathcal{Y}_p^s \to \check{\mathcal{Y}}_{\check{p}}^s)$ des sections de $\mathcal{Y}_p^s \to \check{\mathcal{Y}}_{\check{p}}^s$. Soit en effet Φ_t le flot de X au temps t. Si $f \in \mathrm{C}^\infty(\check{\mathcal{Y}}_{\check{p}}^s,\mathbb{R})$ et $\sigma \in \Gamma(\mathcal{Y}_p^s \to \check{\mathcal{Y}}_{\check{p}}^s)$, on pose :

$$\begin{array}{cccc} & \check{\mathcal{Y}}_{\check{p}}^s & & \mathcal{Y}_p^s \\ f.\sigma : & q & \longrightarrow & \Phi_{f(q)}(\sigma(q)). \end{array}$$

On vérifie que cette action est simple et transitive ; on la notera additivement : $f.\sigma = \sigma + f$.

Notation. Si σ est une section de $\mathcal{Y}_p^s \to \check{\mathcal{Y}}_{\check{p}}^s$, elle définit en tout point q de $\mathcal{Y}_p^s$ une connexion du fibré affine $\mathcal{Y}_p^s \to \check{\mathcal{Y}}_{\check{p}}^s$, *i.e.* un supplémentaire de $\mathbf{X}_q$. Pour tout q tel que $q = \sigma(\check{q})$:

$$T_q\mathcal{Y}_p^s = \mathbf{X}_q \oplus \mathrm{d}\sigma(\check{\mathbf{Y}}_{\check{q}}^s).$$

Cette décomposition se propage alors par transport parallèle le long de $\mathcal{X}_q$ à tous les points de $\mathcal{X}_q$ et fournit donc en tout point le supplémentaire annoncé. Remarque : deux connexions σ et σ' ont même connexion associée *ssi* $\sigma' = \sigma + f$ où f est une fonction constante.

On note alors $\mathcal{V}^\sigma \in \mathrm{T}^*\mathcal{Y}_p^s \otimes \mathrm{T}\mathcal{Y}_p^s$ la projection verticale associée à cette connexion, c'est-à-dire la projection, dans chaque espace tangent $\mathrm{T}_q\mathcal{Y}_p^s$, sur le premier facteur de la décomposition, parallèlement au deuxième.

Proposons une première mesure du défaut de $\mathcal{Y}_p^s \to \check{\mathcal{Y}}_{\check{p}}^s$ à être produit affine. Attention, la connexion associée à σ introduite ci-dessus est par définition intégrable d'intégrale σ, donc de courbure nulle. Les objets introduits plus bas ne sont pas relatifs à cette courbure.

Proposition 6 *Soient $\check{Y}$ et $\check{Y}'$ deux champs de vecteurs de $\check{\mathcal{Y}}_{\check{p}}^s$. L'opérateur :*

$$H^\sigma \ : (\check{Y},\check{Y}') \to \mathcal{V}^\sigma(D_{\mathrm{d}\sigma(\check{Y})}\,\mathrm{d}\sigma(\check{Y}'))$$

est alors tensoriel et symétrique en $\check{Y}$ et $\check{Y}'$ et le fibré $\mathcal{Y}_p^s \to \check{\mathcal{Y}}_{\check{p}}^s$ est un produit affine ssi *: $\exists\sigma \in \Gamma(\mathcal{Y}_p^s \to \check{\mathcal{Y}}_{\check{p}}^s)$: $H^\sigma = 0$.*

De plus :

$$\forall f \in \mathrm{C}^\infty(\check{\mathcal{Y}}_{\check{p}}^s,\mathbb{R}), H^{\sigma+f} = H^\sigma + \mathrm{Hess}\, f$$

et le fibré $\mathcal{Y}_p^s \to \check{\mathcal{Y}}_{\check{p}}^s$ est un produit affine ssi *: $\forall\sigma \in \Gamma(\mathcal{Y}_p^s \to \check{\mathcal{Y}}_{\check{p}}^s), \exists f \in \mathrm{C}^\infty(\check{\mathcal{Y}}_{\check{p}}^s,\mathbb{R})$: $H^\sigma =$* Hess f.

L'opérateur $\sigma \to H^\sigma$ traduit alors le défaut de $\mathcal{Y}_p^s \to \check{\mathcal{Y}}_{\check{p}}^s$ à être un produit affine. Ce fibré est produit *ssi* pour toute (ou pour une quelconque) section σ, H^σ est dans l'image de Hess.

Démonstration. La première affirmation n'est que la traduction du fait que la distribution $\mathrm{Im}(\mathrm{d}\sigma)$ est par construction intégrable. Si on prolonge $\check{Y}$ et $\check{Y}'$ en des champs qui commutent, $\mathrm{d}\sigma(\check{Y})$ et $\mathrm{d}\sigma(\check{Y}')$ commutent alors également et donc $H^\sigma(\check{Y},\check{Y}')$ est symétrique. Il est de plus par construction tensoriel en sa première variable, il est donc tensoriel en ses deux variables.

Reste à montrer que : $\forall f \in \mathrm{C}^\infty(\check{\mathcal{Y}}_{\check{p}}^s,\mathbb{R}), H^{\sigma+f} = H^\sigma + \mathrm{Hess}\, f$. Soit $f \in \mathrm{C}^\infty(\check{\mathcal{Y}}_{\check{p}}^s,\mathbb{R})$. Si Y est un champ de vecteurs de $\mathcal{Y}_p$, $\mathcal{V}^{\sigma+f}(Y) = \mathcal{V}^\sigma(Y) - \mathrm{d}f(\check{Y})$. C'est évidemment vrai si $Y = X$. Il suffit donc de le vérifier pour $Y = \mathrm{d}\sigma(\check{Y})$. Pour un tel Y :

$$\mathcal{V}^\sigma(Y) = 0 = \mathcal{V}^{\sigma+f}(\mathrm{d}(\sigma+f)(\check{Y})) = \mathcal{V}^{\sigma+f}(Y + (\mathrm{d}f.\check{Y})).X = \mathcal{V}^{\sigma+f}(Y) + \mathrm{d}f.\check{Y}.$$

d'où le résultat. Soient alors $\check{Y}$ et $\check{Y}'$ deux champs de $\check{\mathcal{Y}}_{\check{p}}^s$ qui commutent. Notons Y et Y' les prolongements par tranport parallèle le long des feuilles de $\mathcal{X}$ des champs $\mathrm{d}\sigma(\check{Y})$ et $\mathrm{d}\sigma(\check{Y}')$; Y et Y' sont deux champs définis dans un voisinage de p dans $\mathcal{Y}^p$, ils commutent.

Alors :

$$\begin{aligned}
H^{\sigma+f}(\check{Y},\check{Y}') &= \mathcal{V}^{\sigma+f}(D_{\,\mathrm{d}(\sigma+f)\check{Y}}\,\mathrm{d}(\sigma+f)(\check{Y}'))\\
&= \mathcal{V}^{\sigma+f}(D_{Y+(\,\mathrm{d}f.\check{Y}).X}(Y'+(\,\mathrm{d}f.\check{Y}').X))\\
&= \mathcal{V}^{\sigma+f}(D_Y Y' + D_Y(\,\mathrm{d}f.\check{Y}').X))\\
&= \mathcal{V}^{\sigma+f}(D_Y Y') + L_{\check{Y}}(\,\mathrm{d}f.\check{Y}')\\
&= \mathcal{V}^{\sigma}(D_Y Y') + L_{\check{Y}}(\,\mathrm{d}f.\check{Y}') - \,\mathrm{d}f.(\pi(D_Y Y'))\\
&= H^{\sigma}(\check{Y},\check{Y}') + L_{\check{Y}}(\,\mathrm{d}f.\check{Y}') - \,\mathrm{d}f.(D_{\check{Y}}\check{Y}'))\\
&= H^{\sigma}(\check{Y},\check{Y}') + (D_{\check{Y}}\,\mathrm{d}f)(\check{Y}'))\\
&= H^{\sigma}(\check{Y},\check{Y}') + \mathrm{Hess}\, f(\check{Y},\check{Y}')
\end{aligned}$$

C'est le résultat. □

Remarque : des sections privilégiées. Tout fibré du type $\mathcal{Y}^s_p \to \check{\mathcal{Y}}^s_{\check{p}}$ admet donc des sections locales σ privilégiées, «harmoniques», au sens suivant :

$$\mathrm{tr}\, H^\sigma = 0.$$

Si σ est une section quelconque, on définit f dans $\mathrm{C}^\infty(\check{\mathcal{Y}}^s_{\check{p}},\mathbb{R})$ par sa différentielle en $\check{p}$ et par la relation $\Delta f = -\,\mathrm{tr}\, H^\sigma$. (Rappelons qu'on note ici $\Delta f = \mathrm{tr}\,\mathrm{Hess}\, f$.) La section $\sigma + f$ est alors «harmonique». L'ensemble de ces sections est l'orbite de l'une d'elles sous l'action des fonctions harmoniques de $\mathrm{C}^\infty(\check{\mathcal{Y}}^s_{\check{p}},\mathbb{R})$.

Cette remarque peut être insérée dans le théorème 1. On peut en effet exiger que les sections d'image $x^{-1}(0) \cap \mathcal{Y}^s_m$ des $\mathcal{Y}^s_m \to \check{\mathcal{Y}}^s_{\check{m}}$, pour $s \in [\![1,N']\!]$, soient «harmoniques».

Le point **(b)** du théorème devient plus précis : deux systèmes de coordonnées vérifiant cette condition supplémentaire sont égaux *ssi* leur 1-jets en m sont égaux.

Un autre point de vue, plus précis, sur le défaut de $\mathcal{Y}^s_p \to \check{\mathcal{Y}}^s_{\check{p}}$ à être produit affine peut encore être proposé.

Notation. On notera repectivement $\check{D}$ et $\check{R}$ la connexion de Levi-Civita de $\check{g}$ sur $\check{\mathcal{Y}}^s_{\check{p}}$ et son tenseur de courbure.

Proposition 7 *Soit $\sigma \in \Gamma(\mathcal{Y}^s_p \to \check{\mathcal{Y}}^s_{\check{p}})$, $q \in \mathcal{Y}^s_p$ et $(Y,Y',Y'') \in \mathrm{T}_q\mathcal{Y}^s_p$. L'opérateur $(Y,Y',Y'') \mapsto \mathcal{V}^\sigma(R(Y,Y').Y'')$ est invariant par transport parallèle le long de $\mathbf{X}_q$ et sa valeur ne dépend que des classes $\check{Y}$, $\check{Y}'$ et $\check{Y}''$ de Y, Y' et Y'' modulo $\mathbf{X}$. On définit donc :*

$$R^\sigma \ : \ \check{Y},\check{Y}',\check{Y}'' \mapsto \mathcal{V}^\sigma(R(Y,Y').Y'')$$

où Y, Y' et Y'' sont des relevés quelconques de $\check{Y}$, $\check{Y}'$ et $\check{Y}''$. De plus :

$$\forall f \in \mathrm{C}^\infty(\check{\mathcal{Y}}^s_{\check{p}},\mathbb{R}), R^{\sigma+f} = R^\sigma + \,\mathrm{d}f(\check{R}(\,\cdot\,,\cdot\,)\,\cdot).$$

Enfin, le fibré $\mathcal{Y}^s_p \to \check{\mathcal{Y}}^s_{\check{p}}$ est un produit affine

ssi : $\exists\sigma \in \Gamma(\mathcal{Y}^s_p \to \check{\mathcal{Y}}^s_{\check{p}}) \ : \ R^\sigma = 0$

ssi : $\forall\sigma \in \Gamma(\mathcal{Y}^s_p \to \check{\mathcal{Y}}^s_{\check{p}}), \exists f \in \mathrm{C}^\infty(\check{\mathcal{Y}}^s_{\check{p}},\mathbb{R}) \ : R^\sigma = \,\mathrm{d}f(\check{R}(\,\cdot\,,\cdot\,)\,\cdot).$

Pour mener le travail au bout, il resterait à caractériser les 3-formes de $\check{\mathcal{Y}}^s_{\check{p}}$ qui se factorisent en la composée d'une 1-forme fermée et de $\check{R}$, *i.e.* de la forme $\alpha(\check{R}(\,\cdot\,,\cdot\,)\,\cdot)$ avec $\mathrm{d}\alpha = 0$.

Pour expliciter le lien entre H^σ et R^σ, introduisons :

Définition 5 *Soit B un champ de formes bilinéaires symétriques sur $(\mathcal{M},D)$ une variété munie d'une connexion affine. La différentielle $\mathrm{d}_D B$ de B est la 3-forme définie par :*

$$\mathrm{d}_D B(V,V',V'') = D_V B(V',V'') - D_{V'} B(V,V'').$$

Alors :

Proposition 8 $\forall \sigma \in \Gamma(\mathcal{Y}^s_p \to \check{\mathcal{Y}}^s_{\check{p}}), R^\sigma = -\,\mathrm{d}_{\check{D}} H^\sigma$.

Démonstration. Soient $\sigma \in \Gamma(\mathcal{Y}^s_p \to \check{\mathcal{Y}}^s_{\check{p}})$, $\check{Y}$, $\check{Y}'$ et $\check{Y}''$ trois champs de vecteurs sur $\check{\mathcal{Y}}^s_{\check{p}}$ et Y, Y' et Y'' les champs $\mathrm{d}\sigma(\check{Y})$, $\mathrm{d}\sigma(\check{Y}')$, $\mathrm{d}\sigma(\check{Y}'')$, prolongés à un voisinage de p dans $\mathcal{Y}^s_p$ par transport parallèle le long des feuilles de $\mathcal{X}$. Remarquons que, par définition de $\mathcal{V}^\sigma$ et parce que la connexion D de $\mathcal{Y}^s_p$ se projette sur la connexion $\check{D}$ de $\check{\mathcal{Y}}^s_{\check{p}}$: $\mathrm{d}\sigma(\check{D}_{\check{Y}}\check{Y}') = D_Y Y' - \mathcal{V}^\sigma(D_Y Y')$, et de même pour tout couple de vecteurs parmi Y, Y' et Y''. Les opérateurs H^σ et R^σ étant tensoriels, on peut supposer de plus sans préjudice que les champs $\check{Y}$, $\check{Y}'$ et $\check{Y}''$ commutent : $\check{D}_{\check{Y}}\check{Y}' = \check{D}_{\check{Y}'}\check{Y}\ \ldots$ Alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_{\check{D}} H^\sigma(\check{Y},\check{Y}',\check{Y}'') &= (\check{D}_{\check{Y}} H^\sigma)(\check{Y}',\check{Y}'') - (\check{D}_{\check{Y}'} H^\sigma)(\check{Y},\check{Y}'')\\
&= \check{D}_{\check{Y}}(H^\sigma(\check{Y}',\check{Y}'')) - H^\sigma(\check{D}_{\check{Y}}\check{Y}',\check{Y}'') - H^\sigma(\check{Y}',\check{D}_{\check{Y}}\check{Y}'')\\
&\qquad - [\check{D}_{\check{Y}'}(H^\sigma(\check{Y},\check{Y}'')) - H^\sigma(\check{D}_{\check{Y}'}\check{Y},\check{Y}'') - H^\sigma(\check{Y},\check{D}_{\check{Y}'}\check{Y}'')]\\
&= D_Y(\mathcal{V}^\sigma(D_{Y'}Y'')) - \mathcal{V}^\sigma(D_{\mathrm{d}\sigma(\check{D}_{\check{Y}}\check{Y}')}Y'') - \mathcal{V}^\sigma(D_{Y'}\,\mathrm{d}\sigma(\check{D}_{\check{Y}}\check{Y}''))\\
&\qquad - [D_{Y'}(\mathcal{V}^\sigma(D_Y Y'')) - \mathcal{V}^\sigma(D_{\mathrm{d}\sigma(\check{D}_{\check{Y}'}\check{Y})}Y'') - \mathcal{V}^\sigma(D_Y\,\mathrm{d}\sigma(\check{D}_{\check{Y}'}\check{Y}''))]\\
&= D_Y(\mathcal{V}^\sigma(D_{Y'}Y'')) - \mathcal{V}^\sigma(D_{Y'}(D_Y Y'' - \mathcal{V}^\sigma(D_Y Y'')))\\
&\qquad - [D_{Y'}(\mathcal{V}^\sigma(D_Y Y'')) - \mathcal{V}^\sigma(D_Y(D_{Y'}Y'' - \mathcal{V}^\sigma(D_{Y'}Y'')))]\\
&= D_Y(\mathcal{V}^\sigma(D_{Y'}Y'')) - \mathcal{V}^\sigma(D_{Y'}D_Y Y'') - D_{Y'}(\mathcal{V}^\sigma(D_Y Y'')))\\
&\qquad - [D_{Y'}(\mathcal{V}^\sigma(D_Y Y'')) - \mathcal{V}^\sigma(D_Y(D_{Y'}Y'')) - D_Y(\mathcal{V}^\sigma(D_{Y'}Y''))]\\
&= -\mathcal{V}^\sigma(D_{Y'}D_Y Y'') + \mathcal{V}^\sigma(D_Y D_{Y'}Y'')\\
&= -R^\sigma(\check{Y},\check{Y}',\check{Y}'')
\end{aligned}$$

par définition de R^σ et encore parce que les champs $\check{Y}$ et $\check{Y}'$, donc également les champs Y et Y', commutent. □

IV.2.3 Lien avec la métrique dans les coordonnées du théorème 1

Quand l'holonomie agit trivialement sur $\check{\mathbf{X}}^\perp_{\check{m}}$. Sous les notations du théorème 1, $N = N' = 0$. Le fibré $\mathcal{Y}^0_m \to \check{\mathcal{Y}}^0_{\check{m}}$ est plat, donc produit affine de $\check{\mathcal{Y}}^0_{\check{m}}$ plat par $\mathcal{X}_m$.

Quand l'holonomie agit irréductiblement sur $\check{\mathbf{X}}^\perp_{\check{m}}$ et trivialement sur $\mathbf{X}_m$. Sous les notations du théorème 1, $N = d'_0 = 0$, $N' = 1$. Notons $(x,(y_i)^{d'}_{i=1},z)$ les coordonnées du théorème ; la métrique se met sous la forme $g = g' + 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ où g' n'a pas de terme facteur de $\mathrm{d}x$ ou $\mathrm{d}z$ et ne dépend pas de la coordonnée x.

Une métrique variable sur $\check{\mathcal{X}}^{\perp}_{\check{m}}$. La famille à un paramètre de métriques dégénérées $(g'_{|\mathcal{X}^{\perp}_{m_z}})_z$ d'un ouvert des $(\mathcal{X}^{\perp}_{m_z})_z$ passe au quotient en une famille de métriques non dégénérées $(\check{g}'_{|\check{\mathcal{X}}^{\perp}_{\check{m}_z}})_z$ d'un ouvert des $(\check{\mathcal{X}}^{\perp}_{\check{m}_z})_z$. Cette famille peut être traitée, par image réciproque par le flot $\Phi^{\check{Z}}_z$ de $\check{Z}$ au temps z, comme une famille à un paramètre de métriques d'un ouvert de $\check{\mathcal{X}}^{\perp}_{\check{m}}$. On notera :

$$\check{g}_z = (\Phi^{\check{Z}}_z)^*(\check{g}'_{|\mathcal{X}^{\perp}_{\check{m}_z}}).$$

De façon équivalente, on aurait pu prendre l'image réciproque de $\check{g}'_{|\mathcal{X}^{\perp}_{\check{m}_z}}$ par le système de coordonnées $(y_i)_{i=1}^{d'}$ et obtenir $\check{g}_z = ((y_i)_{i=1}^{d'})^*(\check{g}'_{|\mathcal{X}^{\perp}_{\check{m}_z}})$ une métrique variable sur un ouvert de $\mathbb{R}^{d'}$. Notons alors :

$$\check{h}_z = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\check{g}_z$$

la dérivée en z de la forme variable $\check{g}_z$.

Le défaut de $\mathcal{X}^{\perp}_{m_z} \to \check{\mathcal{X}}^{\perp}_{\check{m}_z}$ à être produit affine se lit alors sur $\check{h}_z$.

Proposition 9 *Notons σ_z la section de $\mathcal{X}^{\perp}_{m_z} \to \check{\mathcal{X}}^{\perp}_{\check{m}_z}$ d'image $x^{-1}(0) \cap \mathcal{X}^{\perp}_{m_z}$ et $\check{D}^z$ la connexion de Levi-Civita associée à $\check{g}_z$ sur $\check{\mathcal{X}}^{\perp}_{\check{m}_z}$. On identifie les vecteurs de $\mathrm{T}\check{\mathcal{Y}}^s_{\check{m}}$ et leur image dans $\mathrm{T}\check{\mathcal{Y}}^s_{\check{m}_z}$ par $\Phi^{\check{Z}}_z$. Alors :*

$$H^{\sigma_z} = -\frac{1}{2}\check{h}_z.X \quad et: \; R^{\sigma_z} = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}_{\check{D}^z}\check{h}_z.X.$$

Démonstration. Il suffit de montrer la première égalité, la seconde découlant alors de la proposition 8 page 196. Le vecteur-coordonnée Z vérifie : $\forall i \in [\![1,d']\!]$, $< Z,Y_i >= 0$ et : $< Z,X >= 0$, donc :

$$\forall p \in \mathcal{X}^{\perp}_{m_z}, \forall Y \in \mathbf{X}^{\perp}_p,\, \mathcal{V}^{\sigma_z}(Y) =< Z,Y >.X.$$

Soient i et j dans $[\![1,d']\!]$:

$$\begin{aligned}
H^{\sigma_z}(\check{Y}_i,\check{Y}_j) &= \mathcal{V}^{\sigma_z}(D_{Y_i}Y_j)\\
&=< D_{Y_i}Y_j,Z >.X\\
&= \frac{1}{2}(L_{Y_i}\underbrace{< Y_j,Z >}_{\equiv 0}+L_{Y_j}\underbrace{< Y_i,Z >}_{\equiv 0}-L_Z < Y_i,Y_j >).X\\
&= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}g_z(Y_i,Y_j).X\\
&\qquad \text{où on note encore } Y_i \text{ et } Y_j \text{ les vecteurs } \mathrm{d}\Phi^Z_{-z}(Y_i) \text{ et } \mathrm{d}\Phi^Z_{-z}(Y_j)\\
&= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\check{g}_z(\check{Y}_i,\check{Y}_j).X\\
&= \frac{1}{2}\check{h}_z(\check{Y}_i,\check{Y}_j).X
\end{aligned}$$

d'où le résultat car H^{σ_z} et $\check{h}_z$ sont tensoriels. □

La dérivée $\check{h}_z$ de $\check{g}_z$ se décompose canoniquement en deux composantes. Introduisons déjà deux opérateurs classiques. Nous reprenons ici le système de notations introduit dans

[Bes87] au chapitre 1.

Définition 6 *Si A est un (p,q)-tenseur symétrique sur $(\mathcal{M},g)$ une variété riemannienne ou pseudo-riemannienne, on note δ^*A le symétrisé de DA, c'est-à-dire :*

$$(X_1,\dots,X_{p+1}) \xrightarrow{\delta^* A} \underset{X_1,\dots,X_{p+1}}{\mathfrak{S}} D_{X_1}A(X_2,\dots,X_{p+1}).$$

L'opérateur δ^* admet un adjoint formel noté δ et nommé divergence. Si $p \geq 1$:

$$(X_1,\dots,X_{p-1}) \xrightarrow{\delta A} -\operatorname{tr}_g[(Y,Z) \mapsto \delta^* A(Y,Z,X_1,\dots,X_{p-1})].$$

On notera ici respectivement $\check{\delta}^*_z$ et $\check{\delta}_z$ ces deux opérateurs, relatifs à la métrique $\check{g}_z$, de paramètre z, sur $\check{\mathcal{Y}}^s_m$.

Rappelons également un résultat classique sur l'espace des métriques d'une variété.

Proposition 10 *Soit $(\mathcal{M},g)$ une variété riemannienne ou pseudo-riemannienne. Une classe particulière de métriques de $\mathcal{M}$ est l'orbite $(\varphi^*g)_{\varphi\in\mathrm{Diff}(\mathcal{M})}$ de g sous l'action des difféomorphismes de $\mathcal{M}$. Soit $(g_t)_t = (\varphi_t^* g)_t$ une courbe issue de g (*i.e.* $g_0 = g$) dans cette orbite et v le champ de vecteurs $(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_t)_{|t=0}$, alors :*

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g_t\right)_{|t=0} = \delta^* v^\flat.$$

*L'espace $\mathrm{S}^2(\mathrm{T}^*\mathcal{M})$ des déformations infinitésimales de g, *i.e.* des formes bilinéaires sur $\mathcal{M}$, se décompose alors :*

$$\mathrm{S}^2(\mathrm{T}^*\mathcal{M}) = \operatorname{Im}\delta^* \oplus \ker\delta.$$

Par conséquent, pour toute courbe $(g_t)_t$ issue de g dans l'espace des métriques sur $\mathcal{M}$, il existe une famille de difféomorphismes $(\varphi_t)_t$ de $\mathcal{M}$ telle que :

$$g_t = \varphi_t^* \tilde{g}_t \text{ et : } \delta\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{g}_t\right)_{|t=0}\right) = 0.$$

Autrement dit, on trouve un champ de vecteurs $v = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi)_{|t=0}$ tel que :

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g_t\right)_{|t=0} = \delta^* v^\flat + \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{g}_t\right)_{|t=0}}_{\text{de divergence nulle.}}.$$

La famille $(\varphi_t)_t$ est unique à composition près par une famille d'isométries. Le champ v est donc unique à composition près par une isométrie infinitésimale, nécessairement nulle par exemple si g n'admet pas d'isométries.

Démonstration de la proposition. Montrons le premier point. Soit $p \in \mathcal{M}$ et $X,Y \in$

$\mathrm{T}_p\mathcal{M}$.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g_t\right)_{|t=0}(X,Y) &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_t^* g\right)_{|t=0}(X,Y)\\
&= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_{|t=0} g(\,\mathrm{d}\varphi_t X, \mathrm{d}\varphi_t Y)\\
&= g((\tfrac{D}{\mathrm{d}t})_{|t=0}\,\mathrm{d}\varphi_t X, \mathrm{d}\varphi_0 Y) + g(\varphi_0 X, \mathrm{d}(\tfrac{D}{\mathrm{d}t})_{|t=0}\,\mathrm{d}\varphi_t Y)\\
&= g(D_X((\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})_{|t=0}\varphi(p)),Y) + g(X,D_Y((\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})_{|t=0}\varphi(p)))\\
&= g(D_X v,Y) + g(X,D_Y v)\\
&= L_X g(v,Y) - g(v,D_X Y) + L_Y g(v,X) - g(v,D_Y X)\\
&\qquad \text{avec des prolongements quelconques de } X \text{ et } Y\\
&= L_X v^\flat(Y) - v^\flat(D_X Y) + L_Y v^\flat(X) - v^\flat(D_Y X)\\
&= D_X v^\flat(Y) + D_Y v^\flat(X)\\
&= \delta^* v^\flat(X,Y).
\end{aligned}$$

La deuxième affirmation est la version infinitésimale du «Slice theorem» de D.Ebin (voir Besse [Bes87], chapitre 4 pp. 117 et 118 ainsi que le paragraphe 32 de l'appendice, ou [E68]). □

Pour chaque valeur du paramètre z, on note alors v_z un champ de vecteurs de $\check{\mathcal{X}}_{\check{m}}^{\perp}$ tel que :

$$h_z = \check{\delta}_z^* v_z^{\flat_z} + \tilde{\check{h}}_z \text{ et : } \check{\delta}_z(\tilde{\check{h}}_z) = 0,$$

où $\flat_z$ est l'isomorphisme musical induit par $\check{g}_z$. Le champ v_z est défini à addition près d'une $\check{g}_z$-isométrie infinitésimale.

Rappelons enfin un opérateur classique sur les champs de vecteurs.

Définition 7 *Soit v un champ de vecteur sur $(\mathcal{M},g)$ variété riemannienne ou pseudo-riemannienne. Le rotationnel de v est la 2-forme alternée définie par :*

$$\mathrm{rot}\, v = \,\mathrm{d}v^\flat.$$

Remarque. En dimension 3, le rotationnel de v désigne aussi le champ de vecteur dual de cette 2-forme et en dimension deux, le scalaire dual de cette 2-forme.

On peut maintenant énoncer :

Proposition 11 *Soit $(\mathcal{M},g)$ une variété riemannienne ou pseudo-riemannienne, v un champ de vecteurs sur $\mathcal{M}$ et h la forme bilinéaire symétrique $\delta^* v^\flat$. Alors :*

$$\mathrm{d}_D h = D(\mathrm{rot}\, v) + 2v^\flat \circ R.$$

Par conséquent, pour tout z, en identifiant les vecteurs de $\check{\mathcal{X}}_{\check{m}}^{\perp}$ et leurs tranportés sur $\check{\mathcal{X}}_{\check{m}_z}^{\perp}$ par la différentielle du flot de $\check{Z}$ et en notant rot_z l'opérateur rotationnel sur $\check{\mathcal{X}}_{\check{m}}^{\perp}$ associé à la métrique $\check{g}_z$:

$$2R^{\sigma_z} = \,\mathrm{d}_{\check{D}^z}\check{h}_z = \check{D}^z(\mathrm{rot}_z\, v_z) + 2v_z^{\flat_z} \circ \check{R}_z + \,\mathrm{d}_{\check{D}^z}\tilde{\check{h}}_z.$$

Remarque. Si v est une isométrie infinitésimale, $\delta^* v = 0$. On vérifie donc bien que la quantité : $\check{D}^z(\mathrm{rot}_z\, v_z) + 2v_z^{\flat_z} \circ \check{R}_z$ et donc aussi : $\mathrm{d}_{\check{D}^z} \tilde{\check{h}}_z$ ne dépendent pas du choix du vecteur v_z, défini à addition près d'une isométrie infinitésimale. Elles sont intrinsèquement associées à $\check{h}_z$.

Démonstration de la proposition. Soient p un point de $\mathcal{M}$ et Y, Y' et Y'' trois vecteurs de $\mathrm{T}_p\mathcal{M}$. Tous les opérateurs manipulés sont tensoriels ; on peut donc prolonger sans préjudice Y, Y' et Y'' en des champs de vecteurs quelconques. Pour alléger le calcul, on les prolonge comme les vecteurs-coordonnées de coordonnées normales de centre p, ainsi : $(D_Y Y')_{|p} = (D_{Y'} Y)_{|p} = 0$ et de même pour toute paire de vecteurs parmi Y, Y' et Y''. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_D h(Y,Y',Y'') &= (\,\mathrm{d}_D \delta^* v^\flat)(Y,Y',Y'') \\
&= (D_Y \delta^* v^\flat)(Y',Y'') - (D_{Y'} \delta^* v^\flat)(Y,Y'') \\
&= L_Y(\delta^* v^\flat)(Y',Y'')) - L_{Y'}(\delta^* v^\flat)(Y,Y'')) \\
&\qquad \text{car } D_Y Y' = DYY'' = D_{Y'} Y = D_{Y'} Y'' = 0 \text{ en } p \\
&= L_Y(g(D_{Y'} v,Y'' + g(Y',D_{Y''} v)) - L_{Y'}(g(D_Y v,Y'') + g(Y,D_{Y''} v)) \\
&= g(D_Y D_{Y'} v,Y'') + g(Y',D_Y D_{Y''} v) - (g(D_{Y'} D_Y v,Y'') - g(Y,D_{Y'} D_{Y''} v) \\
&\qquad \text{par le même argument} \\
&= -g(R(Y,Y')v,Y'') + g(D_Y D_{Y''} v,Y')) - g(D_{Y'} D_{Y''} v,Y).
\end{aligned}$$

Or :

$$v^\flat(R(Y,Y')Y'') = -g(R(Y,Y')v,Y'')$$

et :

$$\begin{aligned}
(D_{Y''} \mathrm{rot}\, v)(Y,Y') &= L_{Y''}(\mathrm{rot}\, v(Y,Y')) \quad \text{car } D_{Y''} Y = D_{Y''} Y = 0 \text{ en } p \\
&= L_{Y''}(L_Y g(v,Y') - L_{Y'} g(v,Y)) \\
&= L_Y L_{Y''} g(v,Y') - L_{Y'} L_{Y''} g(v,Y) \\
&= L_Y(g(D_{Y''} v,Y') + g(v,D_{Y''} Y')) - L_{Y'}(g(D_{Y''} v,Y) + g(v,D_{Y''} Y)) \\
&= g(D_Y D_{Y''} v,Y') + g(D_{Y''} v,\underbrace{D_Y Y'}_{=0 \text{ en } p}) + g(D_Y v,\underbrace{D_{Y''} Y'}_{=0 \text{ en } p}) + g(v,D_Y D_{Y''} Y') \\
&\qquad - g(D_{Y'} D_{Y''} v,Y) - g(D_{Y''} v,\underbrace{D_{Y'} Y}_{=0 \text{ en } p}) - g(D_{Y'} v,\underbrace{D_{Y''} Y}_{=0 \text{ en } p}) - g(v,D_{Y'} D_{Y''} Y) \\
&= g(D_Y D_{Y''} v,Y')) - g(D_{Y'} D_{Y''} v,Y) + g(v,D_Y D_{Y'} Y'') - g(v,D_{Y'} D_Y Y'') \\
&\qquad \text{car } Y,\, Y' \text{ d'une part et } Y'' \text{ d'autre part, commutent} \\
&= g(D_Y D_{Y''} v,Y')) - g(D_{Y'} D_{Y''} v,Y) - v^\flat(R(Y,Y')Y'')
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

<u>*Dans le cas général.*</u> Il est alors remarquable que pour tout $s \in [\![1,N']\!]$, la métrique g_z^s des feuilles $\mathcal{Y}_{m_z}^s$ est *indépendante* des coordonnées x et $((y_i^{s'})_{i=1}^{d'_{s'}})_{s' \neq s}$. Les raisonnements effectués dans ce qui précède pour le cas oú $N' = 1$ s'effectuent de la même façon pour

chaque s, dans le cas général, le long de la sous-variété $\cup_z \mathcal{Y}^s_{m_z}$. En effet, le long de cette variété, $\forall i \in [\![1,d'_s]\!], Z \perp Y^s_i$. Les mêmes résultats s'obtiennent alors, et restent vrais en tout p de $\mathcal{M}$ par l'indépendance citée plus haut. Pour tout s, le long de toute feuille $\mathcal{Y}^s_p$:

$$H^{\sigma^s_z} = -\frac{1}{2}\check{h}^s_z.X, \quad R^{\sigma^s_z} = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}_{\check{D}^z}\check{h}^s_z.X \quad \text{et : } \; \mathrm{d}_{\check{D}^z}\check{h}^s_z = \check{D}^z(\mathrm{rot}\, v^s_z) + 2(v^s_z)^{\flat_{\check{g}^s_z}} \circ \check{R}^s.$$

IV.3 Les candidats-holonomies lorentziens : le théorème d'Ikemakhen – Bérard Bergery

Introduisons déjà une définition très utile ici.

Définition 8 *On dira ici qu'une représentation d'une algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ dans un espace vectoriel E « vérifie la propriété de Borel-Lichnérowicz » si $\mathfrak{k}$ admet une décomposition $\mathfrak{k} = \underset{1 \leq i \leq n}{\oplus} \mathfrak{k}_i$ en idéaux $\mathfrak{k}_i$ commutant deux à deux et si E admet une décomposition $E = \underset{0 \leq i \leq n}{\oplus} E_i$ telle que pour tout i, la représentation de $\mathfrak{k}_i$ dans E_i est simple et, pour $j \neq i$, la représentation de $\mathfrak{k}_i$ dans E_j est triviale.*

Proposition 12 (A.Ikemakhen, L.Bérard Bergery) *Soit $(\mathcal{M},g)$ une variété lorentzienne et $m \in \mathcal{M}$, on note $\mathfrak{h}$ l'algèbre d'holonomie restreinte de $\mathcal{M}$. Alors la représentation de $\mathfrak{h}$ dans $\check{\mathbf{X}}^\perp_{\check{m}}$ satisfait la propriété de Borel-Lichnérowicz.*

Rappel de la démonstration, disponible dans [BBI93]. La décomposition de $\check{\mathbf{X}}^\perp_{\check{m}}$ en composantes irréductibles est $\underset{0 \leq s \leq N'}{\oplus} \check{\mathbf{Y}}^s_{\check{m}}$ (la proposition prouve alors qu'une telle décomposition était unique, car les composantes isotypiques de $\check{\mathbf{X}}^\perp_{\check{m}}$ sont alors simples). Il suffit de montrer que, pour tout h dans $\mathfrak{h}$, si h agit effectivement sur $\check{\mathbf{Y}}^s_{\check{m}}$, h agit trivialement sur les $\check{\mathbf{Y}}^{s'}_{\check{m}}$ pour $s' \neq s$. D'après le théorème d'Ambrose-Singer, $\mathfrak{h}$ est engendré par les images des $R(\mathrm{T}_p\mathcal{M},\mathrm{T}_p\mathcal{M})$ par transport parallèle τ_c le long des chemins c de m aux autres points p de $\mathcal{M}$. Comme la distribution $\mathbf{X}^\perp$ est de codimension 1, les $\tau^*_c R(\mathrm{T}_p\mathcal{M},\mathbf{X}^\perp_p)$ suffisent à engendrer $\mathfrak{h}$, donc encore les $\tau^*_c R(\mathrm{T}_p\mathcal{M},\mathbf{Y}^s_p)$ pour tous les s. Or, parmi eux, seuls les $\tau^*_c R(\mathrm{T}_p\mathcal{M},\mathbf{Y}^s_p)$ peuvent agir effectivement sur $\check{\mathbf{Y}}^s_{\check{m}}$. Mais l'action de $\tau^*_c R(\mathrm{T}_p\mathcal{M},\mathbf{Y}^s_p)$ sur $\check{\mathbf{Y}}^{s'}_{\check{m}}$ pour $s' \neq s$ est triviale (*cf* le sous-lemme 9 page 137). C'est le résultat. $\square$

Remarque. Cette démonstration repose sur le fait que $\mathbf{X}^\perp$ est de codimension un et que $\check{\mathbf{X}}^\perp_{\check{m}}$ n'admet pas de sous-espace totalement isotrope stable, donc utilise profondément le fait que $\mathcal{M}$ est *lorentzienne*. Le résultat reste vrai, sous les notations du théorème 1 page 161, dès que $\dim \mathbf{X} = 1$ et $N = 0$, mais n'est pas vrai en général pour une variété pseudo-riemannienne non lorentzienne.

Remarque. La décomposition $\check{\mathbf{X}}^\perp_{\check{m}} = \overset{\perp}{\oplus}{}^{N'}_{s=0} \check{\mathbf{Y}}^s_{\check{m}}$ de $\check{\mathbf{X}}^\perp_{\check{m}}$ en composantes triviale et irréductibles qui apparaît dans le théorème 1 page 167 est donc aussi sa décomposition en composantes isotypiques. En particulier elle est unique.

Enonçons enfin les principaux résultats de [BBI93], ici rassemblés en un seul énoncé.

Théorème 2 (A.Ikemakhen, L.Bérard Bergery) *Soit $(\mathcal{M},g)$ une variété lorentzienne de dimension d, localement réductible, indécomposable, $\mathfrak{h}$ son algèbre d'holonomie restreinte et $m \in \mathcal{M}$. La variété est indécomposable, réductible, donc nécessairement $\dim \mathbf{X}_m = 1$ et $\mathbf{X}_m \subsetneq \mathbf{X}^\perp_m$. Soit β une base de $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$ constituée d'un vecteur non nul de $\mathbf{X}_m$, complété en* *base de $\mathbf{X}_m^\perp$ par des vecteurs orthonormés, puis en base de $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$ par un vecteur dual du premier, orthogonal aux suivants et isotrope. Dans une telle base :*

$$\mathrm{Mat}_\beta(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & I_{d-2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'holonomie restreinte $\mathfrak{h}$ peut alors être de quatre types.

$\boxed{\textbf{type 1}}$ $h \in \mathfrak{h}$ ssi $Mat_\beta(h) = \begin{pmatrix} a & L & 0 \\ 0 & K & -{}^tL \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$ *avec* $a \in \mathbb{R}$, $L \in \mathrm{M}_{d-2,1}(\mathbb{R})$ *et* $K \in \mathfrak{k}$ *où* $\mathfrak{k}$ *est une sous-algèbre de* $\mathfrak{so}_{d-2}(\mathbb{R})$ *dont la représentation naturelle vérifie la propriété de Borel-Lichnérowicz.*

$\boxed{\textbf{type 2}}$ $h \in \mathfrak{h}$ ssi $Mat_\beta(h) = \begin{pmatrix} 0 & L & 0 \\ 0 & K & -{}^tL \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *avec* $L \in \mathrm{M}_{d-2,1}(\mathbb{R})$ *et* $K \in \mathfrak{k}$ *où* $\mathfrak{k}$ *est une sous-algèbre de* $\mathfrak{so}_{d-2}(\mathbb{R})$ *dont la représentation naturelle vérifie la propriété de Borel-Lichnérowicz.*

$\boxed{\textbf{type 3}}$ $h \in \mathfrak{h}$ ssi $Mat_\beta(h) = \begin{pmatrix} \psi(A) & L & 0 \\ 0 & A+S & -{}^tL \\ 0 & 0 & -\psi(A) \end{pmatrix}$ *avec* $L \in \mathrm{M}_{d-2,1}(\mathbb{R})$, $A \in \mathfrak{a}$, $S \in \mathfrak{s}$ *où* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{s}$ *sont deux sous-algèbres de* $\mathfrak{so}_{d-2}(\mathbb{R})$ *qui commutent,* $\mathfrak{a}$ *étant abélienne et* $\mathfrak{s}$ *semi-simple, leur somme* $\mathfrak{k}$ *vérifiant la propriété de Borel-Lichnérowicz ;* ψ *est une forme linéaire* non nulle *de* $\mathfrak{a}$ *dans* $\mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{type 4}}$ $h \in \mathfrak{h}$ ssi *il existe une base du type de β telle que :*

$$Mat_\beta(h) = \begin{pmatrix} 0 & \psi(A) & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -{}^t\psi(A) \\ 0 & 0 & A+S & -{}^tL \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $L \in \mathrm{M}_{1,d^{II}}(\mathbb{R})$, $A \in \mathfrak{a}$, $S \in \mathfrak{s}$ *où* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{s}$ *sont deux sous-algèbres de* $\mathfrak{so}_{d^{II}}(\mathbb{R})$ *qui commutent,* $\mathfrak{a}$ *étant abélienne et* $\mathfrak{s}$ *semi-simple, leur somme* $\mathfrak{k}$ *vérifiant la propriété de Borel-Lichnérowicz ;* ψ *est une application linéaire* surjective *de* $\mathfrak{a}$ *dans* $\in \mathrm{M}_{1,d^I}(\mathbb{R})$ *et* $d^I + d^{II} = d-2$.

IV.4 Deux lemmes

Lemme 5 *Soit* $\mathfrak{k}$ *une sous-algèbre de* $\mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$ *dont la représentation naturelle dans* $(\mathbb{R}^n, <\cdot,\cdot>_{\mathrm{can}})$ *vérifie la propriété de Borel-Lichnérowicz. L'algèbre* $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$ *est réductive donc* $\mathfrak{k} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$ *où* $\mathfrak{a}$*, centre de* $\mathfrak{k}$*, et* $\mathfrak{s}$ *sont des idéaux respectivement abélien et semi-simple de* $\mathfrak{k}$*, qui commutent.*

Alors $\mathbb{R}^n$ *admet la décomposition canonique*

$$(\mathbb{R}^n, <\cdot,\cdot>_{\mathrm{can}}) = E_0 \overset{\perp}{\oplus} E_1 \overset{\perp}{\oplus} E_2 \overset{\perp}{\oplus} E_3$$

où $E_0 \overset{\perp}{\oplus} E_3$ *sont les points fixes de* $\mathfrak{a}$ *et* $E_0 \overset{\perp}{\oplus} E_1$ *ceux de* $\mathfrak{s}$*. Les idéaux* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{s}$ *admettent alors* *des décompositions :*

$$\begin{array}{rcccccc} \mathfrak{a} & = & \mathfrak{a}_1 & \oplus & \mathfrak{a}_2 & & \\ \mathfrak{s} & = & & & \mathfrak{s}_2 & \oplus & \mathfrak{s}_3 \end{array}$$

où :

- *$i \neq j \Rightarrow \mathfrak{a}_i$ et $\mathfrak{s}_i$ agissent trivialement sur E_j,*
- *$E_1 = \overset{\perp}{\underset{1\leq i\leq n_1}{\oplus}} E_1^i$, les E_1^i étant de dimension 2, et : $\mathfrak{a}_1 = \prod_{1\leq i\leq n_1} \mathfrak{so}(E_1^i) \simeq \mathfrak{so}_2(\mathbb{R})^{n_1}$,*
- *E_2 admet la décomposition $\mathfrak{k}$-stable $E_2 = \overset{\perp}{\underset{1\leq i\leq n_2}{\oplus}} E_2^i$, et E_2 est muni d'une structure complexe $J \in \mathfrak{so}(E_2)$ t.q. $J^2 = -\mathrm{Id}$, commutant avec l'action de $\mathfrak{k}$ (chaque E_2^i est donc de dimension paire). On définit alors le produit hermitien $< \cdot,\cdot >_{\mathbb{C}} = < \cdot,\cdot > - i < \cdot,J\cdot >$ et : $\mathfrak{a}_2 = \prod_{1\leq i\leq n_2} \mathrm{vect}_{\mathbb{R}}(i\,\mathrm{Id}_{E_2^i}) \simeq \mathbb{R}^{n_2} \simeq \mathfrak{so}_2(\mathbb{R})^{n_2}$, $\mathfrak{s}_2 = \prod_{1\leq i\leq n_2} \mathfrak{s}_2^i$ où chaque $\mathfrak{s}_2^i$ est une sous-algèbre semi-simple de $\mathfrak{su}(E_2^i,< \cdot,\cdot >_{\mathbb{C}})$, dont la représentation naturelle dans E_2^i est simple,*
- *E_3 admet la décomposition $\mathfrak{k}$-stable $E_3 = \overset{\perp}{\underset{1\leq i\leq n_3}{\oplus}} E_3^i$ et $\mathfrak{s}_3 = \prod_{1\leq i\leq n_3} \mathfrak{s}_3^i$ où chaque $\mathfrak{s}_3^i$ est une algèbre semi-simple de $\mathfrak{so}(E_3^i)$, dont la représentation naturelle dans E_3^i est simple.*

Démonstration. Le lemme repose sur les faits suivants :

- Si $\mathfrak{k}'$ est une sous-algèbre abélienne de $\mathfrak{so}_p(\mathbb{R})$, $\mathfrak{k}' = \prod_i \mathfrak{so}(E_i,< \cdot,\cdot >_{\mathrm{can}})$ où les E_i sont des 2-plans deux à deux orthogonaux de $\mathbb{R}^p$.
- Si $\mathfrak{k}'$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{so}_p(\mathbb{R})$ dont la partie centrale $\mathfrak{a}'$ et la partie semi-simple $\mathfrak{s}'$ agissent chacune sans noyau sur $\mathbb{R}^p$, alors p est pair, $\mathfrak{k}'$ préserve une structure complexe J sur $\mathbb{R}^p$ et :

$$\mathbb{R}^p = \overset{\perp}{\oplus}_i E_i \text{ et : } \mathfrak{k}' \subset \prod_i \mathfrak{u}(E_i,J).$$

La partie centrale $\mathfrak{a}'$ est alors incluse dans le produit des parties centrales et la partie semi-simple $\mathfrak{a}'$ dans le produit des parties semi-simples $\prod_i \mathfrak{su}(E_i,J)$. □

Reprenons ici les notations du théorème 2 page 201. L'application linéaire ψ qui apparaît dans l'énoncé des types 3 et 4 d'holonomie, est la lecture dans la base β d'une application linéaire, qu'on notera encore ψ, de la nature suivante :

- **Dans le type 3,** ψ est une application linéaire d'une certaine sous-algèbre abélienne $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{so}(\check{\mathbf{X}}_{\check{m}}^{\perp},\check{g}_{|\check{m}})$ dans $\mathrm{L}(\mathbf{X}_m)$,
- **Dans le type 4,** $\check{\mathbf{X}}_{\check{m}}^{\perp}$ se décompose en deux sous-espaces de dimensions respectives d^I et d^{II} : $\check{\mathbf{X}}_{\check{m}}^{\perp} = \check{\mathbf{Y}}_{\check{m}}^{I} \overset{\perp}{\oplus} \check{\mathbf{Y}}_{\check{m}}^{II}$; ψ est une application linéaire d'une certaine sous-algèbre abélienne de $\mathfrak{so}(\check{\mathbf{Y}}_{\check{m}}^{II},\check{g})$ dans $\mathrm{L}(\check{\mathbf{Y}}_{\check{m}}^{I},\mathbf{X}_m)$.

Ainsi considérée, l'application linéaire ψ vérifie le lemme suivant.

Lemme 6 • *Cette application linéaire ψ — donc en particulier ses ensembles de départ et d'arrivée — est stable par holonomie restreinte ; elle se prolonge par transport parallèle à un voisinage de m dans $\mathcal{M}$; on note toujours ψ ce prolongement.*

- *une variété lorentzienne indécomposable $(\mathcal{M},g)$ est du* **type 3** ssi

– *l'image de l'holonomie restreinte $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{so}(\check{\mathbf{X}}^{\perp}_{\check{m}},\check{g}_{|\check{m}})$ est la somme de deux algèbres $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{s}$ comme dans l'énoncé du théorème 2,*

– *en tout point p de $\mathcal{M}$, pour tous A et B dans $\mathrm{T}_p\mathcal{M}$, $R(A,B)_{|\mathbf{X}_p} = \psi[(R(A,B)_{|\check{\mathbf{X}}^{\perp}_{\check{p}}})_{\mathfrak{a}}]$ où $(R(A,B)_{|\check{\mathbf{X}}^{\perp}_{\check{p}}})_{\mathfrak{a}}$ désigne le projeté de $R(A,B)_{|\check{\mathbf{X}}^{\perp}_{\check{p}}}$ sur la composante $\mathfrak{a}$ de l'action de l'holonomie sur $\check{\mathbf{X}}^{\perp}_{\check{p}}$.*

- *une variété lorentzienne indécomposable $(\mathcal{M},g)$ est du* **type 4** ssi

– *l'holonomie agit trivialement sur $\mathbf{X}$,*

– *$\check{\mathbf{X}}^{\perp}_{\check{m}} = \check{\mathbf{Y}}^{I}_{\check{m}} \overset{\perp}{\oplus} \check{\mathbf{Y}}^{II}_{\check{m}}$ et l'image de l'holonomie restreinte $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{so}(\check{\mathbf{X}}^{\perp}_{\check{m}},\check{g}_{|\check{m}})$ est la somme de deux sous-algèbres $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{so}(\check{\mathbf{Y}}^{II}_{\check{m}},\check{g}_{|\check{\mathbf{Y}}^{II}_{\check{m}}})$ comme dans l'énoncé du théorème 2,*

– *en tout point p de $\mathcal{M}$, pour tous A et B dans $\mathrm{T}_p\mathcal{M}$, $R(A,B)_{|\mathbf{Y}^{I}_{p}} = \psi[(R(A,B)_{|\check{\mathbf{Y}}^{II}_{\check{p}}})_{\mathfrak{a}}]$ où $(R(A,B)_{|\check{\mathbf{Y}}^{II}_{\check{p}}})_{\mathfrak{a}}$ désigne le projeté de $R(A,B)_{|\check{\mathbf{Y}}^{II}_{\check{p}}}$ sur la composante $\mathfrak{a}$ de l'action de l'holonomie sur $\check{\mathbf{Y}}^{II}_{\check{p}}$.*

Démonstration. L'application linéaire ψ est stable par holonomie, *i.e.* l'holonomie agit trivialement sur ses ensembles de départ et d'arrivée. Ces espaces sont eux-mêmes des espaces d'applications linéaires du type $L \subset L(A,B)$; cela revient donc à dire que A et B sont stables par holonomie et que l'holonomie commute avec L. C'est justement le cas :

- si $\mathcal{M}$ est de type 3, $\mathbf{X}_m$ et $\mathbf{X}^{\perp}_m$ sont stables par holonomie, donc l'action de l'holonomie dur $\check{\mathbf{X}}^{\perp}_{\check{m}}$ est bien définie. Comme $\dim \mathbf{X} = 1$, $\mathrm{L}(\mathbf{X}_m)$ est abélien. D'autre part, par définition, ψ est à variables dans $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{so}(\check{\mathbf{X}}^{\perp}_{\check{m}},\check{g}_{|cm})$ qui commute avec $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$ l'action de $\mathfrak{h}$ sur $\check{\mathbf{X}}^{\perp}_{\check{m}}$.

- si $\mathcal{M}$ est de type 4, par définition, $\mathbf{X}_m$, $\mathbf{Y}^{I}_m$ et $\mathbf{Y}^{II}_m$ sont stables par holonomie, l'action de l'holonomie sur $\check{\mathbf{Y}}^{I}_{\check{m}}$ et $\check{\mathbf{Y}}^{II}_{\check{m}}$ est donc aussi bien définie. Comme l'holonomie agit trivialement sur $\check{\mathbf{Y}}^{I}_{\check{m}}$, sa représentation dans $\mathrm{L}(\mathbf{Y}^{I}_m,\mathbf{Y}^{I}_m)$ est en fait dans $\mathrm{L}(\mathbf{Y}^{I}_m,\mathbf{X}_m)$ et est abélienne. D'autre part, de la même façon que plus haut, ψ est à variables dans $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{so}(\check{\mathbf{Y}}^{II}_{\check{m}},\check{g}_{|cm})$ qui commute avec $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$ l'action de $\mathfrak{h}$ sur $\check{\mathbf{Y}}^{II}_{\check{m}}$.

Les deux autres points résultent alors directement du théorème d'Ambrose-Singer : l'holonomie restreinte est engendrée par les transportés parallèles le long de tous les chemins de m à tout point p de $\mathcal{M}$, des $R(A,B)$ pour tous A et B de $\mathrm{T}_p\mathcal{M}$. □

Un choix plus précis de coordonnées pour les variétés de type 4. Si $(\mathcal{M},g)$ est de type 4, $\check{\mathbf{X}}^{\perp}_{\check{m}}$ se décompose canoniquement en deux sous-espaces $\check{\mathbf{Y}}^{I}_{\check{m}}$ et $\check{\mathbf{Y}}^{II}_{\check{m}}$. Le premier est nécessairement inclus dans $\check{\mathbf{Y}}^{0}_{\check{m}}$. On notera alors, dans ce cas :

$$\check{\mathbf{Y}}^{0,I}_{\check{m}} = \check{\mathbf{Y}}^{I}_{\check{m}} \quad \text{et : } \check{\mathbf{Y}}^{0,II}_{\check{m}} = (\check{\mathbf{Y}}^{I}_{\check{m}})^{\perp} \cap \check{\mathbf{Y}}^{0}_{\check{m}} = \check{\mathbf{Y}}^{II}_{\check{m}} \cap \check{\mathbf{Y}}^{0}_{\check{m}}.$$

Les coordonnées $(y^0_i)_{i=1}^{d'_0}$ du théorème 1 page 161 peuvent alors être choisies telles que les d^I premières coordonnées paramètrent, avec x, les feuilles intégrales $\mathcal{Y}^{0,I}_p$ de la distribution $\check{\mathbf{Y}}^{0,I}$. Les $d'_0 - d^I$ dernières paramètrent alors nécessairement les feuilles intégrales $\mathcal{Y}^{0,II}_p$, orthogonales, de la distribution $\check{\mathbf{Y}}^{0,II}$.

IV.5 Classification locale des variétés lorentziennes suivant leur holonomie

Théorème 3 *Soit $(\mathcal{M},g)$ un ouvert d'une variété lorentzienne localement réductible et indécomposable, sur lequel sont définies des coordonnées du type donné par le théorème*

1 page 161. Alors :

(a) $(\mathcal{M},g)$ *est de type 1 ou 3* ssi $(\gamma - \mathrm{d}x)$ *n'est pas image réciproque par* π *d'une forme différentielle* $\check{\gamma}$ *de* $\check{\mathcal{M}}$.

(b) $(\mathcal{M},g)$ *est de type 2 ou 4* ssi $(\gamma - \mathrm{d}x)$ *est image réciproque par* π *d'une forme différentielle* $\check{\gamma}$ *de* $\check{\mathcal{M}}$.

(c) $(\mathcal{M},g)$ *est de type 3* ssi *elle est de type 1 ou 3 et que les composantes isotypiques (irréductibles sauf* $\check{\mathbf{Y}}^0_{\check{m}}$ *par la proposition 12) sont de trois types :*

$$\check{\mathbf{X}}^\perp_{\check{m}} = \check{\mathbf{Y}}^0_{\check{m}} \overset{\perp}{\oplus} \left(\overset{\perp}{\underset{1\leq s\leq N'_1}{\oplus}} \check{\mathbf{Y}}^s_{\check{m}} \right) \overset{\perp}{\oplus} \left(\overset{\perp}{\underset{N'_1+1\leq s\leq N'}{\oplus}} \check{\mathbf{Y}}^s_{\check{m}} \right)$$

avec $N'_1 \geq 1$ *et :*

- $\check{\mathbf{Y}}^0_{\check{m}}$ *est la composante triviale de l'action de* $\mathfrak{h}$ *sur* $\check{\mathbf{X}}^\perp_{\check{m}}$,
- *pour* $s \in [\![1,N'_1]\!]$, *pour tout point* $\check{p}$ *de* $\check{\mathcal{M}}$, *les feuilles* $\check{\mathcal{Y}}^s_{\check{p}}$ *sont kähleriennes Ricci-plates de dimension réelle paire* d'_s *et l'action induite de l'holonomie restreinte de* $\mathcal{M}$ *sur* $\check{\mathbf{Y}}^s_{\check{m}}$ *est* $\mathrm{vect}(J^s) \oplus \mathfrak{s}'_s$ *où* J^s *désigne la structure complexe de* $\check{\mathcal{Y}}^s_{\check{m}}$ *et où* $\mathfrak{s}'_s$ *est une sous-algèbre de* $\mathfrak{su}(\check{\mathbf{Y}}^s_{\check{m}},\check{g}_{|\check{\mathbf{Y}}^s_{\check{m}}},J^s)$ *dont la représentation dans* $\check{\mathbf{Y}}^s_{\check{m}}$ *est simple.*
- *il existe un* N'_1 *uplet de réels non nuls* $(\lambda^s)_{s=1}^{N'_1}$ *tel que en tt point* p *:*

$$\forall s \in [\![1,N'_1]\!], \forall i \in [\![1,d'_s]\!], \gamma(X) \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\gamma(X)} \cdot \frac{\partial \gamma(X)}{\partial y^s_i} \right) \right) = \lambda^s \left[\mathrm{tr}_{\check{g}_z} (\, \mathrm{d}_{\check{D}^z} \check{h}^s_z(\,\cdot\,,J^s \cdot\, ,\check{Y}^s_i)) \right]$$

  et telle que pour chaque s *de* $[\![1,N'_1]\!]$, *cette expression n'est pas identiquement nulle comme fonction de* p.
- $\forall s \in [\![N'_1+1,N']\!], \forall i \in [\![1,d'_s]\!], \dfrac{\partial \gamma(X)}{\partial y^s_i} = 0$ *et :* $\dfrac{\partial \gamma(X)}{\partial x} = 0.$

(d) $(\mathcal{M},g)$ *est de type 4* ssi *elle est de type 2 ou 4 et que les composantes isotypiques (irréductibles sauf* $\check{\mathbf{Y}}^0_{\check{m}}$ *par la proposition 12) sont de trois types :*

$$\check{\mathbf{X}}^\perp_{\check{m}} = \check{\mathbf{Y}}^0_{\check{m}} \overset{\perp}{\oplus} \left(\overset{\perp}{\underset{1\leq s\leq N'_1}{\oplus}} \check{\mathbf{Y}}^s_{\check{m}} \right) \overset{\perp}{\oplus} \left(\overset{\perp}{\underset{N'_1+1\leq s\leq N'}{\oplus}} \check{\mathbf{Y}}^s_{\check{m}} \right)$$

avec les mêmes propriétés qu'au point **(c)** *et, en reprenant le choix de la page 204 :*

- *il existe un* N'_1 *uplet* $(\lambda^s)_{s=1}^{N'_1}$ *d'éléments non nuls de* $(\check{\mathbf{Y}}^{0,I})^*$ *tel qu'en tt point* p *:*

$$\forall s \in [\![1,N'_1]\!], \forall i \in [\![1,d'_s]\!], \forall l \in [\![1,d^I]\!], \frac{\partial^2 \gamma(Y^0_l)}{\partial y^s_i \partial z} = \lambda^s \left[\mathrm{tr}_{\check{g}_z} (\, \mathrm{d}_{\check{D}^z} \check{h}^s_z(\,\cdot\,,J^s \cdot\, ,\check{Y}^s_i)) \right]$$

  et l'application à variable dans $\mathbf{Y}^{0,I}_p$ *:*

$$Y^0_l \mapsto \left(\frac{\partial^2 \gamma(Y^0_l)}{\partial y^s_i \partial z} \right)_{1\leq s\leq N'_1;\, 1\leq i\leq d'_s}$$

  est de noyau $\mathbf{X}_p$,
- $\forall s \in [\![N'_1+1,N']\!], \forall i \in [\![1,d'_s]\!], \forall l \in [\![1,d^I]\!], \dfrac{\partial \gamma(Y^0_l)}{\partial y^s_i} = 0$ *et :*

$$\forall i \in [\![d^I+1,d'_0]\!], \forall l \in [\![1,d^I]\!], \frac{\partial \gamma(Y_l^0)}{\partial y_i^0} = 0.$$

(e) *De plus, la quantité* $\mathrm{tr}_{\check{g}_z}(\,\mathrm{d}_{\check{D}^z}\check{h}_z^s(\,\cdot\,,J^s\cdot\,,\check{Y}_i^s))$ *s'exprime de façon plus précise en fonction de* v_z^s *et de* $\tilde{\check{h}}_z^s$ *:*

$$\mathrm{tr}_{\check{g}_z}(\,\mathrm{d}_{\check{D}^z}\check{h}_z^s(\,\cdot\,,J^s\cdot\,,\check{Y}_i^s)) = L_{\check{Y}_i^s}(\mathrm{tr}_{\check{g}}(\mathrm{rot}\, v_z^s(\,\cdot\,,J^s\cdot\,))) - L_{J\check{Y}_i^s}(\mathrm{tr}_{\check{g}}\,\tilde{\check{h}}_z^s).$$

Cas particulier. Le dernier point du théorème s'exprime de façon particulière pour les indices s de $[\![1,N'_1]\!]$ tels que $d'_s = \dim \check{\mathbf{Y}}^s = 2$, s'il y en a. En effet, dans ce cas :

- Pour tout p de $\mathcal{M}$, la variété $\check{\mathcal{Y}}_{\check{p}}^s$, Ricci-plate de dimension deux, est *plate.*
- En particulier, toutes les feuilles $\check{\mathcal{Y}}_{\check{m}_z}^s$ sont plates et la déformation de g_z^s est purement le produit de l'action d'un difféomorphisme :

$$\exists (\varphi_z^s)_z \ : \ \check{g}_z = \varphi_z^* \check{g}_0\,; \quad \text{si } v_z^s = \frac{\partial}{\partial z}\varphi_z, \quad \check{h}_z^s = \check{\delta}_{\check{g}}^* v_z^{s\flat_{\check{g}}}, \ \ \tilde{\check{h}}_z^s = 0.$$

Donc en tout point $\check{p}$:

$$\mathrm{tr}_{\check{g}_z}(\,\mathrm{d}_{\check{D}^z}\check{h}_z^s(\,\cdot\,,J^s\cdot\,,\check{Y}_i^s)) = \frac{1}{2} L_{\check{Y}_i^s}(\mathrm{rot}\, v_z^s),$$

où $\mathrm{rot}\, v_z^s$ est le coefficient de proportionnalité entre $\mathrm{rot}\, v_z^s(\,\cdot\,,\cdot\,)$ et la forme volume de $\check{\mathcal{Y}}_{\check{p}}^s$. En effet, si Y est un vecteur $\check{g}$-normé de $\check{\mathbf{Y}}_{\check{p}}^s$, $(Y,J.Y)$ est une base $\check{g}$-orthonormée de $\check{\mathbf{Y}}_{\check{p}}^s$ et :

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}_{\check{g}}(\mathrm{rot}\, v_z^s(\,\cdot\,,J^s\cdot\,)) &= \mathrm{rot}\, v_z^s(Y,J^sY) + \mathrm{rot}\, v_z^s(J^s.Y,(J^s)^2Y)\\
&= \mathrm{rot}\, v_z^s(Y,J^sY) - \mathrm{rot}\, v_z^s(J^s.Y,Y)\\
&= \mathrm{rot}\, v_z^s(Y,J^sY) + \mathrm{rot}\, v_z^s(Y,J^s.Y)\\
&= 2\,\mathrm{rot}\, v_z^s(Y,J^s.Y) = 2\,\mathrm{rot}\, v_z^s.
\end{aligned}$$

La quantité $\mathrm{rot}\, v_z^s$ s'appelle également *vorticité* de l'écoulement φ_z au temps z.

Remarque. Une variété lorentzienne $(\mathcal{M},g)$ munie de coordonnées du type du théorème 1 est donc de type 3 ou 4 *ssi* il existe un certain lien entre sa forme γ d'une part, donc son défaut à être une fibration riemannienne en $\prod_{s=0}^{N'}((\check{\mathcal{Y}}_{\check{m}_z}^s),\check{g}_{|\check{\mathcal{Y}}_{\check{m}_z}^s})$ sur une base de signature (1,1), et le défaut de certains fibrés $\mathcal{Y}_p^s \to \check{\mathcal{Y}}_{\check{p}}^s$ à être produit. En effet, d'après la proposition 9 page 197 :

$$\mathrm{tr}_{\check{g}_z}(\,\mathrm{d}_{\check{D}^z}\check{h}_z(\,\cdot\,,J^s\cdot\,,\check{Y}_i^s)).X = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}_{\check{g}_z}(R^{\sigma_z}((\,\cdot\,,J^s\cdot)\check{Y}_i^s)).$$

Le point **(e)** du théorème découle du lemme suivant :

Lemme 7 *Soit* $(\mathcal{M},g,J)$ *une variété kählerienne munie de* g *sa métrique réelle et de* J *sa structure complexe et soit* h *une forme bilinéaire symétrique sur* $\mathcal{M}$*. On pose* v *un champ de vecteurs tel que :*

$$h = \delta^* v^\flat + \tilde{h} \quad \textit{et:} \quad \delta\tilde{h} = 0.$$

Alors, en tout point p *de* $\mathcal{M}$ *et pour tout* $A \in \mathrm{T}_p\mathcal{M}$ *:*

$$\mathrm{tr}_g(\,\mathrm{d}_D h(\,\cdot\,,J\cdot\,,A)) = L_A(\mathrm{tr}_g(\mathrm{rot}\, v(\,\cdot\,,J\cdot\,))) - 2\,\mathrm{tr}(R(A,v)\circ J) - L_{J.A}(\mathrm{tr}_g(\tilde{h})).$$

Démonstration.

Remarque 1. Nous n'utiliserons pas ici toute la richesse du calcul kählerien ; introduisons seulement la remarque élémentaire suivante, qui suffit ici. Si (E,g,J) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2d$ muni de g forme bilinéaire symétrique définie positive et de J structure complexe (*i.e.* J est g-antiautoadjoint et $J^2 = \mathrm{Id}$) et si a est une forme bilinéaire antisymétrique sur E alors, pour toute base $(Y_i)_{i=1}^d$ orthonormée de E vu comme espace complexe hermitien :

$$\mathrm{tr}_g(a(\,\cdot\,,J\cdot\,)) = 2\sum_{i=1}^{d} a(Y_i,J.Y_i).$$

Soit en effet $(Y_i)_{i=1}^d$ une telle base, alors notamment $(Y_i,J.Y_i)_{i=1}^d$ est une base réelle de E, g-orthonormée et donc $\mathrm{tr}_g(a(\,\cdot\,,J\cdot\,)) = \sum_{i=1}^d a(Y_i,J.Y_i) + a(J.Y_i,J^2.Y_i) = \sum_{i=1}^d a(Y_i,J.Y_i) - a(J.Y_i,Y_i)$. D'autre part, a se décompose canoniquement en deux formes antisymétriques : $a = a^+ + a^-$, telles que J est a^+-autoadjoint et a^--antiautoadjoint. Alors $a^+(\,\cdot\,,J\cdot\,)$ est antisymétrique : $a^+(A,J.B) = a^+(J.A,B) = -a^+(B,J.A)$ et de même $a^-(\,\cdot\,,J\cdot\,)$ est symétrique. Alors :

$$\begin{aligned}
2\sum_{i=1}^{d} a(Y_i,J.Y_i) &= 2\sum_{i=1}^{d} \underbrace{a^+(Y_i,J.Y_i)}_{=0} + a^-(Y_i,J.Y_i)\\
&= \sum_{i=1}^{d} a^-(Y_i,J.Y_i) - \sum_{i=1}^{d} a^-(J.Y_i,Y_i)\\
&= \mathrm{tr}_g(a^-(\,\cdot\,,J\cdot\,)) = \mathrm{tr}_g(a(\,\cdot\,,J\cdot\,))\\
&\qquad \text{car } a^+ \text{ est antisymétrique, donc de trace nulle.}
\end{aligned}$$

Remarque 2. Soit $(\mathcal{M},g)$ une variété riemannienne, m un point de $\mathcal{M}$, $(Y_i)_{i=1}^d$ une base orthonormée de $(\mathrm{T}_m\mathcal{M},g_{|m})$ et $h \in \mathrm{S}^2(\mathrm{T}^*\mathcal{M})$. Alors :

$$\forall A \in \mathrm{T}_m\mathcal{M}, (\delta h(A))_{|m} = -\frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{d} 2(D_{Y_i}h)(Y_i,A) + L_A(\mathrm{tr}_g\, h)\right).$$

C'est une simple vérification.

$$\begin{aligned}
(\delta h(A))_{|m} &= -\,\mathrm{tr}_g(B,C \mapsto \delta^* h(B,C,A))\\
&= -\,\mathrm{tr}_g\left(B,C \mapsto \frac{1}{3}\left(D_B h(C,A) + D_C h(A,B) + D_A h(B,C)\right)\right)\\
&= -\frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{d} D_{Y_i}h(Y_i,A) + D_{Y_i}h(A,Y_i) + D_A h(Y_i,Y_i)\right).
\end{aligned}$$

D'où le résultat annoncé par symétrie de h.

Montrons donc le lemme. Soit $2d$ la dimension réelle de $\mathcal{M}$, $(Y_i)_{i=1}^d$ une base orthonormée de $\mathrm{T}_p\mathcal{M}$ vu comme espace hermitien. La 2-forme $\mathrm{d}_D h(\,\cdot\,,J\,\cdot\,,A)$ est antisymétrique donc par la remarque 1 :

$$\mathrm{tr}_g(\,\mathrm{d}_D h(\,\cdot\,,J\,\cdot\,,A)) = 2\sum_{i=1}^{d} \mathrm{d}_D h(Y_i,J.Y_i,A).$$

Puis, par la proposition 11 page 199 :

$$2\sum_{i=1}^{d} \mathrm{d}_D h(Y_i,J.Y_i,A) = 2\sum_{i=1}^{d}(D_A \operatorname{rot} v)(Y_i,J.Y_i) + 2g(R(Y_i,J.Y_i).A,v) + \mathrm{d}_D\tilde{h}(Y_i,J.Y_i,A).$$

Alors, encore par la remarque 1 : $2\sum_{i=1}^{d}(D_A \operatorname{rot} v)(Y_i,J.Y_i) = L_A(\mathrm{tr}_g(\operatorname{rot} v(\,\cdot\,,J\,\cdot\,)))$ et :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{d} 4g(R(Y_i,J.Y_i).A,v) &= -4\sum_{i=1}^{d} g(R(A,v).J.Y_i,Y_i)\\ &= -2\,\mathrm{tr}_g[g(R(A,v)\circ J\ \cdot\,,\cdot\,)] \qquad \text{(Remarque 1)}\\ &= -2\,\mathrm{tr}(R(A,v)\circ J).\end{aligned}$$

Reste à examiner le dernier terme. La forme bilinéaire symétrique $\tilde{h}$ se décompose canoniquement en deux formes bilinéaires symétriques, sa partie hermitienne $\tilde{h}_{\mathsf{H}}$ et antihermitienne $\tilde{h}_{\mathsf{A}}$:

$$\tilde{h} = \tilde{h}_{\mathsf{H}} + \tilde{h}_{\mathsf{A}} \text{ où } J \text{ est } \tilde{h}_{\mathsf{H}}\text{-antiautoadjoint et } \tilde{h}_{\mathsf{A}}\text{-autoadjoint.}$$

D'autre part, par construction, $\delta\tilde{h} = 0$. D'après le lemme 12.94 de [Bes87], on a alors également : $\delta\tilde{h}_{\mathsf{H}} = \delta\tilde{h}_{\mathsf{A}} = 0$. La famille $(\overline{Y}_j)_{j=1}^{2d} = (Y_i,J.Y_i)_{i=1}^{d}$ est une base g-orthonormée réelle de $\mathrm{T}_p\mathcal{M}$ et :

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{d} \mathrm{d}_D\tilde{h}(Y_i,J.Y_i,A)\\ =&\sum_{i=1}^{d} \mathrm{d}_D\tilde{h}_{\mathsf{H}}(Y_i,J.Y_i,A) + \mathrm{d}_D\tilde{h}_{\mathsf{A}}(Y_i,J.Y_i,A)\\ =&\sum_{i=1}^{d}(D_{Y_i}\tilde{h}_{\mathsf{H}})(J.Y_i,A) - (D_{J.Y_i}\tilde{h}_{\mathsf{H}})(Y_i,A) + (D_{Y_i}\tilde{h}_{\mathsf{A}})(J.Y_i,A) - (D_{J.Y_i}\tilde{h}_{\mathsf{A}})(Y_i,A)\\ =&\sum_{i=1}^{d} -(D_{Y_i}\tilde{h}_{\mathsf{H}})(Y_i,J.A) - (D_{J.Y_i}\tilde{h}_{\mathsf{H}})(J.Y_i,J.A) + (D_{Y_i}\tilde{h}_{\mathsf{A}})(Y_i,J.A) + (D_{J.Y_i}\tilde{h}_{\mathsf{A}})(J.Y_i,J.A)\\ =&\sum_{j=1}^{2d} -(D_{\overline{Y}_j}\tilde{h}_{\mathsf{H}})(\overline{Y}_j,J.A) + (D_{\overline{Y}_j}\tilde{h}_{\mathsf{A}})(\overline{Y}_j,J.A)\\ =&\frac{3}{2}(\delta\tilde{h}_{\mathsf{H}})(J.A) - \frac{1}{2}L_A(\mathrm{tr}_g\,\tilde{h}_{\mathsf{H}}) - \frac{3}{2}(\delta\tilde{h}_{\mathsf{A}})(J.A) + \frac{1}{2}L_A(\mathrm{tr}_g\,\tilde{h}_{\mathsf{A}}) \qquad \text{par la Remarque 2}\\ =&-\frac{1}{2}L_A(\mathrm{tr}_g\,\tilde{h}_{\mathsf{H}}) + \frac{1}{2}L_A(\mathrm{tr}_g\,\tilde{h}_{\mathsf{A}}) \qquad \text{car } \delta\tilde{h}_{\mathsf{H}} = \delta\tilde{h}_{\mathsf{A}} = 0.\end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}_g \tilde{h}_{\mathsf{A}} &= \sum_{j=1}^{2d} \tilde{h}_{\mathsf{A}}(\overline{Y}_j,\overline{Y}_j)\\
&= \sum_{i=1}^{d} \tilde{h}_{\mathsf{A}}(Y_i,Y_i) + \tilde{h}_{\mathsf{A}}(J.Y_i,J.Y_i)\\
&= \sum_{i=1}^{d} \tilde{h}_{\mathsf{A}}(Y_i,Y_i) - \tilde{h}_{\mathsf{A}}(Y_i,Y_i) = 0,
\end{aligned}$$

donc $\operatorname{tr}_g \tilde{h} = \operatorname{tr}_g \tilde{h}_{\mathsf{H}}$ et le résultat suit. □

Démonstration du théorème.

Les points **(a)** et **(b)** sont l'expression directe de la proposition 5 page 167. Le point **(e)** provient du lemme 7. En effet, chaque variété $\check{\mathcal{Y}}^s_{\check{p}}$ pour $s \in [\![1,N'_1]\!]$ est kählerienne, Ricci plate ; son holonomie est donc dans $\mathfrak{su}(\check{\mathbf{Y}}^s_{\check{p}})$ et est donc de trace complexe nulle :

$$\operatorname{tr}(\check{R}_z(Y^s_i,v^s_z) \circ J^s) = 0$$

L'application du lemme 7 donne alors la relation **(e)**. Les points **(c)** et **(d)** découlent de quelques remarques et du lemme 6 page 203.

Supposons $(\mathcal{M},g)$ de type 1 ou 3. Soit $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{so}(\check{\mathbf{X}}^{\perp}_{\check{m}},\check{g}_{|\check{m}})$ la représentation de l'holonomie restreinte $\mathfrak{h}$ dans $\check{\mathbf{X}}^{\perp}_{\check{m}}$. Cette dernière vérifie, par la proposition 12 page 201, la propriété de Borel-Lichnérowicz. Alors : $\check{\mathbf{X}}^{\perp}_{\check{m}} = \overset{\perp}{\underset{0\leq s\leq N'}{\oplus}} \check{\mathbf{Y}}^s_{\check{m}}$ et : $\mathfrak{k} = \underset{1\leq s\leq N'}{\oplus} \mathfrak{k}^s$ où l'action de $\mathfrak{k}^s$ sur $\check{\mathbf{Y}}^{s'}_{\check{m}}$ est irréductible *ssi* $s' = s$, triviale sinon. On note pour tout s $\mathfrak{k}^s = \mathfrak{a}^s \oplus \mathfrak{s}^s$ la décomposition de $\mathfrak{k}^s$ en son centre $\mathfrak{a}^s$ et sa partie semi-simple $\mathfrak{s}^s$.

Par le lemme 6 page 203, l'action de l'holonomie par conjugaison sur $\oplus_s\mathfrak{a}^s$ et $\mathrm{L}(\mathbf{X}_m)$ est triviale et $(\mathcal{M},g)$ est de type 3 *ssi* il existe une application linéaire linéaire non nulle ψ de $\oplus_s\mathfrak{a}^s$ dans $\mathrm{L}(\mathbf{X}_m)$ telle que, en tout point p de $\mathcal{M}$, pour tous A et B dans $\mathrm{T}_p\mathcal{M}$, $R(A,B)_{|\mathbf{X}_p} = \psi[(R(A,B)_{|\check{\mathbf{X}}^{\perp}_{\check{p}}})_{\mathfrak{a}}]$ où $(R(A,B)_{|\check{\mathbf{X}}^{\perp}_{\check{p}}})_{\mathfrak{a}}$ désigne le projeté de $R(A,B)_{|\check{\mathbf{X}}^{\perp}_{\check{p}}}$ sur la composante $\mathfrak{a} = \oplus_{s=1}^{N'}\mathfrak{a}^s$ de l'action de l'holonomie sur $\check{\mathbf{X}}^{\perp}_{\check{p}}$.

Si une telle application linéaire ψ existe, on renumérote les indices s de $[\![1,N']\!]$ de sorte qu'il existe $N'_1 \in [\![1,N']\!]$ t.q. : $\mathfrak{a}^s \subset \ker\psi \Leftrightarrow s > N'_1$. Comme $\psi \neq 0$, N'_1 est effectivement non nul. Nécessairement alors par le lemme 5 page 202, pour tout s de $[\![1,N'_1]\!]$, $\check{\mathbf{Y}}^s_{\check{m}}$ possède une structure complexe J^s stable par holonomie, $\mathfrak{k}^s \subset \mathfrak{u}(\check{\mathbf{Y}}^s_{\check{m}},\check{g}^s_{|\check{m}},J^s)$, $\mathfrak{a}^s = \mathrm{vect}(J)$ et $\mathfrak{s}^s$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{su}(\check{\mathbf{Y}}^s_{\check{m}},\check{g}^s_{|\check{m}},J^s)$ dont la représentation dans $\check{\mathbf{Y}}^s_{\check{m}}$ est semi-simple. On choisit alors en tout point $\check{p}$ de $\check{\mathcal{M}}$ une base orthonormée $(\overline{Y}^s_i)_{i=1}^{d'_s/2}$ de $\check{\mathbf{Y}}^s_{\check{p}}$ vu comme espace hermitien. Alors pour tout s de $[\![1,N'_1]\!]$ et tous A et B de $\mathrm{T}_p\mathcal{M}$:

$$(R(A,B)_{|\check{\mathbf{Y}}^s_{\check{p}}})_{\mathfrak{a}^s}) = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{d'_s/2} \check{g}(\check{R}(\check{A},\check{B})\overline{Y}^s_i,J.\overline{Y}^s_i)\right)}_{\text{indépendant du choix de } (\overline{Y}^s_i)_{i=1}^{d'_s/2}}.J^s.$$

Alors :

$(\mathcal{M},g)$ est de type 3

ssi il existe ψ linéaire non nulle t.q. pour tout p de $\mathcal{M}$ et tous A et B de $\mathrm{T}_p\mathcal{M}$, $R(A,B)_{|\mathbf{X}_p} = \psi[(R(A,B)_{|\check{\mathbf{X}}_{\check{p}}^{\perp}})_{\mathfrak{a}}]$ et pour tout s de $[\![1,N_1']\!]$, $(R(\,\cdot\,,\cdot\,)_{|\check{\mathbf{Y}}_{\check{p}}^s})_{\mathfrak{a}^s}$ est surjectif sur $\mathfrak{a}^s$

ssi il existe N_1' dans $[\![1,N']\!]$ et $(\lambda^s)_{s=1}^{N_1'} \in (\mathbb{R}^*)^{N_1'}$ t.q pour tout p de $\mathcal{M}$ et tous A et B de $\mathrm{T}_p\mathcal{M}$:

$$g(R(A,B)X,Z) = \sum_{s=1}^{N_1'} \lambda^s \left[\sum_{i=1}^{d_s'/2} \check{g}(\check{R}(\check{A},\check{B})\overline{Y}_i^s,J.\overline{Y}_i^s)\right]$$

et que la condition de surjectivité énoncée plus haut est vérifiée.

Remarquons alors que :

- Si $(A,B) \in (\mathbf{X}_p^{\perp})^2$, $g(R(A,B)X,Z) = 0$, (voir sous-lemme 9 page 137)
- Si $A \in \oplus_{s'\neq s}\mathbf{Y}_p^{s'}$, alors : $\forall C \in \mathrm{T}_p\mathcal{M}$, $\forall i \in [\![1,d_s'/2]\!], \check{g}(\check{R}(\check{A},\check{C})\overline{Y}_i^s,J.\overline{Y}_i^s) = 0$ (idem).

Par conséquent :

$(\mathcal{M},g)$ est de type 3

ssi il existe N_1' dans $[\![1,N']\!]$ et $(\lambda^s)_{s=1}^{N_1'} \in (\mathbb{R}^*)^{N_1'}$ t.q pour tout p de $\mathcal{M}$ et tout s de $[\![1,N_1']\!]$:

$$\begin{cases}
\forall A,B \in \mathbf{Y}^s,\ \sum_{i=1}^{d_s'/2} \check{g}(\check{R}(\check{A},\check{B})\overline{Y}_i^s,J.\overline{Y}_i^s) = \frac{1}{\lambda^s} g(R(A,B)X,Z) = 0 \\
\forall s' > N_1', \forall A \in \mathbf{Y}_p^{s'}, g(R(A,Z)X,Z) = \sum_{s=1}^{N_1'} \lambda^s \left[\sum_{i=1}^{d_s'/2} \check{g}(\check{R}(\check{A},\check{Z})\overline{Y}_i^s,J.\overline{Y}_i^s)\right] = N_1'.0 = 0 \\
\forall A \in \mathbf{Y}_p^s, g(R(A,Z)X,Z) = \sum_{i=1}^{d_s'/2} \check{g}(\check{R}(\check{A},\check{Z})\overline{Y}_i^s,J.\overline{Y}_i^s) \\
(R(\,\cdot\,,\cdot\,)_{|\check{\mathbf{Y}}_{\check{p}}^s})_{\mathfrak{a}^s} \text{ est surjectif sur } \mathfrak{a}^s
\end{cases}$$

Or enfin, par la proposition 4 163, qui suit le théorème 1 :

$$\forall A \in \mathrm{T}_p\mathcal{M}, g(R(A,Z)X,Z) = \gamma(X).L_Z\left(L_A\gamma(X).\gamma(X)^{-1}\right)$$

et d'autre part par la proposition 9 page 197 puis par la remarque 1 effectuée page 207 dans la démonstration du lemme 7 :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{d_s'/2} \check{g}(\check{R}(\overline{Y}_i^s,J.\overline{Y}_i^s)\check{A},\check{Z}) &= \sum_{i=1}^{d_s'/2} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}_{\check{D}}\check{h}^s(\overline{Y}_i^s,J.\overline{Y}_i^s,\check{A}) \\
&= \frac{\lambda^s}{4}\,\mathrm{tr}_{\check{g}^s}(\,\mathrm{d}_{\check{D}}\check{h}^s)(\,\cdot\,,J^s\ \cdot\,,\check{A}).
\end{aligned}$$

Par conséquent enfin, $(\mathcal{M},g)$ est de type 3 **ssi** il existe N_1' dans $[\![1,N']\!]$ et $(\lambda^s)_{s=1}^{N_1'} \in (\mathbb{R}^*)^{N_1'}$ t.q pour tout p de $\mathcal{M}$ et tout s de $[\![1,N_1']\!]$:

$$\begin{cases} \text{l'action de l'holonomie de } \check{\mathcal{Y}}^s_p \text{ sur } \check{\mathbf{Y}}^s_p \text{ est dans } \mathfrak{su}(\check{\mathbf{Y}}^s_p,\check{g}^s_{|\check{p}},J^s), \\ \textit{i.e. } \check{\mathcal{Y}}^s_p \text{ est kählerienne, Ricci-plate,} \\ \forall s' > N'_1, \forall A \in \mathbf{Y}^{s'}_p, \gamma(X).L_Z\left(L_A\gamma(X).\gamma(X)^{-1}\right) = 0 \\ \forall A \in \mathbf{Y}^s_p, \gamma(X).L_Z\left(L_A\gamma(X).\gamma(X)^{-1}\right) = \frac{\lambda^s}{4}\operatorname{tr}_{\check{g}^s}(\mathrm{d}_{\check{D}}\check{h}^s)(\,\cdot\,,J^s\ \cdot\ ,\check{A}) \neq \text{cte. nulle} \end{cases}$$

Le long de $\mathcal{X}^{\perp}_m$, $\gamma = \mathrm{d}x$ donc la deuxième condition est équivalente à : $L_A(\ln\gamma(X)) = 0$. Le résultat suit, quitte à remplacer les λ^s par $4\lambda^s$. Le cas «type 4» est semblable. □

A. Ikemakhen a également proposé dans [I96] des exemples de métriques lorentziennes locales engendrant une holonomie de type 3 ou 4. Les coordonnées du théorème 1 et le résultat du théorème 3 permettent de décrire exactement toutes ces métriques.

Corollaire 3 *En toute dimension d où cela a un sens, des métriques lorentziennes locales existent sur $\mathbb{R}^d$, engendrant des holonomies des quatre types annoncés par le théorème 2. Plus précisément, si une métrique de la forme qui apparaît dans le théorème 1 admet au moins un indice $s \geq 1$ pour lequel l'action de l'holonomie sur $\check{\mathbf{Y}}^s_{\check{m}}$ est dans $\mathfrak{u}(\check{\mathbf{Y}}^s_{\check{m}},\check{g}^s_{|\check{m}},J^s)$ et en contient le centre* $\mathrm{vect}(J^s)$*, et pour lequel de plus toutes les feuilles du feuilletage $\check{\mathcal{Y}}^s$ sont kähleriennes Ricci-plates, alors il existe pour chaque N'_1-uplet de réels non nuls un et un seul choix de fonction $\gamma(X)$ tel que la variété obtenue soit de type 3.*

Un résultat d'existence semblable est réalisé pour des variétés de type 4 ; il faut cette fois de plus que $d'_0 = \dim \mathbf{Y}^0$ ne soit pas nul et que $N'_1 \geq d^I$ pour permettre la surjectivité de ψ.

Démonstration. Il suffit de prouver que la condition différentielle sur $\gamma(X)$ s'intègre, c'est-à-dire que pour tout s de $[\![1,N'_1]\!]$:

$$A \mapsto \operatorname{tr}_{\check{g}_z}(\mathrm{d}_{\check{D}^z}\check{h}^s_z(\,\cdot\,,J^s\ \cdot\ ,A))$$

est une forme différentielle fermée. C'est le cas par la deuxième identité de Bianchi. Soient A et B deux vecteurs de $\check{\mathbf{Y}}^s_{\check{p}}$, prolongés en champs locaux dans la distribution $\check{\mathbf{Y}}^s$.

$$\begin{aligned}
&L_A\left[\operatorname{tr}_{\check{g}_z}(\mathrm{d}_{\check{D}^z}\check{h}^s_z(\,\cdot\,,J^s\ \cdot\ ,B))\right] - L_B\left[\operatorname{tr}_{\check{g}_z}(\mathrm{d}_{\check{D}^z}\check{h}^s_z(\,\cdot\,,J^s\ \cdot\ ,A))\right]\\
=&\frac{1}{2}L_A\left[\operatorname{tr}_{\check{g}_z}(R^\sigma(\,\cdot\,,J^s\ \cdot\ ,B))\right] - \frac{1}{2}L_B\left[\operatorname{tr}_{\check{g}_z}(R^\sigma(\,\cdot\,,J^s\ \cdot\ ,A))\right]\\
=&\frac{1}{2}L_A\left[\operatorname{tr}_{\check{g}_z}(g_z(R(\,\cdot\,,J^s\,\cdot\,)B,Z))\right] - \frac{1}{2}L_B\left[\operatorname{tr}_{\check{g}_z}(g_z(R(\,\cdot\,,J^s\,\cdot\,)A,Z)))\right]\\
&\quad\text{ces expressions ont un sens : voir la def. de } R^\sigma \text{ ds la prop. 7 page 195.}\\
=&\frac{1}{2}L_A\left[\operatorname{tr}((R(Z,B)\circ J^s))\right] - \frac{1}{2}L_B\left[\operatorname{tr}((R(Z,A)\circ J^s))\right]\\
=&\frac{1}{2}L_A\left[\operatorname{tr}((R(Z,B)\circ J^s))\right] + \frac{1}{2}L_B\left[\operatorname{tr}((R(A,Z)\circ J^s))\right]\\
=&\frac{1}{2}L_Z\left[\operatorname{tr}((R(A,B)\circ J^s))\right].
\end{aligned}$$

Mais pour tout z, $R(A,B)$ est dans l'algèbre d'holonomie de la feuille $\check{\mathcal{Y}}^s_{\check{m}_z}$ qui est Ricci-plate, donc en tout point q voisin de p, $R(A,B) \in \mathfrak{su}(\check{\mathbf{Y}}^s_{\check{q}},\check{g}_{|\check{q}},J^s)$ et donc $\operatorname{tr}((R(A,B)\circ J^s)) = 0$. □

Remarque. On a par conséquent démontré que nécessairement, pour tout s de $[\![1,N'_1]\!]$, la 1-forme $A \mapsto L_{J.A}(\mathrm{tr}_{\breve{g}_z} \tilde{\breve{h}}^s_z)$ est fermée.

Remarque. Il est de plus remarquable que, dans le théorème 3 de la page 204, ce sont des conditions sur les dérivées *d'ordre trois* de la métrique qui entraînent les propriétés particulières de l'holonomie. Ce phénomène, nouveau par rapport au cas riemannien, semble caractéristique de l'holonomie pseudo-riemannienne quand celle-ci stabilise des sous-espaces totalement isotropes. Les démonstration du lemme 4 et du théorème 1 semblent aussi nécessiter des raisonnements sur les dérivées du tenseur R, c'est-à-dire sur les dérivées troisièmes de la métrique, dès qu'entre en jeu une propagation dans une direction isotrope.

Conclusion du chapitre 3

Comme annoncé dans le préambule, la construction de coordonnées proposée dans ce chapitre pose sans doute plus de questions qu'elle n'apporte de réponses. Cette conclusion n'en est donc pas une, mais recense plutôt rapidement quelques-unes de ces questions.

Tout d'abord, il reste à vérifier la pertinence et l'utilité des coordonnées proposées. Le corollaire obtenu en IV en constitue un fruit concret, mais c'est pour l'instant le seul.

* * *

D'autre part, les techniques de démonstration utilisées pour le lemme analytique et le théorème 1 lui-même, très «manuelles», se révèlent relativement pénibles, bien que l'idée de base — une équation différentielle ordinaire d'ordre 2, relativement naturelle dans son principe — soit simple. Peut-être existe-t-il un point de vue ou des outils plus adaptés ; ils seraient en tout cas les bienvenus dans l'optique d'une généralisation des coordonnées aux variétés ne vérifiant pas $(\mathbf{P_1})$ ou $(\mathbf{P_2})$.

* * *

Ensuite, et on rejoint le premier souci mentionné, on peut tenter d'examiner plusieurs questions sur l'holonomie pseudo-riemannienne à l'aide des coordonnées du théorème 1. Par manque de temps, nous ne l'avons pas fait ici. Citons quelques études possibles :

- Que deviennent les coordonnées du théorème 1 sur des espaces symétriques? Quelles propriétés différentielles supplémentaires vérifient-elles et peut-on y lire certains invariants de l'espace considéré?

- Dans le même ordre d'idées, comment se lit la courbure de Ricci dans ces coordonnées et notamment, en lien avec le chapitre 1, comment se traduit l'éventuel parallélisme de ric? Peut-être peut-on alors construire des exemples de métriques locales pseudo-riemanniennes Ricci-parallèles, non symétriques, du type «Ric nilpotent d'indice 2» qui apparaît dans le théorème 1 du chapitre 1.

- La représentation de l'holonomie $\mathfrak{h}$ dans l'espace tangent en un point m à une variété pseudo-riemannienne ne peut être n'importe quelle sous-algèbre de $\mathfrak{so}(\mathrm{T}_m\mathcal{M},g_{|m})$. Mais quelles sont les algèbres possibles? La même question se pose pour la représentation de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{so}(\check{\mathbf{X}}^{\perp}_{\check{m}},\check{g}_{|\check{m}})$. La proposition 12 fixe déjà une obstruction à cela dans le cas lorentzien. Est-ce la seule et sinon quelles sont les autres? Mieux comprendre le lien entre les coefficients de la métrique dans les coordonnées du théorème 1 et l'holonomie, peut contribuer à répondre à cette question.

Par exemple, la proposition 2 page 124 indique les diverses formes que peuvent prendre les composantes isotypiques de l'action sur E d'un sous-groupe de $GL(E)$, lorsque celle-ci est semi-simple et préserve une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée. Parmi elles, lesquelles se réalisent comme représentation de l'holonomie $\mathfrak{h}$ d'une variété $(\mathcal{M},g)$ sur l'espace $\check{\mathbf{S}}'_{\check{m}} \subset \check{\mathbf{X}}^{\perp}_{\check{m}}$ introduit à la fin de la section I? A quelle condition différentielle sur les coefficients de la métrique dans les coordonnées cela correspond-il alors? Dans le cas lorentzien, cette question revient à se demander si les algèbres $\mathfrak{k}$ qui apparaissent dans l'énoncé du théorème 2 page 201 peuvent être n'importe quelles sous-algèbres de $\mathfrak{so}_{d-2}(\mathbb{R})$, et à quelle condition différentielle chaque algèbre $\mathfrak{k}$ possible correspond.

• Une métrique pseudo-riemannienne locale de la forme qui apparaît dans le théorème 1 ne produit pas nécessairement une variété *indécomposable* : elle peut admettre une distribution parallèle de sous-espaces non dégénérés, et donc se décomposer en produit riemannien local. A quelle condition la variété produite est-elle donc effectivement *indécomposable*?

• On a proposé ici une classification locale des variétés lorentziennes, suivant leur holonomie. L'unicité des coordonnées, une fois effectué un choix arbitraire sur une hypersurface, permet peut-être de rechercher dans quelle mesure ces variétés peuvent être «prolongées» en variétés compactes ou complètes de même holonomie, ou s'il y a au contraire des obstructions à cela.

Cette liste n'est bien entendu aucunement limitative.

* * *

Une autre recherche demande à être poursuivie et généralisée : la compréhension du «défaut» des fibrés $\mathcal{Y}^s_p \to \check{\mathcal{Y}}^s_{\check{p}}$ à être des produits affines, introduit page 192 et suivantes. Ce défaut reste à mieux comprendre, ainsi que ses liens avec l'holonomie de la variété. On a de plus supposé partout ici que $\dim \mathbf{X} = 1$, en particulier donc aussi pour l'étude de cet objet. Cependant, le formalisme proposé dans la section IV.2 pages 192 et suivantes devrait s'adapter à toute dimension sur $\mathbf{X}$; reste à effectuer cette généralisation. Enfin, une étude semblable serait à entreprendre pour les fibrés $\mathcal{W}^r_p \to \check{\mathcal{W}}^r_{\check{p}}$, qui semblent sur ce point se comporter assez différemment.

D'autre part, la forme $(\gamma - \mathrm{d}x)$ est liée, on l'a vu en remarque page 171, au «défaut» de la variété $\mathcal{M}$ à être localement une fibration riemannienne sur une base paramétrée par (x,z) et dont la métrique des fibres est fonction de z. Ce «défaut» aussi mérite comme le premier d'être mieux compris.

En outre, les holonomies particulières traitées dans le IV apparaissent lorsque, dans les coordonnées données par le théorème 1, un certain lien différentiel existe entre la forme γ et certaines matrices g^s (voir le théorème 3 page 204). Indépendamment des coordonnées et donc plus intrinsèquement, il s'agit en fait d'un lien différentiel entre les deux «défauts» mentionnés ci-dessus. Bien isoler ces derniers permettrait alors, sans l'aide des coordonnées, d'avancer vers une classification *globale* des variétés lorentziennes réductibles-indécomposables.

Plus généralement, on l'a vu dans la remarque de la page 162, les diverses dérivées des coefficients de la métrique sont liées à la courbure d'une façon remarquable, mais qui reste encore très compliquée, sans doute trop. Les coordonnées sont en cela décevantes, notamment dans la perspective d'une généralisation au cas $\dim \mathbf{X}$ quelconque. Peut-être la compréhension directe de ces deux «défauts» est-elle potentiellement plus fructueuse?

* * *

Enfin, les coordonnées proposées elles-mêmes demandent à être généralisées, si du moins elles se révèlent intéressantes. Les deux hypothèses techniques $(\mathbf{P_1})$ et $(\mathbf{P_2})$ l'ont été en un sens pour la même raison : le procédé de construction des coordonnées employé est la propagation, par une équation différentielle ordinaire, du paramétrage de la feuille $\mathcal{X}^\perp_m$ à toutes les feuilles $\mathcal{X}^\perp_{m_z}$. Quand la codimension de ce feuilletage est supérieure ou égale à deux, c'est plusieurs équations différentielles successives qu'il faudrait alors utiliser. Rédigée avec le même formalisme, une telle démonstration est devient très lourde. Il faut alors de plus prendre en considération la représentation de $\mathfrak{h}$ dans $\mathrm{T}_m\mathcal{M}/\mathbf{X}^\perp_m$, qui n'est plus en général une algèbre de Lie de dimension 1, et adapter sans doute les coordonnées aux sous-espaces invariants de cette représentation : un autre travail en perspective ... Pour ces deux raisons, on a donc ici supposé $\dim \mathbf{X} = 1$, c'est $(\mathbf{P_2})$. De la même façon, une variété $(\mathcal{M},g)$ qui ne vérifie pas $(\mathbf{P_1})$ requiert en général, pour la construction de coordonnées *déjà sur* $\check{\mathcal{X}}_{\check{m}}^{\perp}$, l'intégration de plusieurs équations différentielles ordinaires sur le même principe qu'exposé plus haut. Ainsi nous avons également supposé $(\mathbf{P_1})$. Il semble que la forme $\rho_{Z,T}$ construite dans le lemme analytique puisse l'être dans le cas général, *i.e.* sans supposer $(\mathbf{P_1})$. Cependant, ceci amène des complications sans représenter d'utilité directe, d'où le choix de supposer $(\mathbf{P_1})$ dès le II.

Notons cependant que les deux grands types de sous-espaces stables de $\check{\mathbf{X}}_{\check{m}}^{\perp}$, les $\check{\mathbf{U}}_{\check{m}}^{r}$ et $\check{\mathbf{V}}_{\check{m}}^{r}$ d'une part et les $\check{\mathbf{Y}}_{\check{m}}^{s}$ d'autre part, donnent lieu à deux types de propagation assez différents pour les coordonnées : la forme $\rho_{Z,T}$ du lemme analytique se construit de manière très différente le long des $\mathcal{U}_m^r$ et le long des $\mathcal{Y}_m^s$. La restriction apportée par $(\mathbf{P_1})$ permet donc toujours d'aborder deux types essentiels de sous-espaces stables possibles de $\check{\mathbf{X}}_{\check{m}}^{\perp}$ — non dégénérés ou totalement isotropes — et donc d'aborder le type de propagation de coordonnées qui leur correspond.

Dans une perspective de généralisation des coordonnées, la première tâche est peut-être cependant de progresser déjà dans la compréhension algébrique de $\mathfrak{so}(\mathrm{T}_m\mathcal{M},g_{|m})$. Le lemme algébrique de la section I est sans doute en effet le point le plus inachevé de ce travail.

Pour finir, un autre type possible de prolongement de ce travail est de s'intéresser *globalement* à la variété $\mathcal{M}$. Les coordonnées du théorème 1 ne semblent pas exister sur n'importe quel ouvert rétractile autour de m. Ont-elles une «frontière naturelle», pourquoi et que représente-t-elle si elle existe? Comment deux ouverts de coordonnées qui s'intersectent se recollent-ils? Que deviennent globalement les différents feuilletages introduits, ainsi que les deux «défauts» cités plus haut? Ces questions, sans doute très compliquées, sont globales et donc d'essence différente de tous les problèmes locaux traités ici.

* * *

Bibliographie

[BBB] Lionel BÉRARD-BERGERY et Charles BOUBEL. Réduction simultanée de deux formes bilinéaires, symétriques ou antisymétriques. preprint.

[BBI93] Lionel BÉRARD-BERGERY and Aziz IKEMAKHEN. On the Holonomy of Lorentzian Manifolds. *Proc. of Symposia in Pure Mathematics*, 54,Part 2:27–39, 1993. (MR 94d:53106).

[BBI97] Lionel BÉRARD-BERGERY et Aziz IKEMAKHEN. Sur l'holonomie des variétés pseudo-riemanniennes de signature (n,n). *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 125 n°1, 93–114, 1997. (MR 98m:53087).

[Ber57] Marcel BERGER. Les espaces symétriques non compacts. *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 74:85–177, 1957. (MR 21♯3516).

[Bes87] Arthur L. BESSE. *Einstein Manifolds.* Springer Verlag — *Berlin, Heidelberg*, 1987.

[Bes96] Arthur L. BESSE, éditeur. *Actes de la Table Ronde de géométrie différentielle en l'honneur de Marcel Berger.* Collection *Séminaires et congrès* n°1, S.M.F., 1996.

[Bour] Nicolas BOURBAKI. *Elements de mathématique.* Groupes et Algèbres de Lie, chapitre 1 : Algèbres de Lie. Hermann, Paris, 1960.

[CP70] Michel CAHEN et Monique PARKER. Sur des classes d'espaces pseudo-riemanniens symétriques. *Bulletin de la Société Mathématique de Belgique*, XXII:339–354, 1970. (MR 44♯3247).

[CP80] Michel CAHEN and Monique PARKER. *Pseudo-riemannian symmetric spaces.* Memoirs of the American Mathematical Society, 24(229), 1980. (MR 81b:53036).

[CW70] M. CAHEN and N. WALLACH. Lorentzian symmetric spaces. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 76:585–591, 1970. (MR 42♯2402).

[E68] David G. EBIN. The manifold of Riemannian metrics. *1970 Global Analysis, Proc. of Symposia in Pure Mathematics*, 15:11-40, 1968. (MR 42♯2506).

[I96] Aziz IKEMAKHEN. Examples of indecomposable non-irreducible Lorentzian manifolds. *Ann. Sci. Math. Québec* 20, n°1, pp.53–66, 1996. (MR 97e:53122).

[Kli54] Wilhelm P.A. KLINGENBERG. Paare symmetrischer und alternierender Formen zweiten Grades. *Abh.Math.Sem.Univ.Hamburg*, 19:78–93, 1954. (MR 16,327g).

[NN57] NEWLANDER and NIRENBERG. Complex analytic coordinates in almost complex manifolds. *Annals of math.*, 65:391–404, 1957. (MR 19,557).

[Q94] M. QUERCIA, article paru dans la rubrique *Questions et réponses* de la *Revue de mathématiques spéciales*, n°5, pp.381–388, janvier 1994.

[T67] Jacques Tits. *Tabellen zu den einfachen Lie Gruppen und ihren Darstellungen.* Lecture Notes in Mathematics n°40, Springer-Verlag — *Berlin, Heidelberg, New York*, 1967.

[W49] A. G. Walker. On parallel fields of partially null vector spaces. *Quart. Journ. of Mathematics (Oxford)*, 20:135–145, sept. 1949.

[W50a] A. G. Walker. Canonical form for a riemannian space with a parallel field of null planes. *Quart. Journ. of Mathematics (Oxford)(2)*, 1:69–79, 1950.

[W50b] A. G. Walker. Canonical forms (II) : parallel partially null planes. *Quart. Journ. of Mathematics (Oxford)(2)*, 1:147–152, 1950.

[Wu67] H. Wu. Holonomy groups of indefinite metrics. *Pacific Journal of Mathematics*, 20:351–392, 1967. (MR 35♯3606).